УДК 519.21

Ю. В. Козаченко, Ю. Ю. Млавець

Точність та надійність підрахунку інтегралів методом Монте-Карло

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Робота присвячена побудові методу Монте-Карло для обчислення інтегралів по обмеженій області, який дозволяє знаходити значення цих інтегралів із заданою точністю та надійністю, тобто побудові оцінок для цих інтегралів.

1. Випадкові процеси з просторів Орліча випадкових величин.

Означення 1 [1]. Парна неперервна опукла функція $U = (U(x), x \in \mathcal{R})$ називається $\mathcal{C}$-функцією, якщо $U(0) = 0$ і $U(x)$ монотонно зростає при $x > 0$.

Означення 2 [1]. Нехай U — довільна $\mathcal{C}$-функція. Простором Орліча випадкових величин $L_U(\Omega)$ називається така сім'я випадкових величин, що для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа $r_\xi > 0$, що $\mathsf{E}U(\xi/r_\xi) < \infty$.

Простір Орліча $L_U(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми $\|\xi\|_U = \inf\{r > 0; \mathsf{E}U(\xi/r) \leqslant 1\}$, яка називається нормою Люксембурга.

Означення 3 [1]. Будемо говорити, що $\mathcal{C}$-функція задовольняє g-умову, якщо існують такі константи $z_0 \geqslant 0$, $K > 0$ і $A > 0$, що для всіх $x \geqslant z_0$ і $y \geqslant z_0$ виконується нерівність

$$U(x)U(y) \leqslant AU(Kxy).$$

Приклад 1. Функція $U(x) = a|x|^\alpha$, $x \in \mathcal{R}$, $a > 0$, $\alpha \geqslant 1$ задовольняє g-умову при $K = 1$, $A = a$ і $z_0 = 0$. $\mathcal{C}$-функція $U(x) = \exp\{\varphi(x)\} - 1$, $x \in \mathcal{R}$, що $\varphi = (\varphi(x), x \in \mathcal{R})$ довільна $\mathcal{C}$-функція задовольняє g-умову при $K = 1$, $A = 1$ і $z_0 = 2$ (якщо $\varphi(x) = |x|^\alpha, \alpha \geqslant 1$ тоді $z_0 = 2^{1/\alpha}$).

Означення 4. Простір Орліча $L_U(\Omega)$ має властивість $\mathbf{H}$, якщо для будь-яких центрованих, незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ з простору $L_U(\Omega)$ виконується нерівність

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\|_U^2 \leqslant C_U \sum_{i=1}^{n} \|\xi_i\|_U^2,$$

де C_U — деяка абсолютна константа.

Приклади просторів Орліча, що мають властивість $\mathbf{H}$, наведені в роботах [1–4]. Зокрема, в роботі [2] показано, що цю властивість мають простори $L_p(\Omega)$ $(U(x) = |x|^p)$, а в роботах [1, 3] показано, що цю властивість мають простори $L_U(\Omega)$, породжені функціями $U(x) = \exp\{|x|^\alpha\} - 1$, $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, $|x| > x_1$, де x_1 — деяка константа.

Означення 5. Нехай $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ — випадковий процес, $\mathbf{T}$ — певна множина індексів, X — належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, коли при кожному $t \in \mathbf{T}$ випадкова величина $X(t) \in L_U(\Omega)$.

Нехай $\rho(t, s) = \|X(t) - X(s)\|_U$ — псевдометрика, що породжується в $\mathbf{T}$ процесом $X = \{X(t), t \in \mathbf{T}\} \in L_U(\Omega)$. Розглянемо псевдометричний простір (T, ρ). Нехай $\mathbf{N}_\rho(v)$ — метрична масивність простору (T, ρ), тобто число замкнених куль радіуса v, що покривають множину $\mathbf{T}$.

2. Точність та надійність при обчисленні інтегралів методом Монте-Карло. Нехай $\{\mathcal{S},\mathcal{A},\mu\}$ — вимірний простір, μ — σ-скінченна міра, $p(s)\geqslant 0$, $s\in\mathcal{S}$ — така функція, що $\int\limits_{\mathcal{S}} p(s)\,d\mu(s)=1$. Нехай $m(A)$, $A\in\mathcal{A}$ — міра, яка визначається так: $m(A)=\int\limits_{A} p(s)\,d\mu(s)$. Оскільки $m(A)$ є ймовірнісною мірою, то простір $\{\mathcal{S},\mathcal{A},\mu\}$ є ймовірнісним простором.

Нехай $f(s)$ — вимірна функція на $\{\mathcal{S},\mathcal{A},\mu\}$. Розглянемо $\int\limits_{\mathcal{S}} f(s)p(s)\,d\mu(s)=\mathcal{I}$ (вважається, що цей інтеграл існує). Ми можемо розглянути $f(s)=f$ як випадкові величини з $\{\mathcal{S},\mathcal{A},\mu\}$ і $\int\limits_{\mathcal{S}} f(s)p(s)\,d\mu(s)=\int\limits_{\mathcal{S}} f(s)\,dm(s)=\mathsf{E}f$.

Нехай ξ_i, $i=1,\ldots,n$, — незалежні копії для випадкової величини f, $Z_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, тоді $Z_n\to\mathsf{E}\xi_1=\mathcal{I}$ з імовірністю одиниця. Розглянемо Z_n як оцінку для $\mathcal{I}$.

