УДК 510.6

А. П. Пынько

Оптимизация секвенциальных исчислений для конечнозначных логик с определителем равенства

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Летичевским)

Запропоновано ефективну процедуру мінімізації числа засновків правил введення секвенційних числень для пропозиційних скінченнозначних логік з визначником рівності.

В данной работе мы предлагаем эффективную процедуру минимазации числа посылок правил секвенциальных исчислений для конечнозначных логик с определителем равенства, введенных в работе [1]. Важность указанной минимизации объясняется тем, что мощность деревьев вывода секвенций в таких исчислениях, которая, в свою очередь, предопределяет вычислительную сложность процедур поиска вывода, найденных в работе [1], имеет верхнюю достижимую оценку $N^{\partial(\Phi)}$, где N — максимальное число посылок правил рассматриваемого исчисления, а $\partial(\Phi)$ — степень заданной секвенции Φ (которая определяется связками, входящими в эту секвенцию). Учитывая определение 1 [1], данная минимизация эквивалентна минимизации значений компонентов секвенциальных таблиц для рассматриваемых логик, чему и посвящается основная часть данной работы.

Мы следуем терминологии, обозначениям и установкам, принятым в работе [1], за исключением того, что для простоты изложения секвенции считаются парами конечных множеств (а не последовательностей) формул, при этом отношение включения $\subseteq$ распространяется на секвенции покомпонентно. Кроме того, мы полагаем $k = l = 0$ и, соответственно, опускаем какое-либо упоминание о ранге.

Пусть $F \subseteq \mathrm{Fm}_L$. Под *(пропозициональными) F-секвенциями* мы понимаем пары вида $\Gamma \vdash \Delta$, где Γ, $\Delta \subseteq {}_\omega F$. Секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ называется *рефлексивной*, если $\Gamma \bigcap \Delta \neq \varnothing$. Множество всех (иррефлексивных) F-секвенций обозначается $\mathrm{Seq}(F)$ ($\widetilde{\mathrm{Seq}}(F)$). Следующие секвенциальные правила называются *структурными F-правилами*:

$$\text{сечение} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta \bigcup \{\varphi\} \{\varphi\} \bigcup \Theta \vdash \Xi}{\Gamma \bigcup \Theta \vdash \Delta \bigcup \Xi},$$

$$\text{утончение} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \bigcup \Theta \vdash \Delta \bigcup \Xi},$$

где $\varphi \in F$, Γ, Δ, Θ, $\Xi \subseteq {}_\omega F$.

Пусть $\langle P, \leqslant \rangle$ — частично упорядоченное множество и $B \subseteq P$. Множество всех минимальных относительно $\leqslant$ элементов B обозначается $\mathrm{Min}_\leqslant(B)$. Положим $B{\uparrow_\leqslant} := \{a \in P \mid \exists b \in B : b \leqslant a\}$. Далее, B называется *антицепью (верхним конусом)* $\langle P, \leqslant \rangle$, если $\mathrm{Min}_\leqslant(B) = B$ ($B{\uparrow_\leqslant} = B$). Две антицепи частично упорядоченного множества $\langle P, \leqslant \rangle$ называются *несравнимыми*, если их объединение само является антицепью $\langle P, \leqslant \rangle$, а пересечение пусто.

Для произвольных Γ, $\Delta \subseteq \mathrm{Seq}_L$ полагаем $\Gamma \equiv {}_{\mathsf{M}}\Delta \iff \mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}(\Gamma) = \mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}(\Delta)$. Для произвольных Φ, $\Psi \in \mathrm{Seq}_L$ полагаем $\Phi \lhd_{\mathsf{M}} \Psi \iff \Psi \in \mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}(\Phi)$. При этом, $\lhd_{\mathsf{M}}$ является отношением квазиупорядочения, а $\equiv_{\mathsf{M}} \bigcap \mathrm{Seq}_L^2 = \lhd_{\mathsf{M}} \bigcap \lhd_{\mathsf{M}}^{-1}$ — отношением эквивалентности на Seq_L.

