ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

11 • 2012

МЕХАНІКА

УДК 539.3

А. И. Александров

Решение задач о контакте упругих тел с использованием нелинейных интегральных уравнений

(Представлено академиком НАН Украины В. П. Шевченко)

Предложен метод решения задач о контактном взаимодействии линейно-упругих тел при наличии кулонового трения между ними и неизвестной поверхности контакта. Метод состоит в использовании нелинейных интегральных уравнений для моделирования контактного взаимодействия тел и предполагает регуляризацию этих уравнений, дискретизацию регуляризированных уравнений, а также построение сходящихся итерационных процессов для решения дискретного аналога регуляризированных уравнений.

Использование нелинейных интегральных уравнений для моделирования контактного взаимодействия упругих тел позволяет избавиться от основной трудности реализации вариационных методов при решении контактных задач, заключающейся в необходимости рассматривать сложные задачи нелинейного программирования. Большинство известных попыток использования таких уравнений [1–5] ограничивается рассмотрением контактных задач без учета трения либо задач, в которых учет трения осуществляется при упрощенных граничных условиях, соответствующих полному проскальзыванию тел [4, 5]. Нелинейные интегральные уравнения, использованные в [6, 7], позволяют учитывать трение Кулона в общем виде и могут быть основой для создания эффективного численного метода решения соответствующих контактных задач.

Операторное уравнение контактной задачи. Рассмотрим трехмерную статическую контактную задачу о взаимодействии двух линейно-упругих тел с учетом трения Кулона при неизвестной площадке контакта и неизвестной границе раздела зон проскальзывания и сцепления на этой площадке. Эта задача сводится к решению операторного уравнения [6, 7]

$$p = G_\mu(p - E(A(p) - f)), \tag{1}$$

где $p = (p_1, p_2, p_3)$ есть неизвестная вектор-функция контактных нагрузок, отыскиваемая в гильбертовом пространстве $L_2^3(\Omega)$ [7] вектор-функций, компоненты которых являются элементами пространства $L_2(\Omega)$ [8]; $f = (f_1, f_2, f_3)$ — заданный элемент $L_2^3(\Omega)$, характеризующий конфигурацию взаимодействующих тел и условия их нагружения; μ — коэффициент трения; E — произвольная положительная константа; Ω — заданная ограниченная плоская область, содержащая в себе неизвестную заранее площадку контакта тел. Входящий в правую часть уравнения (1) линейный ограниченный оператор влияния $A\colon L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ определен соотношениями:

$$\begin{cases} \widetilde{p} = (\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}_3), \qquad p = (p_1, p_2, p_3) \in L_2^3(\Omega), \\ \widetilde{p} = A(p); \qquad \widetilde{p}_i = \sum\limits_{j=1}^{3} A_{ij}(p_j) \qquad \forall\, i = \overline{1,3}, \end{cases} \tag{2}$$

где $A_{ij}\colon L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ — заданные линейные ограниченные операторы. Непрерывный нелинейный оператор $G_\mu\colon L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ задан равенствами

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), \qquad y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega), \qquad y = G_\mu(x), \\ y_1(s) = h(x_1(s)), \\ y_2(s) = q(x_2(s), x_3(s), \mu h(x_1(s))), \\ y_3(s) = q(x_3(s), x_2(s), \mu h(x_1(s))), \qquad s \in \Omega, \end{cases}$$

в которых μ есть коэффициент трения, а функции h и q имеют вид

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ 0, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases} \qquad q(x,y,z) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z, \\ x\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{если} \quad \sqrt{x^2+y^2} > z. \end{cases}$$

Квазистатическая контактная задача с учетом кулонова трения при дискретном характере процесса нагружения сводится к решению нескольких уравнений вида (1) [7].

В большинстве важных для практики случаев входящие в (2) линейные ограниченные операторы $A_{ij}\colon L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ допускают интегральное представление и операторное уравнение (1) представляет собой систему трех нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных функций контактной нагрузки $p_1(s)$, $p_2(s)$, $p_3(s)$.

