УДК 517.9

К. С. Халіна

Про керованість крайовими умовами Діріхле для неоднорідної струни на півосі

(Представлено академіком НАН України Є. Я. Хрусловим)

Розглянуто рівняння коливання неоднорідної струни на півосі з потенціалом, що не дорівнює сталій, та з керуванням класу L^∞ на лівому кінці. Задачу керованості розглянуто в просторах Соболева. Одержано достатні умови 0- та ε-керованості за вільний час $T > 0$. Керування знайдено в явному вигляді.

Розглянемо керовану систему на півосі з початковими умовами

$$w_{tt}(x,t) = w_{xx}(x,t) - q(x)w(x,t), \qquad x \in (0,+\infty), \qquad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$w(0,t) = u(t), \qquad t \in (0,T), \tag{2}$$

$$w(x,0) = W_0^0(x), \qquad w_t(x,0) = W_1^0(x), \qquad x \in (0,+\infty), \tag{3}$$

де $T > 0$, u — керування таке, що $u \in L^\infty(0,T)$, а потенціал q задовольняє умови

$$q \in C[0,\infty) \bigcap L^\infty[0,\infty), \qquad \int\limits_0^\infty x|q(x)|\,dx < \infty. \tag{4}$$

У роботі вивчаються питання 0- та ε-керованості для системи (1)–(3) за вільний час T. Крайову керованість у скінченних областях для випадку $q \neq 0$, взагалі кажучи, добре вивчено в [1–6]. На півосі одержано результати для випадку $q = 0$ за вільний час [7, 8] та для випадку $q = \mathrm{const} \geqslant 0$ за фіксований та вільний час [9, 10]. Зауважимо, що випадок $q \neq \mathrm{const}$ потребує інших методів дослідження, ніж у [7–10]. Одержані результати сформульовані у теоремах 5 та 6.

У роботі будемо розглядати такі простори [11; 12, гл. 1]:

$$\mathcal{S} = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})\colon \forall\, m,l \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}\ \exists\, C_{ml} > 0\colon \forall\, x \in \mathbb{R}\ |\ \varphi^{(m)}(x)(1+|x|^2)^l| \leqslant C_{ml}\},$$

$\mathcal{S}'$ — простір узагальнених функцій над $\mathcal{S}$,

$$H_l^s = \{f \in \mathcal{S}'\colon (1+x^2)^{l/2}(1+|D|^2)^{s/2}f \in L^2(\mathbb{R})\}, \qquad D = -\frac{id}{dx}, \qquad s,l \in \mathbb{R},$$

$$H_{l,o}^s = \{f \in H_l^s\colon f \text{ — непарна}\}, \qquad \mathbb{H}_{l,o}^s = H_{l,o}^s \times H_{l,o}^{s-1},$$

$$\|f\|_l^s = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |(1+x^2)^{l/2}(1+|D|^2)^{s/2}f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

1. Постановка задачі. Нехай $W^0 = \begin{pmatrix} W_0^0 \\ W_1^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_{0,o}^0$. Розв'язки системи (1)–(3) розглядаються в просторі H_0^0. Позначимо Q — парне продовження q, а $W(\cdot,t)$ — непарне продовження $w(\cdot,t)$, $t \in (0,T)$. Очевидно, що $W(\cdot,t) \in H^0_{0,o}$, $(t \in (0,T))$. Легко побачити, що непарне продовження розв'язку системи (1)–(3) буде розв'язком системи

$$W_{tt}(x,t) = W_{xx}(x,t) - Q(x)W(x,t) - 2u(t)\delta'(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad t \in (0,T), \tag{5}$$

$$W(x,0) = W^0_0(x), \qquad W_t(x,0) = W^0_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

де δ — дельта-функція Дірака, $\delta = H'$, H — функція Хевісайда.

Для заданих $T > 0$ та $W^0 \in \mathbb{H}^0_{0,o}$ через $\mathcal{R}_T(W^0)$ позначимо множину $h \in \mathbb{H}^0_{0,o}$ таких, що існує $u \in L^\infty(0,T)$ таке, що розв'язок системи (5), (6) задовольняє умову $\begin{pmatrix} W(\cdot,T) \\ W_t(\cdot,T) \end{pmatrix} = h$.

Означення 1. Стан $W^0 \in \mathbb{H}^0_{0,o}$ називається 0-керованим відносно системи (5), (6), якщо 0 належить $\bigcup\limits_{T>0} \mathcal{R}_T(W^0)$, та ε-керованим відносно системи (5), (6), якщо 0 належить замиканню $\bigcup\limits_{T>0} \mathcal{R}_T(W^0)$ у $\mathbb{H}^0_{0,o}$.