В силу равенств (1) и (2), а также конструктивного доказательства теоремы 1 работы [2], задача построения секвенциальной таблицы для всех элементов M с минимальными значениями ее компонентов сводится к более общей задаче вычисления, для произвольных $n \geqslant 0$ и $S \subseteq \widetilde{\mathrm{Seq}}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\}))$, конечного множества $S \equiv_{\mathsf{M}} T \subseteq \widetilde{\mathrm{Seq}}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\}))$ с минимальным числом элементов. Данная задача аналогична задаче построения кратчайшей дизъюнктивной нормальной формы (д. н. ф.) в алгебре логики [3]. Более того, если $\mathsf{M} = \{\mathcal{M}\}$, а $\mathcal{M}$ — двузначна, поставленная задача эквивалентна вышеуказанной задаче теории булевых функций. Поэтому мы используем идеи построения минимальной д. н. ф. [3], которое отличается от построения кратчайшей д. н. ф. только заключительным перебором очевидным образом.

Зафиксируем $n \geqslant 0$. Положим

$$\mathrm{Axm}\colon = \{\Phi[\sigma] \mid \Phi \in \widehat{\mathrm{Ax}}(p_1, \ldots, p_m), \sigma\colon \{p_1, \ldots, p_m\} \to \{p_1, \ldots, p_n\}\},$$

$$\widetilde{\mathrm{Axm}} := \mathrm{Axm} \bigcap \widetilde{\mathrm{Seq}}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\})).$$

Заметим, что

$$\mathrm{Seq}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\})) \setminus \widetilde{\mathrm{Seq}}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\})) \subseteq \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}, \tag{1}$$

$$S \equiv_{\mathsf{M}} S \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}, \tag{2}$$

где $S \subseteq \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\}))$.

Пусть $S \subseteq \widetilde{\mathrm{Seq}}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\}))$. Рассмотрим процедуру, состоящую из следующих шагов:

1) вычисляем конечное множество

$$\mathbf{M}(S) := \mathrm{Min}_{\subseteq}(\mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}(S) \bigcap \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\})) \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}});$$

2) разбиваем $\mathbf{M}(S)$ на классы эквивалентности по отношению $\equiv_{\mathsf{M}}$ и выбираем по одному элементу из каждого, получая в результате множество $\mathbf{P}(S)$, частично упорядоченное отношением $\lhd_{\mathsf{M}}$;

3) вычисляем множество $\mathbf{Q}(S) := \mathrm{Min}_{\lhd_{\mathsf{M}}}(\mathbf{P}(S))$;

4) вычисляем множество $\mathbf{K}(S) := \{\Phi \in \mathbf{Q}(S) \mid \Phi \notin \mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}(\mathbf{Q}(S) \setminus \{\Phi\}\}$;

5) вычисляем множество $\mathbf{R}(S) := \mathbf{Q}(S) \setminus \mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}(\mathbf{K}(S))$;

6) для каждого $0 \leqslant i \leqslant |\mathbf{R}(S)|$ и $H \subseteq \mathbf{R}(S)$ с $|H| = i$ проверяем включение $\mathbf{R}(S) \setminus H \subseteq \mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}(\mathbf{K}(S) \bigcup H)$ и при первом позитивном ответе завершаем процедуру, положив $\mathbf{T}(S) := \mathbf{K}(S) \bigcup H$.

Отметим, что если $\mathsf{M} = \{\mathcal{M}\}$, а $\mathcal{M}$ — двузначна, то $\Phi \lhd_{\mathsf{M}} \Psi \iff \Phi \subseteq \Psi$ и $\Phi \equiv_{\mathsf{M}} \Psi \iff \Phi = \Psi$ для всех $\Phi, \Psi \in \widetilde{\mathrm{Seq}}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\}))$. В этом случае, с учетом (1), $\mathbf{Q}(S) = \mathbf{P}(S) = \mathbf{M}(S)$.