Условие единственности решения. Пусть μ есть фиксированное положительное число. Каждая совокупность измеримых по Лебегу на Ω функций $c_1(s)$, $c_2(s)$, $c_3(s)$, $a(s)$, $b(s)$, $\varphi(s)$, удовлетворяющих условиям

$$0 \leqslant c_i(s) \leqslant 1 \qquad (i = \overline{1,3}), \qquad 0 \leqslant \varphi(s) \leqslant 2\pi, \qquad \sqrt{a^2(s)+b^2(s)} \leqslant \mu,$$
$$c_3(s)(a^2(s)+b^2(s)) = 0 \qquad \text{для почти всех} \qquad s \in \Omega,$$

порождает линейный ограниченный оператор $B\colon L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ при помощи следующих соотношений:

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), \qquad y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega), \\ y = B(x), \qquad y_i(s) = \sum\limits_{j=1}^{3} b_{ij}(s) x_j(s) \qquad \forall\, i = \overline{1,3}, \\ b_{11}(s) = c_1(s), \qquad b_{12}(s) = b_{13}(s) = 0, \qquad b_{21}(s) = c_1(s)a(s), \\ b_{31}(s) = c_1(s)b(s), \qquad b_{22}(s) = c_2(s)\cos^2(\varphi(s)) + c_3(s)\sin^2(\varphi(s)), \\ b_{23}(s) = (c_2(s) - c_3(s))\cos(\varphi(s))\sin(\varphi(s)), \qquad b_{32}(s) = b_{23}(s), \\ b_{33}(s) = c_2(s)\sin^2(\varphi(s)) + c_3(s)\cos^2(\varphi(s)). \end{cases}$$

Класс всех заданных таким образом операторов B обозначим символом α_μ. Этот класс построен таким образом, что для любых элементов $x, y \in L_2^3(\Omega)$ существует зависящий от них оператор $B \in \alpha_\mu$, удовлетворяющий равенству

$$G_\mu(x) - G_\mu(y) = B(x - y).$$

Такой факт позволяет получить условие единственности решения уравнения (1) при помощи числового множества $US(A)$, задав его для каждого линейного ограниченного оператора $A\colon L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ следующим соотношением:

$$US(A) = \{\mu > 0 \mid \exists\, E > 0\colon \operatorname{Ker}(B(I - EA) - I) = \{\theta\}\ \forall\, B \in \alpha_\mu\}.$$

В этом соотношении θ есть нулевой элемент $L_2^3(\Omega)$, $I\colon L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ есть тождественный оператор, символ $\operatorname{Ker}(D)$ обозначает ядро оператора D [8].

Если множество $US(A)$ непусто, то оно представляет собой промежуток на числовой прямой, крайней левой точкой которого является число ноль. Это множество $US(A)$ определено так, что если значение коэффициента трения μ принадлежит $US(A)$, то для любого фиксированного элемента $f \in L_2^3(\Omega)$ уравнение (1) не может иметь более одного решения в пространстве $L_2^3(\Omega)$. Последнее означает, что факт единственности решения рассматриваемой контактной задачи определяется исключительно упругими свойствами взаимодействующих тел независимо от их конфигурации и внешних условий нагружения [9].

Регуляризирующее уравнение. Полная непрерывность линейного оператора влияния $A\colon L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$, которая имеет место для многих контактных задач, приводит к чувствительности решения $p \in L_2^3(\Omega)$ уравнения (1) по отношению к искажению исходных данных $f \in L_2^3(\Omega)$. С целью устранения этого дефекта построим регуляризирующий аналог уравнения (1).

Если $\mu \in US(A)$ и для некоторого фиксированного элемента $f \in L_2^3(\Omega)$ уравнение (1) имеет решение $p^* = (p_1^*, p_2^*, p_3^*) \in L_2^3(\Omega)$, то в случае, когда априори известна функция $u(s) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющая условию

$$p_1^*(s) \leqslant u(s) \quad \text{для почти всех} \quad s \in \Omega,$$

можно для уравнения (1) предложить регуляризирующий аналог

$$p = G_\mu^u(p - E(\varepsilon p + A(p) - f)). \tag{3}$$

В уравнении (3) $\varepsilon > 0$ — параметр регуляризации, E — произвольное положительное число и непрерывный нелинейный оператор $G_\mu^u\colon L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ задан равенствами:

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3), \qquad y = (y_1, y_2, y_3) \in L_2^3(\Omega), \qquad y = G_\mu^u(x), \\ y_1(s) = h_{u(s)}(x_1(s)), \\ y_2(s) = q(x_2(s), x_3(s), \mu h_{u(s)}(x_1(s))), \\ y_3(s) = q(x_3(s), x_2(s), \mu h_{u(s)}(x_1(s))), \qquad s \in \Omega, \\ h_{u(s)}(x_1(s)) = \begin{cases} h(x_1(s)), & \text{если} \quad x_1(s) \leqslant u(s), \\ u(s), & \text{если} \quad x_1(s) > u(s). \end{cases} \end{cases}$$

В [6] доказано, что при любом положительном значении ε решение $p_\varepsilon \in L_2^3(\Omega)$ уравнения (3) существует, является единственным и слабо в $L_2^3(\Omega)$ сходится к p^* при стремлении к нулю положительного параметра ε.