Для подальшого дослідження використовуються оператори перетворення, які зберігають на нескінченності асимптотику розв'язку рівняння Штурма–Ліувілля [13, гл. 3]. У наступному пункті розглядається їх продовження у простори $H^s_{0,o}$, $s = 0, -1, -2$.

2. Оператори перетворення. Визначимо оператори $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^{-1}\colon H^0_{0,o} \to H^0_{0,o}$, $D(\mathcal{M}) = D(\mathcal{M}^{-1}) = H^0_{0,o}$, за формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{M}f(x) &= f(x) + \operatorname{sign} x \int\limits_{|x|}^{\infty} \mathtt{M}(|x|,t)f(t)\,dt, \\ \mathcal{M}^{-1}g(x) &= g(x) + \operatorname{sign} x \int\limits_{|x|}^{\infty} \mathtt{N}(|x|,t)g(t)\,dt, \end{aligned} \tag{7}$$

де f, $g \in H^0_{0,o}$, $\mathtt{M}(\xi,\eta)$ та $\mathtt{N}(\xi,\eta)$ — ядра операторів, $(\xi,\eta) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$, такі, що $\mathtt{M}(\xi,\eta) = \mathtt{N}(\xi,\eta) = 0$, коли $\eta < \xi$, і задовольняють системи [13, гл. 3]

$$\mathtt{M}_{xx}(x,t) - \mathtt{M}_{tt}(x,t) = q(x)\mathtt{M}(x,t), \quad \mathtt{N}_{xx}(x,t) - \mathtt{N}_{tt}(x,t) = -q(t)\mathtt{N}(x,t), \quad 0 < x < t, \tag{8}$$

$$\mathtt{M}(x,x) = \frac{1}{2}\int\limits_x^\infty q(\xi)\,d\xi, \qquad \mathtt{N}(x,x) = -\frac{1}{2}\int\limits_x^\infty q(\xi)\,d\xi, \qquad x \geqslant 0, \tag{9}$$

$$\lim_{x+t\to\infty} \mathtt{M}_x(x,t) = \lim_{x+t\to\infty} \mathtt{M}_t(x,t) = 0, \qquad \lim_{x+t\to\infty} \mathtt{N}_x(x,t) = \lim_{x+t\to\infty} \mathtt{N}_t(x,t) = 0. \tag{10}$$

Позначимо $\sigma(x) = \int\limits_x^\infty |q(\xi)|d\xi$, $\sigma_1(x) = \int\limits_x^\infty \sigma(\xi)\,d\xi$, $x \in [0,\infty)$. Завдяки умовам (4) можна довести, що $\sigma \leqslant \sigma(0) < \infty$, $\sigma_1 \leqslant \sigma_1(0) < \infty$ на $[0,\infty)$, та такі оцінки:

$$|\mathtt{M}(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{2\sigma_1(0)}, \qquad |\mathtt{N}(x,t)| \leqslant \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{2\sigma_1(0)}, \qquad 0 < x < t,$$

$$|\mathtt{M}'_z(x,t)| \leqslant \frac{1}{4}\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}\sigma(x)\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{2\sigma_1(0)}, \qquad 0 < x < t, \qquad z = x,t,$$

$$|\mathtt{N}'_z(x,t)| \leqslant \frac{1}{4}\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}\sigma(x)\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{2\sigma_1(0)}, \qquad 0<x<t, \qquad z=x,t.$$

Користуючись цими оцінками, можна довести неперервність $\mathcal{M}$ і $\mathcal{M}^{-1}$ у $H^0_{0,o}$. Нехай φ, $\psi \in$ $\in H^0_{0,o}$. Спряжені оператори $\mathcal{M}^*$ та $(\mathcal{M}^{-1})^*$, $D(\mathcal{M}^*) = D((\mathcal{M}^{-1})^*) = H^0_{0,o}$ діють за формулами

$$\mathcal{M}^*\psi(t) = \psi(t) + \operatorname{sign} t\int\limits_0^{|t|}\mathtt{M}(x,|t|)\psi(x)\,dx, \qquad (\mathcal{M}^{-1})^*\varphi(t) = \varphi(t) + \operatorname{sign} t\int\limits_0^{|t|}\mathtt{N}(x,|t|)\varphi(x)\,dx$$

