УДК 539

В. И. Гололобов

Осесимметричные резонансные колебания гибкой шарнирно опертой вязкоупругой пластины с пьезослоями

(Представлено академиком НАН Украины Ю. Н. Шевченко)

С применением метода Бубнова–Галеркина рассмотрена задача о вынужденных резонансных колебаниях круглой гибкой вязкоупругой пластины при электромеханическом нагружении. Приведены результаты расчета резонансных характеристик пластины с двумя пьезопреобразователями с учетом геометрической нелинейности.

Для уменьшения интенсивности вибраций конструктивных элементов широко применяются демпфирующие материалы. Наряду с этим, нанесение пьезослоев на поверхности пластин и использование их в качестве электромеханических преобразователей дает возможность оказывать дополнительное воздействие с целью частичной компенсации вибронагрузок и таким образом осуществлять управление интенсивностью колебаний электрическим путем.

В работе рассматривается задача о колебаниях тонкой пластинки под поперечной нагрузкой, синусоидально изменяющейся во времени в области частот, близких к резонансной. Трехслойная пластина радиусом a с вязкоупругим внутренним слоем толщиной h имеет два наружных пьезокерамических слоя толщиной δ. Эти слои поляризованы в осевом направлении и на их поверхности нанесены круговые электроды, к которым приложено компенсационное электрическое напряжение, синусоидально изменяющееся во времени и совпадающее по частоте с основной нагрузкой.

Отнесем сечение пластины к осям r и γ, где ось γ направлена параллельно оси вращения, совместив начало координат с точкой пересечения оси вращения со срединной плоскостью основного слоя. Электрическое напряжение амплитуды V приложено к пьезослоям таким образом, что возникающие в защемленном элементе пластины механические напряжения эквивалентны моменту M_e. Нагрузки представим в виде

$$p(r,t) = p_1(t)p_0(r), \qquad M_e(r,t) = m_1(t)[H(r) - H(r - r_2)],$$

где $H(r)$ — единичная ступенчатая функция; при $r_2 = a$ выражение для M_e представляет равномерно распределенную по площади пластины электрическую нагрузку.

Обозначим через $u(r)$ и $w(r)$ амплитуды перемещений точек срединной поверхности основного слоя в направлении осей r и γ.

При вибрационном возбуждении колебаний пластинки в околорезонансной области поперечные перемещения не будут малыми по сравнению с толщиной и для описания динамического процесса используется геометрически нелинейная теория изгиба пластин. При этом влияние пьезоэлектрических слоев учитывается на основе предположения о независимости электрической индукции от толщинной координаты. Вследствие этого для вычислении жесткостных характеристик элемента пластинки в случае растяжении используется жесткостная характеристика пьезоматериала для плоского напряженного состояния c_{11}^E, а в случае изгиба — приведенная жесткость материала [1]

$$c = c_{11}^E + \frac{e^2}{\varepsilon}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{h^2 + 2h\delta + \delta^2}{\frac{3}{4}h^2 + \frac{3}{2}h\delta + \delta^2}\right),$$

где величины c_{11}^E, e и ε определяются по стандартным характеристикам пьезоматериала [2]

$$c_{11}^E = \frac{s_{11}^E}{(s_{11}^E)^2 - (s_{12}^E)^2}, \qquad e = \frac{d_{31}}{s_{11}^E + s_{12}^E}, \qquad \varepsilon = \varepsilon_{33}^T - 2d_{31}e.$$

Представим свойства материала вязкоупругого слоя в виде [3]

$$\sigma(t) = E_0\varepsilon(t) + \int\limits_0^t \varepsilon(\tau)\frac{dE(t-\tau)}{d(t-\tau)}d\tau = E_0\overline{E} * \varepsilon(t),$$

где E_0 — мгновенный модуль; $E(t)$ — релаксационный модуль.

