

П. Ф. Жук, Л. М. Бондаренко

Паралельне обчислення нерухомої точки циклічного оператора

(Представлено академіком НАН України В. Л. Макаровим)

Визначено поняття циклічного оператора в напівупорядкованому банаховому просторі. Цей оператор має блочну структуру і виникає при моделюванні циклічних хімічних процесів у каскадах апаратів. За певних умов циклічний оператор має нерухому точку, що моделює усталений режим роботи каскаду. Запропоновано і обґрунтовано метод паралельного обчислення цієї нерухомої точки циклічного оператора.

Перспективи розвитку і вдосконалення технології обчислювального експерименту О. А. Самарського у фізиці, хімії, біології тісно пов'язані з можливостями застосування багатопроцесорних обчислювальних систем. При цьому на передній план виступають такі завдання обчислювальної математики, як створення нових методів і алгоритмів, орієнтованих на ефективне використання в багатопроцесорних системах, а також модернізація існуючих алгоритмів з реалізацією можливостей широкого паралелізму (див., наприклад, [1]). Незважаючи на те, що проблематиці паралельних обчислень присвячено значне число публікацій (особливо це стосується задач лінійної алгебри (наприклад, [2])), питання побудови паралельних алгоритмів для систем як звичайних диференціальних рівнянь, так і в частинних похідних, а також для операторних рівнянь, які є математичною основою для сучасних наукових і інженерних задач, залишаються актуальними (див. [3, 4]).

У даній роботі розглядається можливість паралельного обчислення нерухомої точки нелінійного оператора спеціального вигляду, названого нами циклічним, оскільки оператори такого роду виникають при математичному моделюванні циклічних хімічних процесів [5].

1. Постановка завдання. Позначимо через E_1 і E_2 банахові простори, напівупорядковані за допомогою конусів K_1 і K_2 відповідно. У цих просторах зафіксуємо деякі конусні відрізки $J_1 = \langle a_*, a^* \rangle \subseteq E_1$, $J_2 = \langle c_*, c^* \rangle \subseteq E_2$ і неперервний монотонний оператор P , що відображає конусний відрізок $J_1 \times J_2$ простору $E_1 \times E_2$ на себе.

Для визначення циклічного оператора задамо деяке натуральне число m і розглянемо $m + 1$ співвідношень

$$\begin{aligned} (a'_0, c_1) &= P(a_1, c^*), \\ (a'_i, c_{i+1}) &= P(a_{i+1}, c_i), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ (a'_m, c_{m+1}) &= P(a_*, c_m), \end{aligned} \tag{1}$$

послідовне застосування яких дозволяє для будь-яких відомих елементів a_1, a_2, \dots, a_m конусного відрізка J_1 однозначно знайти елементи a'_0, a'_1, \dots, a'_m конусного відрізка J_1 і елементи c_1, c_2, \dots, c_{m+1} конусного відрізка J_2 . Тому рівняння

$$A\vec{a} = \vec{a}', \quad C\vec{a} = \vec{c}, \tag{2}$$

де вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in J_1^m$, $\vec{a}' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_m) \in J_1^m$, $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in J_2^m$, задають деякі неперервні оператори $A: J_1^m \rightarrow J_1^m$, $C: J_1^m \rightarrow J_2^m$. Покажемо, що ці оператори монотонні.

Дійсно, нехай $\vec{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$, $j = 1, 2$, — дві довільні точки конусного відрізка J_1^m такі, що $\vec{a}_1 \leq \vec{a}_2$. Тоді компоненти векторів $\vec{a}'_j = (a'_{1j}, a'_{2j}, \dots, a'_{mj}) = A\vec{a}_j$, $\vec{c}_j = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{mj}) = C\vec{a}_j$, $j = 1, 2$, задовольняють нерівності

$$\begin{aligned} (a'_{01}, c_{11}) &= P(a_{11}, c^*) \leq P(a_{12}, c^*) = (a'_{02}, c_{12}), \\ (a'_{i1}, c_{i+1,1}) &= P(a_{i+1,1}, c_{i1}) \leq P(a_{i+1,2}, c_{i2}) = (a'_{i2}, c_{i+1,2}), \quad i = 1, \dots, m-1, \\ (a'_{m1}, c_{m+1,1}) &= P(a_*, c_{m1}) \leq P(a_*, c_{m2}) = (a'_{m2}, c_{m+1,2}), \end{aligned}$$

тобто $A\vec{a}_1 \leq A\vec{a}_2$, $C\vec{a}_1 \leq C\vec{a}_2$, що і потрібно було показати.