і неперервні в $H^0_{0,o}$. Завдяки оцінкам для ядер операторів можна довести, що звуження спряжених операторів на $H^1_{0,o}$ і $H^2_{0,o}$ будуть неперервними на цих просторах. Отже, продовжені на $H^{-1}_{0,o}$ та $H^{-2}_{0,o}$ за правилом нижче оператори $\mathcal{M}$ та $\mathcal{M}^{-1}$ будуть там неперервними:

$$(\mathcal{M}f,\psi) = (f,\mathcal{M}^*\psi), \qquad (\mathcal{M}^{-1}g,\varphi) = (g,(\mathcal{M}^{-1})^*\varphi),$$
$$\text{де} \qquad f,g\in H^s_{0,o}, \qquad \varphi,\psi\in H^{-s}_{0,o}, \qquad s=-1,-2.$$

Тут області визначення $\mathcal{M}$ та $\mathcal{M}^{-1}$ охоплюють весь простір $H^s_{0,o}$, $s=-1$, -2.

Користуючись (8), (9), неважко довести таку лему:

Лема 1. *Нехай* f, $g \in H^0_{0,o}$. *Тоді* $\mathcal{M}(f'') = (\mathcal{M}f)'' - Q\mathcal{M}f - 2\delta'\int\limits_0^\infty \mathtt{M}(0,\xi)f(\xi)\,d\xi$, $\mathcal{M}^{-1}(g'') = (\mathcal{M}^{-1}g)'' + \mathcal{M}^{-1}(Qg) - 2\delta'\int\limits_0^\infty \mathtt{N}(0,\xi)g(\xi)\,d\xi$.

На підставі оцінок для ядер операторів вірною є така лема.

Лема 2. *Нехай* $f\in H^0_{0,o}$ *така, що* $f\in L^\infty(\mathbb{R})$. *Тоді* $\mathcal{M}f$, $\mathcal{M}^{-1}f\in L^\infty(\mathbb{R})$.

3. Умови керованості. Розглянемо допоміжну керовану систему

$$V_{tt}(x,t) = V_{xx}(x,t) - 2p(t)\delta'(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \qquad t\in(0,T), \tag{11}$$

$$V(x,0) = V^0_0(x), \qquad V_t(x,0) = V^0_1(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \tag{12}$$

де $V(\cdot,t)\in H^0_{0,o}$, $V^0 = \begin{pmatrix} V^0_0 \\ V^0_1\end{pmatrix} \in \mathbb{H}^0_{0,o}$, p — керування таке, що $p\in L^\infty(0,T)$.

Для заданих $T>0$ та $V^0\in\mathbb{H}^0_{0,o}$ через $\mathcal{Y}_T(V^0)$ позначимо множину $g\in\mathbb{H}^0_{0,o}$ таких, що існує $p\in L^\infty(0,T)$ таке, що розв'язок системи (11), (12) задовольняє умову $\begin{pmatrix} V(\cdot,T) \\ V_t(\cdot,T)\end{pmatrix} = g$.

Означення 2. Стан $V^0\in\mathbb{H}^0_{0,o}$ називається 0-керованим відносно системи (11), (12), якщо 0 належить $\bigcup\limits_{T>0}\mathcal{Y}_T(V^0)$, та ε-керованим відносно системи (11), (12), якщо 0 належить замиканню $\bigcup\limits_{T>0}\mathcal{Y}_T(V^0)$ у $\mathbb{H}^0_{0,o}$.

Питання керованості для системи (11), (12) досить детально вивчено в [7]. Сформульовані нижче дві теореми є окремими випадками результатів, одержаних у [7]:

Теорема 1. *Стан* $V^0\in\mathbb{H}^0_{0,o}$ *є ε-керованим відносно системи* (11), (12) *тоді і лише тоді, коли виконано умови:* (*i*) $V^0_0\in L^\infty(\mathbb{R})$, (*ii*) $V^0_1 = (\operatorname{sign} x V^0_0)'$.

Якщо, крім цього, $\int\limits_T^\infty |V_0^0(x)|^2\,dx < \varepsilon^2$ *для деяких* $T > 0$ *та* $\varepsilon > 0$*, то керування* $p =$ $= V_0^0$ *м. с. на* $(0, T)$ *є розв'язком задачі* ε*-керованості.*

Теорема 2. *Стан* $V^0 \in \mathbb{H}_{0,o}^0$ *є* 0*-керованим відносно системи* (11), (12) *тоді і лише тоді, коли умови* (i), (ii) *теореми 1 виконано та існує таке* $T > 0$, *що* $\operatorname{supp} V_0^0 \subset [-T, T]$. *За цих умов керування, що розв'язує задачу* 0*-керованості, має вигляд* $p = V_0^0$ *м. с. на* $(0, T)$.