Предложение 1. *Для произвольного* $S \subseteq \widetilde{\mathrm{Seq}}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\}))$*:*

$$S \equiv_{\mathsf{M}} \mathbf{T}(S) \subseteq \widetilde{\mathrm{Seq}}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\})),$$

$$|\mathbf{T}(S)| = \min\{|T| \mid S \equiv_{\mathsf{M}} T \subseteq \widetilde{\mathrm{Seq}}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\}))\}.$$

Доказательство. В силу конечности множества $\mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\}))$ всякая секвенция $\Phi \in \mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}(S) \bigcap \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\})) \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}$ имеет $\Phi \rhd_{\mathsf{M}} \Psi \in \mathbf{Q}(S)$. Поэтому всякое $S \equiv {}_{\mathsf{M}} X \subseteq \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\})) \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}$ имеет $X \equiv {}_{\mathsf{M}} Y \subseteq \mathbf{Q}(S)$ с $|Y| = |X|$. С учетом (1) и (2) дальнейшая аргументация очевидна.

Шаги *2–6* вышеприведенной процедуры реализуются непосредственно. При этом проверка условий вида $\Phi \in \mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}(\Gamma)$, где $\Phi \in \widetilde{\mathrm{Seq}}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\}))$ и $\Gamma \subseteq \widetilde{\mathrm{Seq}}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\}))$, может осуществляться как алгебраически, так и дедуктивно — с использованием теоремы сильной полноты работы [4] (см. теорему 1 и замечание 1 цитируемой работы) и предложенных в ней программных средств. Что касается шага *1*, его непосредственная реализация требует перебора всех пар элементов множества $\mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}(S) \bigcap \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\})) \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}$. Например, в случае трех- и четырехзначных логик с конструктивным отрицанием (см. пример 2 работы [2]), когда $|\Im| = 2$, и бинарной связки число таких пар может достигать 2^{16}. Цель остальной части настоящей работы — найти способ вычисления множества $\mathbf{M}(S)$ без вышеуказанного перебора. Ключевым средством эффективной реализации шага *1* является вышеупомянутая теорема сильной полноты [4].

Лемма 1. *Для произвольных* $\Sigma \in \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\}))$ *и* $S \subseteq \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\}))$, $\Sigma \in \mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}(S)$ *тогда и только тогда, когда* Σ *выводима из* $S \bigcup \mathrm{Axm}$ *с помощью структурных* $\Im(\{p_1,\ldots,p_n\})$*-правил.*

Доказательство. По теореме сильной полноты работы [4] (см. теорему 1 и замечание 1 цитируемой работы), при $L' = \varnothing$ и $W = \{p_1,\ldots,p_n\}$.

Для произвольных Γ, Δ, Θ, $\Xi \subseteq {}_{\omega}\mathrm{Fm}_L$ положим

$$\mathrm{Cut}(\Gamma \vdash \Delta, \Theta \vdash \Xi) := \{\Gamma \bigcup (\Theta \setminus \{\varphi\}) \vdash (\Delta \setminus \{\varphi\}) \bigcup \Xi \mid \varphi \in \Delta \bigcap \Theta\}.$$

Далее, для произвольного $G \subseteq \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\}))^2$ полагаем

$$\mathrm{Cut}(G) := \bigcup\{\mathrm{Cut}(\Phi,\Psi) \mid \langle\Phi,\Phi\rangle \in G\}.$$