Оператор A , заданий співвідношенням (2), називатимемо циклічним, якщо виконується хоч би одна з двох умов:

- 1) серед множин $A^j J_1^m$, $j = 0, 1, \dots$, є принаймні одна компактна множина;
- 2) конус K_1 правильний.

Практичне значення мають нерухомі точки циклічного оператора. Щодо них є вірним твердження.

Теорема 1. *Нехай A є циклічним оператором, а \vec{a}_* є найменшою точкою конусного відрізка J_1^m . Тоді ітераційна послідовність $\vec{a}_1 = \vec{a}_*$, $\vec{a}_{k+1} = A\vec{a}_k$, $k = 1, 2, \dots$, монотонно зростає і збігається в просторі E_1^m до найменшої нерухомої точки \vec{a}_∞ оператора A .*

Доведення. Оскільки \vec{a}_1 є найменшою точкою J_1^m , то $\vec{a}_2 = A\vec{a}_1 \geq \vec{a}_1$, отже, $\vec{a}_{k+1} = A\vec{a}_k \geq A\vec{a}_{k-1} = \vec{a}_k$, $k = 2, 3, \dots$, тобто послідовність \vec{a}_k , $k = 1, 2, \dots$, монотонно зростає. Але вона обмежена зверху найбільшою точкою \vec{a}^* конусного відрізка J_1^m , а тому, за умови циклічності оператора A , збігається в просторі E_1^m (див., наприклад, [6]), причому її границя $\vec{a}_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{a}_k$ є, очевидно, нерухомою точкою оператора A .

Нехай \vec{a} — довільна нерухома точка оператора A . Оскільки $\vec{a}_1 \leq \vec{a}$, то $\vec{a}_k = A^{k-1}\vec{a}_1 \leq \vec{a}$, $k = 1, 2, \dots$, отже, $\vec{a}_\infty \leq \vec{a}$. Тому \vec{a}_∞ є найменшою нерухомою точкою оператора A . Теорему доведено.

Наше завдання полягає в організації паралельного обчислення нерухомої точки \vec{a}_∞ оператора A .

2. Паралельне обчислення нерухомої точки \vec{a}_∞ . Введемо поняття узагальненого циклічного оператора. Для цього використовуватимемо аналоги співвідношень (1):

$$\begin{aligned} (a'_0, c'_1) &= P(a_1, c^*), \\ (a'_i, c'_{i+1}) &= P(a_{i+1}, c_i), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ (a'_m, c'_{m+1}) &= P(a_*, c_m). \end{aligned} \tag{3}$$

Рівність (3) дозволяє для будь-яких відомих елементів a_1, a_2, \dots, a_m з J_1 і c_1, c_2, \dots, c_m з J_2 однозначно знаходити елементи $a'_0, a'_1, \dots, a'_m, c'_1, c'_2, \dots, c'_{m+1}$. Тому існує оператор, що відображає конусний відрізок $J_1^m \times J_2^m$ банахова простору $E_1^m \times E_2^m$ на себе за формулою

$$B(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{a}', \vec{c}'), \tag{4}$$

де компоненти векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in J_1^m$, $\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m) \in J_2^m$, $\vec{a}' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_m) \in J_1^m$, $\vec{c}' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_m) \in J_2^m$ задовольняють співвідношення (3).

Нам будуть необхідні деякі властивості оператора B , сформульовані у вигляді леми.

Лема 1. *Нехай B — оператор, визначений рівністю (4). Тоді:*

- 1) *оператор B неперервний і монотонний;*
- 2) *рівність $B(\vec{a}, \vec{c}) = (A\vec{a}, \vec{c})$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \in J_1^m$, $\vec{c} = C\vec{a}$;*
- 3) *якщо $(\vec{a}, \vec{c}) \in J_1^m \times J_2^m$ і $(\vec{a}, \vec{c}) \leq B(\vec{a}, \vec{c})$, то $(\vec{a}, \vec{c}) \leq (A\vec{a}, C\vec{a}) \leq B^m(\vec{a}, \vec{c})$.*

Доведення. Неперервність оператора B впливає безпосередньо із співвідношень (3) і неперервності оператора P . Доведемо монотонність.