Далі будемо використовувати поняття *значення узагальненої функції в точці* [14, гл. 1 §3]. Авторами доведено таку лему, після чого дається означення:

Лема 3 [14]. *Якщо існує границя* $g(x) = \lim\limits_{\alpha \to 0} f(\alpha x + x_0)$, *то* $g(x)$ *є сталою функцією.*

Означення 3 [14]. Значення узагальненої функції f у точці x_0 визначається за формулою $f(x_0) = \lim\limits_{\alpha \to 0} f(\alpha x + x_0)$.

Зауваження 1. У [14 гл. 1, §3] показано, що якщо узагальнена функція локально інтегровна, то її значення існують майже скрізь. При цьому значення $f(x_0)$ в узагальненому сенсі та у звичайному сенсі майже скрізь збігаються. Отже, для функцій $f \in L^2(\mathbb{R})$ під значенням $\lim\limits_{x \to +0} f(x)$ розуміємо $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(|x|)$.

Лема 4. *Нехай* $V(x, t)$ *— розв'язок системи* (11), (12). *Тоді* $V(+0, t) = p(t)$, $t \in (0, T)$.

Доведення. З [7, (18)] одержуємо

$$V(x,t) = \frac{1}{2}[V_0^0(x+t)V_0^0(x-t) + \widetilde{V}_1^0(x+t) - \widetilde{V}_1^0(x-t)] - P^t(x+t)P^t(-x+t), \tag{13}$$

де $\widetilde{V}_1^0 \in H_0^0$ — парна функція така, що $(\widetilde{V}_1^0)' = V_1^0$, $P^t(x) = p(x)[H(x) - H(x-t)]$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in (0, T)$.

Користуючись зауваженням 1 та враховуючи носії функцій $P^t(x+t)$ і $P^t(-x+t)$, непарність V_0^0 та парність $\widetilde{V}_1^0$, з (13) одержуємо твердження леми. Лему доведено.

Теорема 3. *Нехай* $V(\cdot, t) = \mathcal{M}^{-1} W(\cdot, t)$, $t \in (0, T)$, $V_j^0 = \mathcal{M}^{-1} W_j^0$, $j = 0, 1$. *Нехай також*

$$u(t) = p(t) + \int\limits_0^\infty M(0, \xi) V(\xi, t)\, d\xi, \qquad t \in (0, T), \tag{14}$$

де $V(\xi, t)$ *визначається за формулою* (13). *Тоді:*

(i) $W(x, t)$ *є розв'язком системи* (5), (6) *у тому і лише тому випадку, коли* $V(x, t)$ *є розв'язком системи* (11), (12)*;*

(ii) *Для розв'язку* $W(x, t)$ *системи* (5), (6) *вірне таке:* $W(+0, t) = u(t)$, $t \in (0, T)$.

Твердження (i) доводиться шляхом застосування $\mathcal{M}$ до системи (11), (12), леми 1 і (14) в один бік, та $\mathcal{M}^{-1}$ до системи (5), (6), леми 1, (14) і (7) в інший бік. Твердження (ii) доводиться шляхом застосування $\mathcal{M}^{-1}$ до рівняння (5), леми 1, твердження (i) цієї теореми та леми 4.

Лема 5. *Нехай для керування* u *системи* (5), (6) *виконано* (14), *де* $p \in L^\infty(0, T)$ *— керування, що розв'язує задачу* ε*-керованості для системи* (11), (12). *Тоді* $u \in L^\infty(0, T)$.

Ця лема доводиться за допомогою (14), (13) та теореми 1.

Зауваження 2. Завдяки теоремі 3 легко побачити, що звуження на $[0, \infty)$ розв'язку системи (5), (6) буде розв'язком системи (1)–(3).

Зауваження 3. З теореми 3 зрозуміло, що $\begin{pmatrix} W(\cdot, T) \\ W_t(\cdot, T) \end{pmatrix} \in \mathcal{R}_T(W^0)$ тоді, коли $\begin{pmatrix} V(\cdot, T) \\ V_t(\cdot, T) \end{pmatrix} \in$ $\in \mathcal{Y}_T(V^0)$ за умови, що відповідні керування зв'язані співвідношенням (14).

Користуючись неперервністю операторів перетворення, зауваженням 3 та лемою 5, одержуємо таку теорему.

Теорема 4. *Нехай стан* V^0 *є* ε*-керованим відносно системи* (11), (12) *за час* $T > 0$. *Тоді стан* W^0 *є* ε*-керованим відносно системи* (5), (6) *за час* $T > 0$.

З теорем 3 і 4 та леми 2 випливають достатні умови керованості для системи (5), (6), а отже, і для системи (1)–(3).