Считая, что коэффициент ν принимает одинаковые значения для всех слоев, определяющие соотношения для элемента пластины можно записать в виде

$$N_r = (D''_N + D'_N\overline{E}*)(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta), \qquad M_r = (D''_M + D'_M\overline{E}*)(\kappa_r + \nu\kappa_\theta) + M_e,$$
$$N_\theta = (D''_N + D'_N\overline{E}*)(\nu\varepsilon_r + \varepsilon_\theta), \qquad M_\theta = (D''_M + D'_M\overline{E}*)(\nu\kappa_r + \kappa_\theta) + M_e,$$

где

$$D'_N = \frac{E_0h}{1-\nu^2}, \qquad D'_M = \frac{E_0h^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad D''_N = 2c_{11}^E\delta,$$
$$D''_M = \frac{2}{3}c\left[\left(\frac{h}{2} + \delta\right)^3 - \left(\frac{h}{2}\right)^3\right], \qquad \nu = -\frac{s_{12}^E}{s_{11}^E}, \qquad M_e = e(\delta + h)V.$$

Остальные уравнения геометрически нелинейной теории колебаний пластинки [4] имеют вид:

геометрические

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \qquad \kappa_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \qquad \kappa_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}, \qquad \vartheta = -\frac{\partial w}{\partial r},$$

уравнений движения

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM_r) = \frac{1}{r}M_\theta + Q,$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(Q + N_r\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right] = \overline{\rho}h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p,$$
$$\frac{\partial}{\partial r}(rN_r) = N_\theta,$$

где $\overline{\rho}h = \rho_1 h + 2\rho_2\delta$ — удельная масса элемента пластинки. Здесь не учитывается составляющая сил инерции, действующая в плоскости пластинки.

Введем безразмерные величины

$$r = a\rho, \quad h = a\widehat{h}, \quad w = a\widehat{w}, \quad \sigma = E_0\widehat{\sigma}, \quad p = E_0 q, \quad \kappa_r = \frac{1}{a}\widehat{\kappa}_\rho, \quad \kappa_\theta = \frac{1}{a}\widehat{\kappa}_\theta,$$

$$E = E_0\widehat{E}, \quad \tau = \sqrt{\frac{E_0}{\overline{\rho} h a}}t, \quad \omega t = \widehat{\omega}\tau, \quad Q = E_0 a\widehat{Q}, \quad N_r = E_0 a\widehat{N}_\rho, \quad N_\theta = E_0 a\widehat{N}_\theta,$$

$$M_r = E_0 a^2\widehat{M}_\rho, \quad M_\theta = E_0 a^2\widehat{M}_\theta, \quad M_e = E_0 a^2\widehat{M}_e, \quad D'_N = E_0 a\widehat{D}'_N, \quad D'_M = E_0 a^3\widehat{D}'_M.$$

Исключив Q из уравнений движения, преобразуем полученное уравнение

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial(rM_r)}{\partial r} - M_\theta\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[(rN_r)\frac{\partial w}{\partial r}\right] - \overline{\rho} h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p(r,t) = 0$$

и остальные исходные уравнения к виду

$$\left(\widehat{D}''_M + \widehat{D}'_M\overline{E}*\right)\Delta\Delta\widehat{w} - \left(\widehat{N}_\vartheta\frac{1}{\rho}\frac{\partial\widehat{w}}{\partial\rho} + \widehat{N}_\rho\frac{\partial^2\widehat{w}}{\partial\rho^2}\right) - \Delta\widehat{M}_e + \frac{\partial^2\widehat{w}}{\partial\tau^2} - \widehat{q}(\rho,\tau) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\widehat{N}_\theta\right) = \widehat{N}_\rho - \frac{1-\nu^2}{2}\left(\widehat{D}''_N + \widehat{D}'_N\overline{E}*\right)\left(\frac{\partial\widehat{w}}{\partial\rho}\right)^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\widehat{N}_\rho\right) = \widehat{N}_\theta,$$

где Δ — оператор $\dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho}$.

