Доповіді
національної академії наук України

10 • 2012

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.6

В. О. Богаєнко, Ю. Ю. Даниленко, Г. С. Фінін

Інтерполяція геоінформаційних даних з використанням методу функцій Гріна

(Представлено академіком НАН України В. Н. Редьком)

Пропонується параметричний алгоритм інтерполяції, в якому використовується метод функцій Гріна та спрощені математичні моделі фізичних процесів, до яких відносяться аналізовані дані.

1. Нерегулярний просторовий розподіл геоінформаційних даних ускладнює їх візуалізацію та аналіз, зокрема на етапі інтерполяції. З відомих методів інтерполяції, що застосовуються при постобробці даних, які мають просторову прив'язку, найбільш поширеними є [1]: лінійна інтерполяція, метод обернених зважених відстаней, крігінг [2], інтерполяція сплайнами та тренд-інтерполяція.

У згаданих методах інтерполяції не використовується інформація стосовно фізичної суті аналізованих даних, тоді як з її врахуванням можна будувати інтерполяції, які більш адекватно описують модельовані процеси. Зокрема, процеси у грунтових водах описуються досить складними нелінійними системами диференціальних рівнянь у частинних похідних, які, до певного наближення, мають характер еліптичних для опису стаціонарного стану.

Маючи спрощену детерміновану математичну модель такого процесу, пропонуємо задачу інтерполяції розглядати як задачу відновлення значень функції цієї моделі за даними, що вимірюються. Для розв'язання такої задачі використаємо символічний метод функцій Гріна й методику псевдообернення.

2. Для проведення інтерполяції геоінформаційних даних розглянемо обернену задачу щодо рівняння

$$\operatorname{div}(\vec{k}\operatorname{grad} y(x) - \vec{w}y(x)) = q(x), \qquad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \tag{1}$$

де компоненти коефіцієнта $\vec{k} = (k_1, k_2)$ — задані додатні числа; вектор $\vec{w} = (w_1, w_2)$; $q(x)$ — інтегровна за Ріманом в області моделювання Ω та обмежена функція, а $y(x)$ — шукана функція.

Крайові умови для рівняння (1) мають вигляд

$$\left.\frac{\partial y(x)}{\partial n}\right|_{x\in\gamma_1} = u_1(x), \qquad y(x)\big|_{x\in\gamma_2} = u_2(x), \tag{2}$$

де n — зовнішня нормаль до γ_1; $\gamma_1 \bigcup \gamma_2$ — контур, який обмежує область Ω; $u_1(x)$, $u_2(x)$ — задані функції.

Розв'язок задачі (1), (2) будується у вигляді суми

$$\begin{aligned}
&y(s) = y_\infty(s) + y_1(s), \qquad s = (x_1, x_2),\\
&y_\infty(s) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} G(s-s')q(s')\,ds',\\
&y_1(s) = \int\limits_S G(s-s')q(s')\,ds',
\end{aligned} \tag{3}$$

складові якої моделюють вплив на стан системи функції зовнішніх збурень та крайових умов (2). Тут $S = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$; $G(\cdot)$ — функція Гріна рівняння (1) в необмежених областях зміни координат (x_1, x_2).

Розв'язання задачі зводиться до визначення функції фіктивних зовнішніх впливів $q(s')$, яка через складові (3) враховує дію крайових умов. При розв'язанні отримуваних таким чином задач значення просторових координат s дискретизуються точками $s_l^{(1)} = x_l^{(1)} \in \Gamma_1$ $(l = \overline{1, L})$, $s_m^{(2)} = x_m^{(2)} \in \Gamma_2$, $m = \overline{1, M}$, а s' — точками $s_n = x_n \in S$ $(n = \overline{1, N})$, що дозволяє задачу знаходження дискретних значень моделюючих функцій звести до обернення системи інтегральних співвідношень

