УДК 531.36

Ю. А. Мартынюк-Черниенко

О глобальном существовании решений множества дифференциальных уравнений

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Чикрием)

Досліджено проблему глобального існування розв'язку множини диференціальних рівнянь з використанням методу матричнозначних функцій Ляпунова. При цьому використано один із варіантів методу порівняння на основі матричнозначної функції.

Рассматривается начальная задача для множества дифференциальных уравнений

$$D_H X = F(t, X), \qquad X(t_0) = X_0 \in K_C(\mathbb{R}^n), \tag{1}$$

где D_H — производная Хукухары множества X, отображение $F \in C(\mathbb{R}_+ \times K_C(\mathbb{R}^n), K_C(\mathbb{R}^n))$ и $K_C(\mathbb{R}^n)$ — множество всех непустых компактных выпуклых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$.

Глобальное существование решений множества уравнений (1) может быть исследовано при помощи прямого метода Ляпунова при надлежащей его модификации. Далее будем применять матричнозначную функцию и построенную на ее основе скалярную функцию, которая играет роль нелинейного преобразования множества уравнений (1) к скалярному уравнению сравнения. Этот подход широко используется в исследованиях систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [1, 2] и библиографию там).

Наряду с системой (1) будем рассматривать множества систем дифференциальных уравнений

$$D_H X = F_m(X), \qquad X(t_0) = X_0 \in K_C(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

где $F_m(X) = \mathrm{Co} \bigcap\limits_{t \in J} F(t, X)$;

$$D_H X = F_M(X), \qquad X(t_0) = X_0 \in K_C(\mathbb{R}^n), \tag{3}$$

где $F_M(X) = \mathrm{Co} \bigcup\limits_{t \in J} F(t, X)$. Здесь $J = [t_0, b]$, $t_0 \geqslant 0$, $b \in (t_0, \infty)$ и $\mathrm{Co}(\cdot)$ — замкнутая выпуклая оболочка $(\cdot)$.

Кроме множеств систем (2) и (3) будем также рассматривать множество

$$D_H X = F_\beta(X), \qquad X(t_0) = X_0 \in K_C(\mathbb{R}^n), \tag{4}$$

где

$$F_\beta(X) = F_m(X)\beta + F_M(X)(1 - \beta)$$

для любого значения $\beta \in [0, 1]$. Очевидно, что $F_\beta(X) \colon K_C(\mathbb{R}^n) \times [0, 1] \to K_C(\mathbb{R}^n)$.

Наряду с уравнениями (2)–(4) будем рассматривать матричнозначную функцию

$$U(X,\beta) = [U_{ij}(X,\cdot)], \qquad i,j = 1,2, \tag{5}$$

элементы $U_{ij}(\cdot)$ которой сопоставлены с уравнениями (2)–(4) так:

$U_{11}(X)$ — сопоставлен с уравнением (2);

$U_{22}(X)$ — сопоставлен с уравнением (3);

$U_{12}(X,\beta) = U_{21}(X,\beta)$ — сопоставлен с уравнением (4).

При помощи вектора $\alpha \in \mathbb{R}^2_+$ и матричной функции (5) построим скалярную функцию

$$V(X,\alpha,\beta) = \alpha^T U(X,\beta)\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^2_+, \qquad \alpha > 0 \qquad \text{и} \qquad \beta \in [0,1]. \tag{6}$$

Для функции (6) примем такие предположения:

H_1. Функция $V \in C(K_C(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^2_+ \times [0,1], \mathbb{R}_+)$.

H_2. Для любой пары множеств $(A,B) \in K_C(\mathbb{R}^n)$ существует постоянная $L > 0$ такая, что при всех $\beta \in [0,1]$

$$|V(B,\alpha,\beta) - V(A,\alpha,\beta)| \leqslant LD[B,A],$$

где $D[B,A]$ — расстояние Хаусдорфа между множествами B и A.