Граничные условия для шарнирного опирания наружного контура имеют вид

$$\text{при} \quad r = 0 \quad Q = \vartheta = 0, \quad N_\theta = N_r,$$

$$\text{при} \quad r = a \quad w = M_r = 0, \quad N_r = 0 \quad (N_\theta - \nu N_r = u = 0).$$

В [5] для получения приближенного решения такой системы интегро-дифференциальных уравнений в области частот, близких к резонансной частоте, используется подход, основанный на последовательном применении метода Бубнова–Галеркина и метода гармонического баланса. На первом этапе на основе приближенного представления резонансной формы колебаний в виде трехчленной полиномиальной функции методом Бубнова–Галеркина задача приводится к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению относительно амплитуды.

Следуя в общем этой методике, представим прогиб пластинки в околорезонансной области в виде

$$\widehat{w} \approx \eta(\tau)\widehat{w}_1(\rho),$$

взяв за основу первую резонансную форму изгибных колебаний $\widehat{w}_1(\rho)$ для соответствующей однородной электроупругой задачи

$$(\widehat{E}_1\widehat{D}'_M + \widehat{D}''_M)\Delta\Delta\widehat{w} + \widehat{\omega}^2\widehat{w} = 0$$

при тех же граничных условиях. Здесь $\widehat{E}_1(\omega)$ — действительная часть комплексного модуля. Определение $\widehat{w}_1(\rho)$ проводится численно и в таком виде используется в дальнейшем. Принято, что $\widehat{w}_1(0) = 1$.

Из уравнений плоской задачи видно, что усилия при этом будут иметь вид

$$\widehat{N}_\theta = N'_\theta(\rho)\left(\frac{D''_N}{D'_N} + \overline{E}*\right)\eta^2(\tau), \qquad \widehat{N}_\rho = N'_\rho(\rho)\left(\frac{D''_N}{D'_N} + \overline{E}*\right)\eta^2(\tau),$$

где N'_ρ и N'_θ являются численным решением краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho N'_\theta) = N'_\rho - \frac{1-\nu^2}{2}\widehat{D}'_N\left(\frac{\partial\widehat{w}_1(\rho)}{\partial\rho}\right)^2, \qquad \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho N'_\rho) = N'_\theta,$$

$$N'_\theta - N'_\rho = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 0 \qquad \text{и} \qquad N'_\theta - \nu N'_\rho = 0 \qquad \text{или} \qquad N'_\rho = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1.$$

С учетом этого представления прогиба и усилий проинтегрируем по площади уравнение изгиба, предварительно умноженное на $\widehat{w}_1(\rho)$.

Полученное уравнение нелинейного осциллятора описывает вынужденные колебания системы вблизи резонансной частоты

$$u_2\ddot{\eta} + \frac{\widehat{\omega}_1^2}{(\widehat{D}''_M + \widehat{D}'_M\widehat{E}_1)}u_2(\widehat{D}''_M + \widehat{D}'_M\overline{E}*)\eta - u_3\eta\left(\frac{D''_N}{D'_N} + \overline{E}*\right)\eta^2 = \overline{Q},$$

где

$$u_1 = \int_0^1 \widehat{w}_1\rho d\rho, \qquad u_2 = \int_0^1 \widehat{w}_1\widehat{w}_1\rho d\rho, \qquad u_3 = \int_0^1 \left(\widehat{N}_\theta\frac{1}{\rho}\frac{\partial\widehat{w}_1}{\partial\rho} + \widehat{N}_\rho\frac{\partial^2\widehat{w}_1}{\partial\rho^2}\right)\widehat{w}_1\rho d\rho,$$

$$\overline{Q} = q_1(\tau)u_q + m_1(\tau)u_E, \qquad u_q = \int_0^1 q_0(\rho)\widehat{w}_1\rho d\rho,$$

$$u_E = \frac{1}{m_1(\tau)}\int_0^1 \Delta\widehat{M}_e(\rho)\widehat{w}_1\rho d\rho = \frac{1}{m_1(\tau)}\lim_{\rho_1\to 1}\int_0^{\rho_1} \Delta\widehat{M}_e(\rho)\widehat{w}_1\rho d\rho = -\widehat{\vartheta}_1(1).$$

Пусть $q_1(\tau) = (q'\cos\widehat{\omega}\tau - q''\sin\widehat{\omega}\tau)$, $m_1(\tau) = (M'\cos\widehat{\omega}\tau - M''\sin\widehat{\omega}\tau)$. Тогда уровень общей электромеханической нагрузки на осциллятор будет

$$\overline{Q} = \overline{q}'\cos\widehat{\omega}\tau - \overline{q}''\sin\widehat{\omega}\tau,$$

где $\overline{q}' = (q'u_q + M'u_E)$, $\overline{q}'' = (q''u_q + M''u_E)$.