Определим оператор $\Re_+$ на верхних конусах $\langle\mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\})),\subseteq\rangle$, включающих Axm:

$$\Re_+(U) := U \bigcup \mathrm{Cut}(U^2){\uparrow_{\subseteq}},$$

где U — верхний конус $\langle\mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\})),\subseteq\rangle$, включающий Axm. Далее определим оператор $\Re_-$ на антицепях $\langle\mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\})) \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}},\subseteq\rangle$:

$$\Re_-(C) := \mathrm{Min}_{\subseteq}(C \bigcup (\mathrm{Cut}(C^2 \bigcup (C \times \mathrm{Min}_{\subseteq}(\widetilde{\mathrm{Axm}})) \bigcup (\mathrm{Min}_{\subseteq}(\widetilde{\mathrm{Axm}}) \times C)) \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}})),$$

где C — антицепь $\langle\mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\})) \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}},\subseteq\rangle$. И, наконец, определим оператор $\Re$ на парах несравнимых антицепей $\langle\mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\})) \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}\subseteq$:

$$\pi_0(\Re(C_0,C_1)) := \mathrm{Min}_{\subseteq}(\mathrm{Cut}(C_0^2 \bigcup (C_0 \times (C_1 \bigcup \mathrm{Min}_{\subseteq}(\widetilde{\mathrm{Axm}}))) \bigcup$$

$$\bigcup ((C_1 \bigcup \mathrm{Min}_{\subseteq}(\widetilde{\mathrm{Axm}})) \times C_0)) \setminus (C_0 \bigcup C_1 \bigcup \mathrm{Axm}){\uparrow_{\subseteq}}),$$

$$\pi_1(\Re(C_0,C_1)) := (C_0 \bigcup C_1) \setminus \pi_0(\Re(C_0,C_1)){\uparrow_{\subseteq}},$$

где $\langle C_0,C_1\rangle$ — пара несравнимых антицепей $\langle\mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\})) \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}},\subseteq\rangle$.

Замечание 1. Отображения

$$f\colon U \mapsto \mathrm{Min}_{\subseteq}(U \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}), \qquad g\colon C \mapsto (C \bigcup \mathrm{Axm}){\uparrow_{\subseteq}},$$

где U — верхний конус $\langle \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\})),\subseteq\rangle$, включающий Axm, а C — антицепь частично упорядоченного множества $\langle \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\}))\setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}},\subseteq\rangle$, образуют взаимно однозначное соответствие между множествами всех верхних конусов $\langle \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\})),\subseteq\rangle$, включающих Axm, и всех антицепей $\langle \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\}))\setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}},\subseteq\rangle$.

Лемма 2. $g(\Re_-(C))=\Re_+(g(C))$ *для любой антицепи* C *частично упорядоченного множества* $\langle \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\}))\setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}},\subseteq\rangle$.

Доказательство. Включение $g(\Re_-(C))\subseteq\Re_+(g(C))$ доказывается непосредственно. Для доказательства обратного возьмем произвольную $\Sigma\in\Re_+(g(C))$. Рассмотрим следующие два случая:

1) $\Sigma\in \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}$.

Тогда, $\Sigma\in g(\Re_-(C))$;

2) $\Sigma\notin \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}$.

Рассмотрим следующие два случая:

а)$\Sigma\in g(C)$.

Тогда, $\Sigma\in C{\uparrow_{\subseteq}}$. Поэтому, существует такая $\Sigma'\in C$, что $\Sigma'\subseteq\Sigma$. Тем самым, существует такая $\Sigma''\in\Re_-(C)$, что $\Sigma''\subseteq\Sigma'$. Поэтому, $\Sigma\in g(\Re_-(C))$;

б) $\Sigma\notin g(C)$.