H_3. Для любого множества $A \in K_C(\mathbb{R}^n)$ определена функция

$$D^+V(A,\alpha,\beta) = \limsup\{[V(A + hF(t,X),\alpha,\beta) - V(A,\alpha,\beta)]h^{-1} \colon h \to 0^+\}$$

при любом значении $\beta \in [0,1]$.

Приведем теперь теорему принципа сравнения для функции (6) и множества уравнений (1).

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) для множества уравнений (1) *построена функция* (6), *для которой выполняются предположения H_1–H_3;*

2) существует скалярная функция $g \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ такая, что

$$D^+V(X,\alpha,\beta)\big|_{(1)} \leqslant g(t, V(X,\alpha,\beta)) \quad \text{при всех} \quad \beta \in [0,1] \quad \text{и} \quad (t,X) \in \mathbb{R}_+ \times K_C(\mathbb{R}^n);$$

3) максимальное решение $R(t,t_0,w_0)$ уравнения сравнения

$$\frac{dw}{dt} = g(t,w), \qquad w(t_0) = w_0 \geqslant 0,$$

существует при всех $t \geqslant t_0$.

Тогда для любого решения $X(t) = X(t,t_0,X_0)$ уравнения (1), *существующего на интервале $[t_0,a)$, имеет место оценка*

$$V(X(t),\alpha,\beta) \leqslant R(t,t_0,w_0) \qquad \text{при всех} \qquad t \in [t_0,a), \tag{7}$$

как только

$$V(X_0,\alpha,\beta) \leqslant w_0.$$

Доказательство. Так как функция (6) скалярная, то доказательство оценки (7) проводится по стандартной схеме метода сравнения (см. [2]), но при этом учитывается, что для производной функции $m(t) = V(X(t), \alpha, \beta)$ верна оценка

$$D^{+}m(t) \leqslant D^{+}V(X(t), \alpha, \beta) + L \lim_{h \to 0^{+}} \frac{1}{h}[D[X(t+h), X(t) + hF(t, X(t))]],$$

и соотношение

$$D[D_H X(t), F(t, X(t))] \equiv 0.$$

Применение теоремы 1 позволяет установить условия глобального существования решений множества дифференциальных уравнений (1) в следующем виде.

Теорема 2. *Предположим, что:*

1) в системе (1) *отображение* $F \in C(\mathbb{R}_{+} \times K_C(\mathbb{R}^n), K_C(\mathbb{R}^n))$ *и* F *отображает ограниченные множества из* $K_C(\mathbb{R}^n)$ *в ограниченные множества из* $K_C(\mathbb{R}^n)$ *и при этом множество уравнений* (1) *имеет локальное решение для любых* (t_0, X_0), $t_0 \geqslant 0$ *и* $X_0 \in K_C(\mathbb{R}^n)$*;*

2) для функции (6) *выполняются предположения* H_1 — H_3 *и, кроме того,* $V(A, \alpha, \beta) \to \to \infty$ *при* $D[A, \Theta] \to \infty$ *для любого значения* $\beta \in [0, 1]$*, где* Θ — *нулевое множество в* $K_C(\mathbb{R}^n)$*,* $A \in K_C(\mathbb{R}^n)$*;*

3) существует скалярная функция $g \in C(\mathbb{R}_{+}^{2}, \mathbb{R})$ *такая, что*

$$D^{+}V(A, \alpha, \beta)\big|_{(1)} \leqslant g(t, V(A, \alpha, \beta)) \quad \text{при всех} \quad \beta \in [0, 1] \quad \text{и} \quad (t, A) \in \mathbb{R}_{+} \times K_C(\mathbb{R}^n);$$

4) существует максимальное решение $R(t) = R(t, t_0, w_0)$ *скалярного уравнения*

$$\frac{dw}{dt} = g(t, w), \qquad w(t_0) = w_0 \geqslant 0, \tag{8}$$

на интервале $[t_0, \infty)$ *и является положительным при* $w_0 > 0$.