$$\int\limits_S A_j(s')q(s')\,ds' = Y_j, \qquad j = 1, 2, \tag{4}$$

де

$$\begin{aligned}
&Y_1 \overset{\Delta}{=} \mathrm{col}\left(u_1(s_l^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial n} y_\infty(s_l^{(1)}),\ l = \overline{1, L}\right),\\
&Y_2 \overset{\Delta}{=} \mathrm{col}\big(u_2(s_m^{(2)}) - y_\infty(s_m^{(2)}),\ l = \overline{1, M}\big),\\
&A_1(s') \overset{\Delta}{=} \mathrm{col}\left(\frac{\partial}{\partial n} G(s_l^{(1)} - s'),\ l = \overline{1, L}\right),\\
&A_2(s') \overset{\Delta}{=} \mathrm{col}\big(G(s_m^{(2)} - s'),\ m = \overline{1, M}\big).
\end{aligned}$$

З використанням методики псевдообернення [3, 4] можна побудувати множини розв'язків рівняння (4), або середньоквадратичних наближень до них у вигляді

$$\overline{\Omega} = \left\{ \widehat{q}\ (s) \colon\ \widehat{q}\ (s) = A(s)^+ \overline{Y} + v(s) - A^+(s)A(s)v(s),\ s \in S \right\}. \tag{5}$$

Тут $v(s)$ — довільна функція, інтегровна в області зміни своїх аргументів; $^+$ — операція псевдообернення; $A(s) = \{A_1(s), A_2(s)\}$, $\overline{Y} = \{Y_1, Y_2\}$.

У випадку оберненої задачі функція $u(x)$ невідома і знаходиться з умов

$$y(x) = Y_3(x)|D^C, \tag{6}$$

де $Y_3(x)$ — задана функція; D^C — задана підобласть області моделювання Ω. Область D^C дискретизується точками $s^3_{n^c} = x^3_{n^c} \in D^c$ ($n^c = \overline{1, N^c}$).

Множини розв'язків рівняння задачі (1), (2), (6), або середньоквадратичних наближень до них [3, 4] знаходяться з співвідношення

$$\int\limits_S A_j(s')q(s')\,ds' + \int\limits_{\mathbb{R}^2} A_j(s')u(s')\,ds' = u_j, \qquad j = \overline{1, 3},$$

й мають вигляд

$$\overline{\Omega}^c = \Big\{(\widehat{q}\ (s), \widehat{u}(s)) \colon (\widehat{q}\ (s), \widehat{u}(s)) = A^c(s)^+ U + v(s) - A^{c+}(s)A^c(s)v(s), s \in S\Big\}, \tag{7}$$

де $A^c(s) \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{col}(A_1(s), A_2(s), A_3(s))$; $U \stackrel{\Delta}{=} \mathrm{col}(u_1(s), u_2(s), u_3(s))$; $A_3(s') = \mathrm{col}(G(s^{(3)}_{n^c} - s'), n^c = \overline{1, N^c})$, $s' \in \mathbb{R}^2$, а область визначення матриць $A_1(s')$ та $A_2(s')$ розширена до $s' \in \mathbb{R}^2$.

Для проведення інтерполяції геоінформаційних даних розглянемо рівняння (1) за відсутності крайових умов (2), але за наявності умов (6). Вважаємо, що точки $s^{(3)}_{n^c} = x^{(3)}_{n^c} \in D^c$ та значення шуканої функції в цих точках збігаються з точками та значеннями функції, вихідними для задачі інтерполяції. Розв'язок (інтерполююча функція) знаходиться за дискретним аналогом формули (7) з використанням апарату псевдообернення матриць.

Точність розв'язання при цьому залежатиме від точності чисельного інтегрування, яка, в свою чергу, буде залежати від форми елементів, на які буде дискретизуватись область моделювання. В зв'язку з цим доцільним є використання як такої дискретизації тріангуляції Делоне [5]. До початкової тріангуляції можна застосовувати різноманітні методики підрозбиття таким чином, щоб кількість її елементів була значно більша за кількість вихідних точок. У такому випадку отримувані після дискретизації системи СЛАР будуть недовизначені й матимуть множину розв'язків.

Оскільки коефіцієнти рівняння (1) не фіксовані, а вибір розв'язку з множини є довільним, отримуємо параметричний інтерполятор з трьома параметрами: коефіцієнтами $\vec{k}$, коефіцієнтами $\vec{w}$ та функцією $v(s)$ вибору розв'язку, яку будемо вважати константою $v(s) = v_0$.