Отсюда видно, что при известной механической нагрузке уровнем возбуждения можно управлять электрическим способом путем выбора параметров M' и M'' или амплитуды электрического напряжения.

В соответствии с методом гармонической линеаризации для слабонелинейных задач используется представление амплитуды прогиба в виде гармонической функции времени, соответствующей закону изменения внешней нагрузки

$$\eta(\tau) = \eta'\cos\widehat{\omega}\tau - \eta''\sin\widehat{\omega}\tau.$$

На таких историях деформации определяющие соотношения между деформациями и напряжениями формулируются с помощью комплексных модулей, и интегральные операторы принимают вид

$$\overline{E} * (\cos\widehat{\omega}\tau) = \widehat{E}_1\cos\widehat{\omega}\tau - \widehat{E}_2\sin\widehat{\omega}\tau,$$

$$\overline{E} * (\sin\widehat{\omega}\tau) = \widehat{E}_2\cos\widehat{\omega}\tau + \widehat{E}_1\sin\widehat{\omega}\tau, \qquad \overline{E} * (1) = \widehat{E}_\infty,$$

$$\overline{E} * (\cos^2\widehat{\omega}\tau) = \frac{1}{2}\widehat{E}_\infty + \frac{1}{2}\widehat{E}_{11}\cos 2\widehat{\omega}\tau - \frac{1}{2}\widehat{E}_{22}\sin 2\widehat{\omega}\tau,$$

$$\overline{E} * (\sin^2\widehat{\omega}\tau) = \frac{1}{2}\widehat{E}_\infty - \frac{1}{2}\widehat{E}_{11}\cos 2\widehat{\omega}\tau + \frac{1}{2}\widehat{E}_{22}\sin 2\widehat{\omega}\tau.$$

Здесь E_∞ — длительный модуль вязкоупругого материала; E_1 и E_2 — компоненты комплексного модуля при частоте колебаний $\widehat{\omega}$, а E_{11} и E_{22} — компоненты комплексного модуля при частоте колебаний $2\widehat{\omega}$.

Представив нелинейный член в уравнении осциллятора двумя элементами из его разложения в ряд Фурье, а именно членами с $\sin\widehat{\omega}\tau$ и $\cos\widehat{\omega}\tau$, получим систему двух уравнений

$$(\widehat{\omega}_c^2 - \widehat{\omega}^2)\eta' + \left(-\frac{\widehat{E}_2}{\widehat{E}_1 + D''_M/D'_M}\widehat{\omega}_1^2 - \frac{u_3}{u_2}\widehat{E}_{22}\frac{|\eta|^2}{4}\right)\eta'' = \frac{\overline{q}'}{u_2},$$

$$\left(-\frac{\widehat{E}_2}{\widehat{E}_1 + D''_M/D'_M}\widehat{\omega}_1^2 - \frac{u_3}{u_2}\widehat{E}_{22}\frac{|\eta|^2}{4}\right)\eta' - (\widehat{\omega}_c^2 - \widehat{\omega}^2)\eta'' = \frac{\overline{q}''}{u_2},$$

где

$$\widehat{\omega}_c^2 = \widehat{\omega}_1^2 + \xi|\eta|^2, \qquad \xi = \frac{u_3}{2u_2}\left(E_\infty + \frac{D''_N}{D'_N} + \frac{1}{2}\left(E_{11} + \frac{D''_N}{D'_N}\right)\right) -$$

уравнение скелетной кривой, представляющей зависимость квадрата собственной частоты колебаний консервативной системы от амплитуды.