Тогда существует такая $\Sigma'\in \mathrm{Cut}(g(C)^2)$, что $\Sigma'\subseteq\Sigma$. Поэтому существуют такие Φ, $\Psi\in g(C)$, что $\Sigma'\in \mathrm{Cut}(\Phi,\Psi)$. Применяя теорему 1 [1] при $L'=\varnothing$ и $W=\{p_1,\ldots,p_n\}$, получаем $\mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}=\mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}(\varnothing)\bigcap \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\}))$. Поскольку данное множество замкнуто относительно сечений, $\{\Phi,\Psi\}\not\subseteq \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}$. Пусть $\Phi=\Gamma\vdash\Delta$, $\Psi=\Theta\vdash\Xi$ и $\Sigma'= =\Gamma\bigcup(\Theta\setminus\{\varphi\})\vdash(\Delta\setminus\{\varphi\})\bigcup\Xi$, где $\varphi\in\Delta\bigcap\Theta$. Учитывая (1), Σ и, следовательно, Σ' иррефлексивна. От противного докажем, что как Φ, так и Ψ также иррефлексивны. Предположим, что одна из данных секвенций (без ограничения общности можно считать, что Φ) рефлексивна. Тогда, в силу иррефлексивности Σ', $\varphi\in\Gamma$ и, тем самым, $\Psi\subseteq\Sigma$, что противоречит тому, что $\Sigma\notin g(C)$. Таким образом, Φ и Ψ иррефлексивны. Поэтому существуют такие $\Phi'=\Gamma'\vdash\Delta'\subseteq\Phi$ и $\Psi'=\Theta'\vdash\Xi'\subseteq\Psi$, что $\langle\Phi',\Phi'\rangle\in C^2\bigcup(C\times \mathrm{Min}_{\subseteq}(\widetilde{\mathrm{Axm}}))\bigcup(\mathrm{Min}_{\subseteq}(\widetilde{\mathrm{Axm}})\times C)$. От противного докажем, что $\varphi\in\Delta'\bigcap\Theta'$. Предположим, что $\varphi\notin\Delta'\bigcap\Theta'$. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi\notin\Delta'$. Тогда $\Phi'\subseteq\Sigma$, что противоречит тому, что $\Sigma\notin g(C)$. Таким образом, $\varphi\in\Delta'\bigcap\Theta'$. Тогда $\Sigma\supseteq\Gamma'\bigcup(\Theta'\setminus\{\varphi\})\vdash(\Delta'\setminus\{\varphi\})\bigcup\Xi'\in g(\Re_-(C))$ и, тем самым, $\Sigma\in g(\Re_-(C))$.

Лемма 3. *Для любого* $i\in\omega$ *и любой антицепи* C *частично упорядоченного множества* $\langle \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1,\ldots,p_n\}))\setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}},\subseteq\rangle$, $\mathrm{Cut}(\pi_1(\Re^i(\langle C,\varnothing\rangle))^2\bigcup(\pi_1(\Re^i(\langle C,\varnothing\rangle))\times \mathrm{Min}_{\subseteq}(\widetilde{\mathrm{Axm}}))\bigcup \bigcup(\mathrm{Min}_{\subseteq}(\widetilde{\mathrm{Axm}})\times\pi_1(\Re^i(\langle C,\varnothing\rangle))))\subseteq(\pi_0(\Re^i(\langle C,\varnothing\rangle))\bigcup\pi_1(\Re^i(\langle C,\varnothing\rangle))\bigcup \mathrm{Axm}){\uparrow_{\subseteq}}$.

Доказательство. Индукцией по i. При $i=0$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что оно верно при $i=j\in\omega$. Докажем его истинность при $i=j+1$. Положим $M:=\mathrm{Min}_{\subseteq}(\widetilde{\mathrm{Axm}})$ и $C^r_s:=\pi_s(\Re^r(\langle C,\varnothing\rangle))$, где $r\in\{j,j+1\}$ и $s\in 2$. Заметим, что $C^{j+1}_1\subseteq \subseteq C^j_0\bigcup C^j_1$. Кроме того, для любого частично упорядоченного множества $\langle P,\leqslant\rangle$ и любых E, $B\subseteq P$, $E{\uparrow_{\leqslant}}\setminus B{\uparrow_{\leqslant}}\subseteq(E\setminus B{\uparrow_{\leqslant}}){\uparrow_{\leqslant}}$. Поэтому, учитывая индукционное предположение, мы имеем $\mathrm{Cut}((C^{j+1}_1)^2\bigcup(C^{j+1}_1\times M)\bigcup(M\times C^{j+1}_1))\subseteq \mathrm{Cut}((C^j_0)^2\bigcup(C^j_0\times(C^j_1\bigcup M))\bigcup((C^j_1\bigcup M)\times \times C^j_0))\bigcup(C^j_0\bigcup C^j_1\bigcup \mathrm{Axm}){\uparrow_{\subseteq}}\subseteq C^{j+1}_0{\uparrow_{\subseteq}}\bigcup(C^j_0\bigcup C^j_1){\uparrow_{\subseteq}}\bigcup \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}\subseteq C^{j+1}_0{\uparrow_{\subseteq}}\bigcup C^{j+1}_1{\uparrow_{\subseteq}}\bigcup \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}$.