Теорема 5. *Стан* $W^0 \in \mathbb{H}^0_{0,o}$ *є* ε*-керованим відносно системи* (5), (6), *якщо виконано умови:*

(*i*) $W^0_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$;

(*ii*) $W^0_1 = \mathcal{M}(\operatorname{sign} x \mathcal{M}^{-1} W^0_0)'$.

Якщо, крім цього, $\int\limits_T^\infty |(\mathcal{M}^{-1}W^0_0)(x)|^2 dx < \varepsilon^2$ *для деяких* $T > 0$ *та* $\varepsilon > 0$, *то керування*

$$u = p + \int\limits_0^\infty M(0,\xi) V(\xi,\cdot)\, d\xi = \mathcal{M}^{-1} W^0_0 + \int\limits_0^\infty M(0,\xi) V(\xi,\cdot)\, d\xi, \qquad \text{м. с. на } (0,T), \tag{15}$$

де $V(\xi,t)$ *визначається за* (13), *є розв'язком задачі* ε*-керованості.*

Теорема 6. *Стан* $W^0 \in \mathbb{H}^0_{0,o}$ *є* 0*–керованим відносно системи* (5), (6), *якщо умови* (*i*), (*ii*) *теореми 5 виконано та існує таке* $T > 0$, *що* $\operatorname{supp} \mathcal{M}^{-1} W^0_0 \subset [-T, T]$. *За цих умов керування, що розв'язує задачу* 0*-керованості, має вигляд* (15) *м. с. на* $(0,T)$.

1. *Эмануилов О. Ю.* Граничная управляемость гиперболическими уравнениями // Сиб. мат. журн. – 2000. – **41**, № 4. – С. 944–959.
2. *Russell D. L.* Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions // SIAM Rev. – 1978. – **20**, No 4. – P. 639–739.
3. *Vancostenoble J., Zuazua E.* Hardy inequalities, observability, and control for the wave and Schrödinger equations with singular potentials // SIAM J. Math. Anal. – 2009. – **41**, No 4. – P. 1508–1532.
4. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* О граничном управлении на одном конце процессом, описываемым телеграфным уравнением // Докл. АН. – 2002. – **387**, № 5. – С. 600–603.
5. *Khalina K. S.* Controllability problems for the non-homogeneous string that is fixed at the right end point and has the Dirichlet boundary control at the left end point // J. Math. Phys. Anal. Geom. – 2011. – **7**, No 1. – P. 34–58.
6. *Khalina K. S.* On the Neumann boundary controllability for the non-homogeneous string on a segment // J. Math. Phys. Anal. Geom. – 2011. – **7**, No 4. – P. 333–351.
7. *Sklyar G. M., Fardigola L. V.* The Markov power moment problem in problems of controllability and frequency extinguishing for the wave equation on a half-axis // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – **276**, No 1. – P. 109–134.
8. *Фардигола Л. В.* Проблема керованості крайовими умовами Неймана для рівняння струни на півосі // Доп. НАН України. – 2009. – № 10. – С. 36–41.
9. *Fardigola L. V.* Controllability problems for the string equation on a half-axis with a boundary control bounded by a hard constant // SIAM J. Control Optim. – 2008. – **47**. – P. 2179–2199.
10. *Fardigola L. V.* Controllability problems for the $1-D$ wave equation on a half-axis with the Dirichlet boundary control // ESAIM: Control Optim. Calc. Var. – doi:10.1051/cocv/2011169.
11. *Schwartz L.* Théorie des distributions. I, II. – Paris: Hermann, 1950–1951.
12. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. – Москва: Физматлит, 1994. – 336 с.
13. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1977. – 331 с.

14. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. – Москва: Мир, 1976. – 311 с.

Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків

Надійшло до редакції 20.03.2012

Е. С. Халина

Об управляемости краевыми условиями Дирихле для неоднородной струны на полуоси

Рассмотрено уравнение колебания неоднородной струны на полуоси с потенциалом, который не равняется постоянной, и с управлением класса L^∞ на левом конце. Задача управляемости рассмотрена в пространствах Соболева. Получены необходимые и достаточные условия 0- *и* ε-*управляемости за свободное время* $T > 0$. *Управление найдено в явном виде.*

K. S. Khalina

On the controllability over Dirichlet boundary conditions for an inhomogeneous string on the half-axis

The wave equation for an inhomogeneous string is considered on the half-axis. The potential of the string is not equal to a constant. At the left end point, we consider a control of the class L^∞. *The control problem is considered in the Sobolev spaces. Sufficient conditions for the* 0- *and* ε-*controllabilities for a free time* $T > 0$ *are obtained. The control is found explicitly.*