Тогда для любого $X_0 \in K_C(\mathbb{R}^n)$ *такого, что* $V(X_0, \alpha, \beta) \leqslant w_0$*, начальная задача* (1) *имеет решение* $X(t)$*, существующее на* $[t_0, \infty)$ *и такое, что*

$$V(X(t), \alpha, \beta) \leqslant R(t) \qquad \text{при всех} \qquad t \geqslant t_0.$$

Доказательство. Обозначим Π множество всех функций $X \in K_C(\mathbb{R}^n)$, определенных на $I_1 = [t_0, t_X)$, таких, что $X(t)$ является решением начальной задачи (1) на I_1 и при этом $V(X(t), \alpha, \beta) \leqslant R(t)$ на I_1. На множестве Π упорядочим элементы таким образом: если $X_1 \leqslant X_2$, то $I_1 \leqslant I_2$ и $X_1(t) = X_2(t)$ при всех $t \in I_1$. Будем обозначать это так: $(\Pi, \leqslant)$.

Вначале покажем, что множество Π непустое. Согласно условию *1* теоремы 2 уравнение (1) имеет решение $X(t)$ на $I_1 = [t_0, t_X)$. Пусть $m(t) = V(X(t), \alpha, \beta)$ при $t \in [t_0, t_X)$. Тогда в силу условий *3*, *4* теоремы 2 имеем оценку

$$V(X(t), \alpha, \beta) \leqslant R(t) \qquad \text{при всех} \qquad t \in [t_0, t_X), \tag{9}$$

где $R(t)$ — максимальное решение уравнения (8). Отсюда следует, что $X \in \Pi$ и, следовательно, множество Π не пусто.

На множестве $(\Pi, \leqslant)$ рассмотрим последовательность (X_c) как цепь. В этом случае существует отображение Y на $I_3 = [t_0, \sup\limits_{c} t_{X_c})$. Ясно, что $Y \in \Pi$ и, следовательно, Y ограничено сверху на $(\Pi, \leqslant)$. По лемме Цорна на множестве $(\Pi, \leqslant)$ существует максимальный элемент $\mathbb{Z}$. Теорема 2 будет доказана, если установить, что $t_{\mathbb{Z}} = \infty$.

Предположим, что это не верно, т. е. пусть $t_{\mathbb{Z}} < \infty$. Согласно условию *4* теоремы 2 решение $R(t)$ уравнения (8) существует на $[t_0, \infty)$ и оно ограничено на интервале $[t_0, t_{\mathbb{Z}}]$. Из условия *2* теоремы 2 следует, что $V(A, \alpha, \beta) \to \infty$ при $D[A, \Theta] \to \infty$ равномерно по t на интервале $[t_0, t_{\mathbb{Z}}]$. Из неравенства (9) следует, что $D[\mathbb{Z}(t), \Theta]$ ограничено на $[t_0, t_{\mathbb{Z}}]$. Из условия *1* теоремы 2 следует, что существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$D[F(t, \mathbb{Z}(t)), \Theta] \leqslant M \qquad \text{на} \qquad [t_0, t_{\mathbb{Z}}]. \tag{10}$$

Учитывая оценку (10), для любых t_1, $t_2 \in [t_0, t_{\mathbb{Z}}]$, $t_1 \leqslant t_2$, имеем неравенство

$$D[\mathbb{Z}(t_2), \mathbb{Z}(t_1)] \leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2} D[F(s, \mathbb{Z}(s)), \Theta]\, ds \leqslant M(t_2 - t_1).$$

Отсюда следует, что $\mathbb{Z}(t)$ является липшицевой функцией на $[t_0, t_{\mathbb{Z}}]$ и, следовательно, существует продолжение $\mathbb{Z}_0(t)$ на $[t_0, t_{\mathbb{Z}}]$. Из непрерывности $\mathbb{Z}_0$ следует, что

$$\mathbb{Z}_0(t_{\mathbb{Z}}) = X_0 + \int\limits_{t_0}^{t_{\mathbb{Z}}} F(s, \mathbb{Z}_0(s))\, ds,$$

где $\mathbb{Z}_0(t)$ является таким решением множества уравнений (1) на $[t_0, t_{\mathbb{Z}}]$, что $V(\mathbb{Z}_0(t), \alpha, \beta) \leqslant R(t)$ при всех $t \in [t_0, t_{\mathbb{Z}}]$.