Означення 6. Z_n наближає $\mathcal{I}$ з надійністю $1-\delta$ $(0<\delta<1)$ і точністю $\varepsilon>0$, якщо виконується така нерівність:

$$P\{|Z_n-\mathcal{I}|>\varepsilon\}\leqslant\delta.$$

Теорема 1. *Нехай випадкова величина f належить простору $L_U(\Omega)$, який має властивість* **H** *з константою C_U. Тоді Z_n наближає $\mathcal{I}$ з надійністю $1-\delta$ і точністю ε, якщо виконується нерівність*

$$n>\left(\frac{RU^{-1}(1/\delta)}{\varepsilon}\right)^2,$$

де $R=\left(1+\dfrac{d_U}{U^{-1}(1)}\right)\|f\|_U$, *$d_U$ — константа з нерівності* $\mathsf{E}|\xi|\leqslant d_U\|\xi\|_U$ *(див. теорему 2.3.2 з [1]).*

3. Точність та надійність при обчисленні інтегралів, залежних від параметра, методом Монте-Карло. Розглянемо інтеграл $\int\limits_{\mathcal{S}} f(s,t)p(s)\,d\mu(s)=\mathcal{I}(t)$. І нехай всі припущення в п. 2 вірні, але функція $f(s,t)$ залежить від $t\in\mathbf{T}$, де (T,w) — компактний метричний простір. Нехай $f(s,t)$ — неперервна функція відносно t.

Розглянемо $\int\limits_{\mathcal{S}} f(t,s)p(s)\,d\mu(s)=\mathcal{I}(t)$ і нехай цей інтеграл існує. Розглянемо $f(t,s)$ як випадковий процес на $\{\mathcal{S},\mathcal{A},m\}$ і $\mathcal{I}(t)=\int\limits_{\mathcal{S}} f(t,s)p(s)\,d\mu(s)=\int\limits_{\mathcal{S}} f(t,s)dm(s)=\mathsf{E}f(t)$.

Нехай $\xi_i(t)$, $i=1,2,\ldots,n$, — незалежні копії випадкового процесу $f(t)$, $Z_n(t)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i(t)$, то $Z_n(t)\to\mathsf{E}f(t)=\mathcal{I}(t)$ з імовірністю одиниця для будь-якого $t\in\mathbf{T}$.

Означення 7. $Z_n(t)$ наближається до $\mathcal{I}(t)$ у просторі $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ з надійністю $1-\delta>0$ і точністю $\varepsilon>0$, якщо виконується така нерівність:

$$P\Big\{\sup_{t\in\mathbf{T}}|Z_n(t)-\mathcal{I}(t)|>\varepsilon\Big\}\leqslant\delta.$$

Теорема 2. *Нехай випадковий процес $f(t)$ належить простору $L_U(\Omega)$, де $L_U(\Omega)$ має властивість* **H** *з константою C_U та функція U задовольняє умову* g. *Існує неперервна, зростаюча функція $\sigma=(\sigma(h),0\leqslant h\leqslant\delta_0)$, $\delta_0=\sup\limits_{t,s\in\mathbf{T}}\rho(t,s)$, що*

$$\sup_{\rho(t,s)\leqslant h}\|f(t)-f(s)\|_U\leqslant\sigma(h)$$

і $\int\limits_0^{\delta_0} U^{(-1)}(N_w(\sigma^{(-1)}(u)))du < \infty$. *Тоді* $Z_n(t)$ *наближає* $\mathcal{I}(t)$ *з надійністю* $1-\delta$ *і точністю* ε *в просторі* $\mathbf{C}(\mathbf{T})$, *якщо виконується така нерівність:*

$$U\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\check{B}(t_0,\theta)}\right)^{-1} < \delta,$$

де

$$\check{B}(t_0,\theta) = \sup_{t\in\mathbf{T}} \|f(t)-\mathcal{I}(t)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int\limits_0^{\delta_0\theta} \nu(N_w(\sigma_1^{(-1)}(u))\,du,$$

$$\sigma_1(h) = \left(1+\frac{d_U}{U^{-1}(1)}\right)\sigma(h), \qquad \delta_0 = \sigma_1\Big(\sup_{t,s\in\mathbf{T}} w(t,s)\Big), \qquad 0<\theta<1, \qquad \nu(n)$$

мажоруюча характеристика $L_U(\Omega)$ *(див. [1]).*

Точність та надійність обчислення інтегралів за обмеженою областю вивчалися в роботі [5].

1. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric characterization of random variables and random processes. – Providence, RI: AMS, 2000. – 256 p.
2. *Мацак И. К., Пличко А. И.* Некоторые неравенства для сумм независимых случайных величин в банаховых пространствах // Теория вероятностей и матем. статистика. – 1988. – № 38. – С. 81–88.
3. *Абжанов Е. А., Козаченко Ю. В.* Моментные нормы в некоторых пространствах Орлича // Там же. – 1989. – № 41. – С. 3–9.
4. *Багро С. В.* Некоторые вероятностные неравенства и центральная предельная теорема в функциональных пространствах // Там же. – 1991. – № 44. – С. 8–16.
5. *Kurbanmuradov O., Sabelfeld K.* Exponential bounds for the probability deviations of sums of random fields // Monte Carlo Methods and Appl. – 2006. – **12**, No 3–4. – P. 211–229.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка
ДВНЗ "Ужгородський національний університет"

Надійшло до редакції 10.11.2010

Yu. V. Kozachenko, Yu. Yu. Mlavets

The accuracy and reliability of the calculation of integrals by the Monte Carlo method

The paper is devoted to the Monte Carlo method construction for integrals over a limited area, which allows one to find the values of these integrals with given accuracy and reliability, that is to the construction of bounds for these integrals.