Лемма 4. *Для любого $i \in \omega$ и любой антицепи C частично упорядоченного множества $\langle \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\})) \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}, \subseteq \rangle$,*

$$\Re^{i+1}(\langle C, \varnothing \rangle) = \langle \Re_{-}^{i+1}(C) \setminus \Re_{-}^{i}(C), \Re_{-}^{i+1}(C) \bigcap \Re_{-}^{i}(C) \rangle. \tag{3}$$

Доказательство. Путем доказательства индукцией по $j \in \omega$ того факта, что

$$\pi_0(\Re^j(\langle C, \varnothing \rangle)) \bigcup \pi_1(\Re^j(\langle C, \varnothing \rangle)) = \Re_{-}^{j}(C). \tag{4}$$

При $j = 0$ равенство (4) очевидно. Предположим, что (4) верно при $j = i$. Докажем истинность (4) при $j = i + 1$. По лемме 3 и индукционному предположению мы имеем $\Re^{i+1}(\langle C, \varnothing \rangle) = \Re(\langle \pi_0(\Re^i(\langle C, \varnothing \rangle)) \bigcup \pi_1(\Re^i(\langle C, \varnothing \rangle)), \varnothing \rangle) = \Re(\langle \Re_{-}^{i}(C), \varnothing \rangle)$. Кроме того, непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что для любого частично упорядоченного множества $\langle P, \leqslant \rangle$, любой его антицепи E и любых H, $B \subseteq P$, $\mathrm{Min}_{\leqslant}(B \setminus (E \bigcup H){\uparrow_{\leqslant}}) = \mathrm{Min}_{\leqslant}(E \bigcup (B \setminus H{\uparrow_{\leqslant}})) \setminus E$ и $E \setminus (B \setminus (E \bigcup H){\uparrow_{\leqslant}}){\uparrow_{\leqslant}} = \mathrm{Min}_{\leqslant}(E \bigcup (B \setminus H{\uparrow_{\leqslant}})) \bigcap E$. Тем самым, мы получаем (3), что непосредственно дает (4) при $j = i + 1$.

Лемма 5. *Для любого верхнего конуса $U \supseteq \mathrm{Axm}$ частично упорядоченного множества $\langle \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\})), \subseteq \rangle$ существует такое $j \in \omega$, что $\Re_{+}^{j+1}(U) = \Re_{+}^{j}(U) = \mathrm{Cn}_{\mathsf{M}}(U) \bigcap \mathrm{Seq}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\}))$.*

Доказательство. Так как множество $\mathrm{Seq}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\}))$ конечно и $U \subseteq \Re_{+}(U)$, существует такое $j \in \omega$, что $\Re_{+}^{j+1}(U) = \Re_{+}^{j}(U)$. При этом $U \bigcup \mathrm{Axm} \subseteq \Re_{+}^{j}(U)$, а $\Re_{+}^{j}(U)$ замкнуто относительно структурных $\Im(\{p_1, \ldots, p_n\})$-правил. С другой стороны, всякий элемент $\Re_{+}^{j}(U)$ выводим из U с помощью структурных $\Im(\{p_1, \ldots, p_n\})$-правил. Тем самым лемма 1 завершает доказательство.