Візьмемо дві довільні точки $(\vec{a}_j, \vec{c}_j) = ((a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}), (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{mj}))$, $j = 1, 2$, конусного відрізка $J_1^m \times J_2^m$ такі, що $(\vec{a}_1, \vec{c}_1) \leq (\vec{a}_2, \vec{c}_2)$. Тоді компоненти точок $(\vec{a}'_j, \vec{c}'_j) = ((a'_{1j}, a'_{2j}, \dots, a'_{mj}), (c'_{1j}, c'_{2j}, \dots, c'_{mj})) = B(\vec{a}_j, \vec{c}_j)$, $j = 1, 2$, задовольняють співвідношення

$$\begin{aligned} (a'_{01}, c'_{11}) &= P(a_{11}, c^*) \leq P(a_{12}, c^*) = (a'_{02}, c'_{12}), \\ (a'_{i1}, c'_{i+1,1}) &= P(a_{i+1,1}, c_{i1}) \leq P(a_{i+1,2}, c_{i2}) = (a'_{i2}, c'_{i+1,2}), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ (a'_{m1}, c'_{m+1,1}) &= P(a_*, c_{m1}) \leq P(a_*, c_{m2}) = (a'_{m2}, c'_{m+1,2}), \end{aligned}$$

тобто $B(\vec{a}_1, \vec{c}_1) \leq B(\vec{a}_2, \vec{c}_2)$, що і потрібно було довести.

Для доведення другого твердження зазначимо, що рівність $(\vec{a}', \vec{c}') = B(\vec{a}, \vec{c}) = (A\vec{a}, \vec{c})$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\vec{a} \in J_1^m$, $\vec{a}' = A\vec{a}$, $\vec{c}' = \vec{c}$. При цьому співвідношення (1), (3) збігаються, отже, $\vec{c} = C\vec{a}$, що і потрібно було довести.

Припустимо, нарешті, що $(\vec{a}, \vec{c}) \in J_1^m \times J_2^m$ і $(\vec{a}, \vec{c}) \leq B(\vec{a}, \vec{c})$. Тоді, через монотонність оператора B , послідовність $B^j(\vec{a}, \vec{c})$, $j = 0, 1, \dots$, монотонно зростає. Вважаючи, що $A\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, $C\vec{a} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, $B^j(\vec{a}, \vec{c}) = ((a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}), (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{mj}))$, маємо

$$\begin{aligned} (a_{01}, c_1) &\leq (a_{01}, c_{11}) = P(a_1, c^*) = (\alpha_0, \beta_1), \\ (a_i, c_{i+1}) &\leq (a_{i1}, c_{i+1,1}) = P(a_{i+1}, c_i) \leq P(a_{i+1}, \beta_i) = (\alpha_i, \beta_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ (a_m, c_{m+1,1}) &= (a_{m1}, c_{m+1,1}) = P(a_*, c_m) \leq P(a_*, \beta_m) = (\alpha_m, \beta_{m+1}), \end{aligned}$$

тобто $(\vec{a}, \vec{c}) \leq (A\vec{a}, C\vec{a})$. Аналогічно отримуємо

$$\begin{aligned} (\alpha_0, \beta_1) &= P(a_1, c^*) = (a_{01}, c_{11}), \\ (\alpha_i, \beta_{i+1}) &= P(a_{i+1}, \beta_i) \leq P(a_{i+1,i}, c_{ii}) = (a_{i,i+1}, c_{i+1,i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \\ (\alpha_m, \beta_{m+1}) &= P(a_*, \beta_m) \leq P(a_{mm}, c_{m+1,m+1}), \end{aligned}$$

тобто $(A\vec{a}, C\vec{a}) \leq B^m(\vec{a}, \vec{c})$. Лему доведено.

Оператор B , заданий співвідношенням (4), називатимемо узагальненим циклічним, якщо виконується хоч би одна з двох умов:

- 1) серед множин $B^j(J_1^m \times J_2^m)$, $j = 0, 1, \dots$, є принаймні одна компактна множина;
- 2) конус K_1 правильний, а конус K_2 нормальний.