Возводя эти уравнения в квадрат и складывая, получаем

$$\left[(\widehat{\omega}_c^2 - \widehat{\omega}^2)^2 + \left(-\frac{\widehat{E}_2}{\widehat{E}_1 + D''_M/D'_M}\widehat{\omega}_1^2 - \frac{u_3}{u_2}\widehat{E}_{22}\frac{|\eta|^2}{4}\right)^2\right]|\eta|^2 = \frac{(\overline{q}')^2 + (\overline{q}'')^2}{u_2^2}$$

или

$$\widehat{\omega}^2 = \widehat{\omega}_1^2 + \xi|\eta|^2 \pm \sqrt{\frac{(\overline{q}')^2 + (\overline{q}'')^2}{u_2^2|\eta|^2} - \left(\frac{\widehat{E}_2}{\widehat{E}_1 + D''_M/D'_M}\widehat{\omega}_1^2 + \frac{u_3}{u_2}\widehat{E}_{22}\frac{|\eta|^2}{4}\right)^2}.$$

Приняв в околорезонансной области значения компонентов комплексных модулей не зависящими от частоты и для E_1, E_2 отнесенными к частоте ω_1, а E_{11}, E_{22} — к частоте $2\omega_1$, последнее выражение можем рассматривать как зависимость квадрата частоты от амплитуды.

В качестве примера применения изложенной методики рассмотрим установившиеся осесимметричные колебания шарнирно опертой трехслойной пластинки при следующих значениях параметров: $a = 0{,}1$ м, $h = 0{,}0025$ м, $\delta = 0$, $\rho_2 = 2500$ кг/м^3. Материал пьезослоев

$PZT-4$, а свойства вязкоупругого материала основного слоя определяются стандартной моделью вязкоупругого тела и характеризуются значениями модулей $E_0 = 1{,}1 \cdot 10^{11}$ Па, $E_\infty = 10^{11}$ Па и постоянной времени в релаксационном процессе $p_1 = 10^{-6}$ с. Решение краевых задач и определение коэффициентов уравнения, описывающего колебания осциллятора, проводилось численными методами. Первая собственная частота электроупругой пластинки с короткозамкнутыми электродами $\widehat{\omega}_1 = 0{,}00587$. Колебания возбуждаются равномерно распределенной по площади пластины электромеханической нагрузкой с амплитудой, эквивалентной 140 Па механической нагрузки. При этом относительный прогиб пластинки w/h равен 0,94, резонансная кривая имеет характерный для жесткой нелинейности вид и область неоднозначности при $\widehat{\omega}/\widehat{\omega}_1 = 1{,}003$.

1. *Гололобов В. И.* Соотношения упругости для многослойных пьезокерамических пластин // Докл АН УССР. Сер. А. – 1983. – № 11. – С. 38–40.
2. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
3. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. – Москва: Мир, 1974. – 338 с.
4. *Григоренко Я. М., Мукоед А. П.* Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища шк., 1983. – 286 с.
5. *Карнаухов В. Г., Карнаухова Т. В., Зражевская В. Ф.* Активное демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой пластины при помощи пьезоактуаторов // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 114–123.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.01.2012

В. І. Гололобов

Осесиметричні резонансні коливання гнучкої шарнірно опертої в’язкопружної пластини з п’єзошарами

Із застосуванням методу Бубнова–Гальоркіна розглянуто задачу про вимушені резонансні коливання круглої гнучкої в’язкопружної пластини при електромеханічному навантаженні. Наведено результати розрахунку резонансних характеристик пластини з двома п’єзоперетворювачами з урахуванням геометричної нелінійності.

V. I. Gololobov

Axisymmetric resonance vibrations of a flexible hindged viscoelastic laminated piezoelectric plate

By the Bubnov–Galerkin method, the problem of forced resonance vibrations of a flexible circular viscoelastic plate under an electromechanical load is considered. The results of calculations of the resonance characteristics of a plate with two piezoelectric transducers with regard for a geometric nonlinearity are presented.