Запропонований параметричний інтерполятор програмно реалізований та тестований на наборі даних з 52 точок щодо аніонно-катіонного складу води, відбір зразків якої проводився у пунктах, рівномірно розміщених в межах Херсонської області. При аналізі таких даних важливим є виявлення зональності та азональності у просторовому розподілі для встановлення територій, однорідних за показником, та ділянок, в межах яких присутні фактори, що ведуть до зміни хімічного складу поверхневих вод. Результат інтерполяції при наборі параметрів інтерполятора $k_1 = k_2 = 1$, $w_1 = w_2 = 0$, $v_0 = 0$ разом з вихідними точками зображено на рис. 1.

3. Для випадку процесів у грунтах та грунтових водах розроблено параметричний алгоритм інтерполяції, за допомогою якого проведена інтерполяція й візуалізація даних щодо аніонно-катіонного складу води в межах Херсонської області. Отримані результати показали адекватність інтерполяції фізичним процесам.

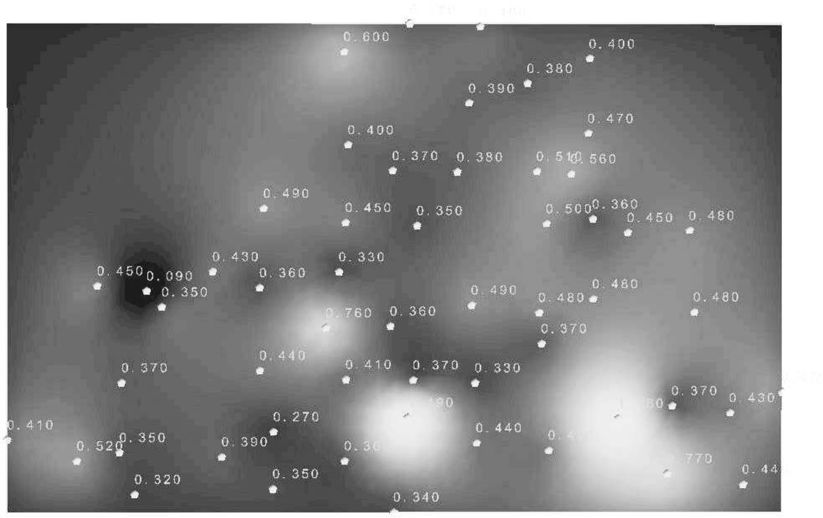

Рис. 1. Результат інтерполяції

1. *Li J., Heap A. D.* A review of spatial interpolation methods for environmental scientists. – Canberra: Geoscience, 2008. – 137 p.
2. *Matheron G.* Principles of geostatistics // Economic Geology. – 1963. – **58**. – P. 1246–1266.
3. *Скопецький В. В., Стоян В. А., Кривонос Ю. Г.* Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. – Київ: Наук. думка, 2002. – 361 с.
4. *Стоян В. А.* Псевдообращение интегральных операторов в задачах наблюдения, терминального управления и моделирования динамики систем с распределенными параметрами // Пробл. управления и информатики. – 1998. – № 4. – С. 112–120.
5. *Malanthara A., Gerstle W.* Comparative study of unstructured meshes made of triangles and quadrilaterals // Proc. 6th Internat. Meshing Roundtable, 1997. – P. 437–447.

Інститут водних проблем і меліорації
НААН України, Київ

Надійшло до редакції 15.03.2012

В. О. Богаенко, Ю. Ю. Даниленко, Г. С. Финин

Интерполяция геоинформационных данных с использованием метода функций Грина

Предлагается параметрический алгоритм интерполяции, в котором используется метод функций Грина и упрощенные математические модели физических процессов, к которым относятся анализируемые данные.

V. O. Bohaienko, Ju. Ju. Danylenko, G. S. Finin

Interpolation of geoinformational data using Green's functions method

A parametric interpolation algorithm that uses Green's function method and simplified mathematical models of physical processes, on which the analyzed data rely, has been proposed.