Для узагальненого циклічного оператора має місце аналог теореми 1.

Теорема 2. *Нехай B — циклічний оператор, а (\vec{a}_*, \vec{c}_*) — найменша точка конусного відрізка $J_1^m \times J_2^m$. Тоді ітераційна послідовність*

$$(\vec{a}_1, \vec{c}_1) = (\vec{a}_*, \vec{c}_*), \quad (\vec{a}_{k+1}, \vec{c}_{k+1}) = B(\vec{a}_k, \vec{c}_k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

монотонно зростає і збігається в просторі $E_1^m \times E_2^m$ до найменшої нерухомої точки $(\vec{a}_\infty, \vec{c}_\infty)$ оператора B , де \vec{a}_∞ — найменша нерухома точка оператора A , а $\vec{c}_\infty = C\vec{a}_\infty$.

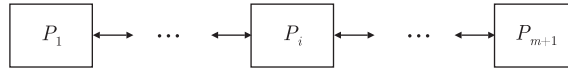


Рис. 1. Паралельна система для реалізації оператора B

Доведення. Оскільки (\vec{a}_1, \vec{c}_1) — найменша точка конусного відрізка $J_1^m \times J_2^m$, то, очевидно, $(\vec{a}_1, \vec{c}_1) \leq B(\vec{a}_1, \vec{c}_1)$. Тому, за лемою 1, послідовність (\vec{a}_k, \vec{c}_k) , $k = 1, 2, \dots$, монотонно зростає, обмежена зверху найбільшою точкою (\vec{a}^*, \vec{c}^*) конусного відрізка $J_1^m \times J_2^m$ і мають місце оцінки

$$(\vec{a}_{jm+1}, \vec{c}_{jm+1}) \leq (A\vec{a}_{jm+1}, C\vec{a}_{jm+1}) \leq (\vec{a}_{(j+1)m+1}, \vec{c}_{(j+1)m+1}), \quad j = 0, 1, \dots \quad (6)$$

Покажемо, що послідовність (\vec{a}_k, \vec{c}_k) , $k = 1, 2, \dots$, збігається в просторі $E_1^m \times E_2^m$. Дійсно, у разі коли певна множина $B^j(J_1^m \times J_2^m)$, $j = 0, 1, \dots$, компактна, це безпосередньо впливає з монотонності і обмеженості послідовності (\vec{a}_k, \vec{c}_k) , $k = 1, 2, \dots$ (див., наприклад, [6]).

У другому можливому випадку конус K_1 є правильний, а тому послідовність \vec{a}_k , $k = 1, 2, \dots$, збігається. Але тоді з нерівностей (6) і нормальності конуса K_2 впливає збіжність послідовності \vec{c}_k , $k = 1, 2, \dots$.

Таким чином, існує границя $(\vec{a}, \vec{c}) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\vec{a}_k, \vec{c}_k)$. Оскільки оператор B неперервний, то (\vec{a}, \vec{c}) — його нерухома точка. Більш того, з оцінок (6) випливає, що \vec{a} — нерухома точка оператора A і $\vec{c} = C\vec{a}$. Залишається показати, що $\vec{a} = \vec{a}_\infty$.

Дійсно, за лемою 1, $B(\vec{a}_\infty, C\vec{a}_\infty) = (A\vec{a}_\infty, C\vec{a}_\infty) = (\vec{a}_\infty, C\vec{a}_\infty)$, тобто $(\vec{a}_\infty, C\vec{a}_\infty)$ — нерухома точка оператора B . Тому $(\vec{a}, \vec{c}) \leq (\vec{a}_\infty, C\vec{a}_\infty)$, $\vec{a} \leq \vec{a}_\infty$. Але, за теоремою 1, $\vec{a} \geq \vec{a}_\infty$, отже, $\vec{a} = \vec{a}_\infty$. Теорему доведено.

Зауваження. Фактично доведено, що ітераційна послідовність (\vec{a}_k, \vec{c}_k) , $k = 1, 2, \dots$, монотонно зростає і збігається до $(\vec{a}_\infty, \vec{c}_\infty)$ у просторі $E_1^m \times E_2^m$ при будь-якому початковому наближенні (\vec{a}_1, \vec{c}_1) такому, що $\vec{a}_1 \leq \vec{a}_\infty$, $(\vec{a}_1, \vec{c}_1) \leq B(\vec{a}_1, \vec{c}_1)$.