Из замечания 1 и лемм 2, 4 и 5 непосредственно вытекает

Теорема 1. *Для любого $S \subseteq \widetilde{\mathrm{Seq}}(\Im(\{p_1, \ldots, p_n\}))$ существует такое (наименьшее) $j \in \omega$, что $\pi_0(\Re^j(\langle \mathrm{Min}_{\subseteq}(S \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}), \varnothing \rangle)) = \varnothing$. При этом $\pi_1(\Re^j(\langle \mathrm{Min}_{\subseteq}(S \setminus \mathrm{Axm}{\uparrow_{\subseteq}}), \varnothing \rangle)) = \mathbf{M}(S)$.*

Вычислительные эксперименты, проведенные в системе SWI-Prolog для различных известных многозначных логик, показали, что вычисления с использованием оператора $\Re$ в соответствии с теоремой 1 примерно на два порядка эффективнее, чем при непосредственном вычислении множества $\mathbf{M}(S)$, что оправдывает вышеизложенную разработку. Примечательным является также то, что во всех рассмотренных примерах множество $\mathbf{R}(S)$ оказывалось пустым, что полностью исключало перебор на шаге *6* вышеописанной процедуры и делало ее шаг *1* настолько критическим в плане ее вычислительной сложности. Это демонстрирует адекватность вычислительной стратегии, предложенной в настоящей работе и, кроме того, объясняет тот любопытный факт, что исчисления, полученные с помощью нашей процедуры, совпали с теми, которые были найдены ранее эвристическим путем, ведь $\mathbf{T}(S)$ определяется однозначно при $\mathbf{R}(S) = \varnothing$, а выбор минимального исчисления естественен с исследовательской точки зрения.

Предложение 1 и теорема 1 дают не только вычислительное средство минимизации правил исчислений для многозначных логик, но и методику эвристического доказательства минимальности правил заданного исчисления. Например, когда $\mathsf{M} = \{\mathcal{M}\}$, а $\mathcal{M}$ — классическая логика, для секвенциальной таблицы, соответствующей исчислению Генцена [5, 6], имеют место равенства $\mathbf{T}(S) = \mathbf{K}(S) = \mathbf{Q}(S) = \mathbf{P}(S) = \mathbf{M}(S) = S$ и $\mathbf{R}(S) = \varnothing$. Тем самым, исчисление Генцена оптимально. Аналогичная ситуация имеет место для четырехзначных логик и исчислений, рассмотренных в работе [7].

1. *Пынько А. П.* Процедуры вывода в секвенциальных исчислениях для конечнозначных логик с определителем равенства // Доп. НАН України. – 2007. – № 3. – С. 45–51.
2. *Пынько А. П.* Секвенциальные исчисления для конечнозначных логик с определителем равенства // Там само. – 2003. – № 8. – С. 69–75.
3. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. – Москва: Наука, 1986. – 384 с.
4. *Пынько А. П.* Производные правила секвенциальных исчислений для конечнозначных логик с определителем равенства // Доп. НАН України. – 2008. – № 4. – С. 51–54.
5. *Gentzen G.* Untersuchungen über das logische Schließen (I) // Math. Zeit. – 1934. – **39**. – P. 176–210.
6. *Gentzen G.* Untersuchungen über das logische Schließen (II) // Ibid. – P. 405–431.
7. *Pynko A. P.* Functional completeness and axiomatizability within Belnap's four-valued logic and its expansions // J. of Appl. Non-Classical Logics. – 1999. – **9**, No 1. – P. 61–105.

Институт кибернетики им. В. М. Глушкова
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 10.12.2010

A. P. Pynko

Optimization of sequent calculi for finitely-valued logics with equality determinant

An effective procedure of minimization of the number of premises for the introduction rules of sequent calculi for propositional finitely-valued logics with equality determinant is proposed.