Далее рассмотрим начальную задачу

$$D_H(X) = F(t, X), \qquad X(t_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}_0(t_{\mathbb{Z}}). \tag{11}$$

Из того, что существует локальное решение, следует, что существует решение $X_0(t)$ на $[t_{\mathbb{Z}}, t_{\mathbb{Z}} + \delta)$, $\delta > 0$. Определим функцию

$$\mathbb{Z}_1(t) = \begin{cases} \mathbb{Z}_0(t) & \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_{\mathbb{Z}}, \\ X_0(t) & \text{при} \quad t_{\mathbb{Z}} \leqslant t \leqslant t_{\mathbb{Z}} + \delta. \end{cases} \tag{12}$$

Ясно, что функция $\mathbb{Z}_1(t)$ является решением множества уравнений (1) на $[t_0, t_{\mathbb{Z}} + \delta)$, и повторяя те же рассуждения, что и выше, получим, что

$$V(\mathbb{Z}_1(t), \alpha, \beta) \leqslant R(t) \qquad \text{при} \qquad t \in [t_0, t_{\mathbb{Z}} + \delta). \tag{13}$$

Оценка (13) противоречит предположению $t_{\mathbb{Z}} < \infty$ для максимального элемента $\mathbb{Z}$ на множестве $(\Pi, \leqslant)$ и, следовательно, $t_{\mathbb{Z}} = \infty$. Этим утверждение теоремы 2 доказано.

Замечание 1. Если вместо функции (6), которая построена на основе функции (5), рассматривать функцию $V \in C(\mathbb{R}_+ \times K_C(\mathbb{R}^n), \mathbb{R}_+)$, существование которой предполагается для множества уравнений (1), то теорема 2 обращается в теорему 3.3.1 из монографии [3].

Конструктивное построение функции (6) на основе матричнозначной функции (5) может оказаться более простой задачей, чем построение скалярной функции $V(t, X(t))$ непосредственно для уравнений (1).

Замечание 2. Отличные от теоремы 2 условия существования и единственности решений множества дифференциальных уравнений (1) были получены ранее в работах [4, 5], где имеется обширная библиография работ в этом направлении.

Автор выражает благодарность О. Д. Кичмаренко за полезные замечания и обсуждение результатов данного сообщения.

1. *Мартынюк-Черниенко Ю. А.* Неточные динамические системы: устойчивость и управление движением. – Киев: Феникс, 2009. – 304 с.
2. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Stability analysis of nonlinear systems. – New York: Marcel Dekker, 1989. – 315 p.
3. *Lakshmikantham V., Bhaskar T. G., Devi J. V.* Theory of set differential equations in a metric space. – Melbourne: Florida Institute of Technology, 2005. – 250 p.
4. *Brandao Lopes Pinto A. J., de Blasi F. S., Iervolino F.* Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // Bull. Unione Mat. Ital. – 1970. – No 4. – P. 534–538.
5. *Плотников А. В., Скрыпник Н. В.* Дифференциальные уравнения с "четкой" и нечеткой многозначной правой частью. Асимптотические методы. – Одесса: Астропринт, 2009. – 191 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 08.11.2010

Yu. A. Martynyuk-Chernienko

About the global existence of solutions of a set of differential equations

We investigate the problem of the global existence of a solution of the set of differential equations via the matrix-valued Lyapunov function method. We use the convenient comparison theorem and a new approach to constructing the Lyapunov-like functions.