Теорема 2 дозволяє знаходити найменшу нерухома точку \vec{a}_∞ циклічного оператора A за допомогою ітераційної послідовності (5), тобто шляхом послідовного застосування узагальненого циклічного оператора B .

Оператор B допускає чисельну реалізацію на паралельній системі у вигляді лінійного масиву $m + 1$ процесорів з локальною пам'яттю, зображеного на рис. 1.

Для обчислення компонент векторів $(\vec{a}', \vec{c}') = B(\vec{a}, \vec{c})$ у локальній пам'яті процесора P_1 розміщується інформація про елементи a_1, c_1^* ; у локальній пам'яті процесора P_i , $i = 2, 3, \dots, m$, — інформація про елементи a_i, c_{i-1} ; у P_{m+1} — про елементи a_m, c_m . Алгоритм обчислення компонент векторів (\vec{a}', \vec{c}') на даній паралельній системі складається з двох етапів.

На першому етапі реалізуються співвідношення (3): на процесорі P_1 обчислюються елементи a'_0, c'_1 ; на процесорі P_i , $i = 2, 3, \dots, m$, — елементи a'_{i-1}, c'_i ; на P_{m+1} — елементи a'_m, c'_{m+1} . На другому етапі відбувається обмін інформацією в системі: у локальну пам'ять процесора P_1 надходить з локальної пам'яті процесора P_2 інформація про елемент a'_1 ; у локальну пам'ять процесора P_i , $i = 2, 3, \dots, m$, надходить інформація про елемент c'_{i-1} з P_{i-1} та інформація про елемент a'_i з P_{i+1} ; у пам'ять процесора P_{m+1} надходить інформація про елемент c'_m . Обмін інформацією між процесорами P_{i-1} , P_i , P_{i+1} схематично показаний на рис. 2.

Тут позначено (a_{i-1}, c_{i-2}) , (a_i, c_{i-1}) , (a_{i+1}, c_i) — початкові дані, а (a'_{i-2}, c'_{i-1}) , (a'_{i-1}, c'_i) , (a'_i, c'_{i+1}) — результати роботи процесорів P_{i-1} , P_i , P_{i+1} на першому етапі.

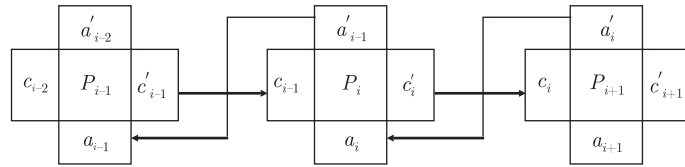


Рис. 2. Схема взаємодії процесора P_i із сусідніми процесорами P_{i-1} , P_{i+1}

Як перший, так і другий етапи обчислення векторів (\vec{a}', \vec{c}') можуть бути здійснені для всіх процесорів паралельної системи одночасно. Тим самим досягається максимальний ступінь паралелізму.

1. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2002. – 608 с.
2. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. – Москва: Мир, 1991. – 368 с.
3. Воеводин В. В. Вычислительная математика и структура алгоритмов. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 2006. – 112 с.
4. Ильин В. П. Параллельные алгоритмы для больших прикладных задач: проблемы и технологии // Автоматрия. – 2007. – **43**, № 2. – С. 3–21.
5. Жук П. Ф., Бондаренко Л. Н. Асимптотическое поведение решения нелинейной математической модели каскада последовательно соединенных сорбционных аппаратов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2004. – **44**, № 7. – С. 1306–1313.
6. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. – Москва: Физматгиз, 1962. – 394 с.

Інститут інформаційно-діагностичних систем
Національного авіаційного університету, Київ

Надійшло до редакції 26.11.2010

P. F. Zhuk, L. M. Bondarenko

The parallel computing of the fixed point of a cyclic operator

The concept of cyclic operator is defined in a semiordered Banach space. This operator has a sectional structure and arises at the design of cyclic chemical processes in the cascades of apparatus. Under certain conditions, a cyclic operator has a fixed point which designs a withstand mode of operations of a cascade. The method of parallel computing of this fixed point of the cyclic operator is offered and grounded.