Процедура численного решения уравнения. Наличие слагаемого εp в уравнении (3) позволяет построить устойчивый численный алгоритм приближенного решения этого уравнения. Такой алгоритм базируется на аппроксимационной теореме [7], в условиях которой символы $\|x\|_k$, $\|B\|_{*k}$, (x, y) обозначают соответственно норму элемента $x \in L_2^k(\Omega)$, норму линейного ограниченного оператора $B\colon L_2^k(\Omega) \to L_2^k(\Omega)$ и скалярное произведение элементов x, $y \in L_2^3(\Omega)$. Приведем эту теорему.

Теорема. *Пусть $\mu \in US(A)$ и линейный оператор $A\colon L_2^3(\Omega) \to L_2^3(\Omega)$ является вполне непрерывным, удовлетворяя при этом условиям самосопряженности и неотрицательности:*

$$(A(x), y) = (x, A(y)) \qquad \forall\, x, y \in L_2^3(\Omega),$$

$$(A(x), x) \geqslant 0 \qquad \forall\, x \in L_2^3(\Omega).$$

Пусть ε — произвольное фиксированное положительное число и последовательности $\{A_n\}$ линейных вполне непрерывных операторов, действующих из $L_2^3(\Omega)$ в $L_2^3(\Omega)$, $\{f^{(n)}\}$ элементов $L_2^3(\Omega)$, а также $\{u_n\}$ почти всюду на Ω неотрицательных функций пространства $L_2(\Omega)$ удовлетворяют условиям:

$$\lim_{n\to\infty} \|A - A_n\|_{*3} = \lim_{n\to\infty} \|f - f^{(n)}\|_3 = \lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_1 = 0.$$

Тогда каждое из уравнений

$$p = G_\mu^{u_n}(p - E(\varepsilon p + A_n(p) - f^{(n)})), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

имеет хотя бы одно решение в пространстве $L_2^3(\Omega)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|p_\varepsilon - p_n\|_3 = 0$, где p_ε есть решение уравнения (3) в пространстве $L_2^3(\Omega)$, а p_n есть любое из решений уравнения (4) в пространстве $L_2^3(\Omega)$, полученное при данном натуральном значении n.

Используя для построения аппроксимирующих последовательностей $\{A_n\}$, $\{f^{(n)}\}$, $\{u_n\}$ процедуру осреднения функций пространства $L_2(\Omega)$ по граничным элементам сетки, покрывающей Ω, можно операторное уравнение (4) при фиксированном n записать в виде системы $3 \cdot k$ скалярных уравнений относительно $3 \cdot k$ неизвестных значений удельной контактной нагрузки, действующей на граничных элементах указанной сетки. Для получения решения этой системы целесообразно использовать нелинейный аналог итерационного процесса Зейделя [7]

$$\begin{cases} (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_{3k}^{(0)}) \in R^{3k}, \\ x_{3i-2}^{(m+1)} = h_{\sigma_i}(\gamma_i^{(m)}), \\ x_{3i-1}^{(m+1)} = q(\alpha_i^{(m)}, \beta_i^{(m)}, \mu h_{\sigma_i}(x_{3i-2}^{(m)})), \\ x_{3i}^{(m+1)} = q(\beta_i^{(m)}, \alpha_i^{(m)}, \mu h_{\sigma_i}(x_{3i-2}^{(m)})), \qquad i = \overline{1, k}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

где R^{3k} — $3k$-мерное евклидово пространство и величины $\gamma_i^{(m)}$, $\alpha_i^{(m)}$, $\beta_i^{(m)}$ определяются равенствами:

$$\gamma_i^{(m)} = \frac{1}{a_{3i-23i-2}}\left(-\sum_{j=1}^{3i-3} a_{3i-2j}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i-1}^{3k} a_{3i-2j}x_j^{(m)} + b_{3i-2}\right),$$

$$\alpha_i^{(m)} = \frac{1}{a_{3i-13i-1}}\left(-\sum_{j=1}^{3i-2} a_{3i-1j}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i}^{3k} a_{3i-1j}x_j^{(m)} + b_{3i-1}\right),$$

$$\beta_i^{(m)} = \frac{1}{a_{3i3i}}\left(-\sum_{j=1}^{3i-1} a_{3ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=3i+1}^{3k} a_{3ij}x_j^{(m)} + b_{3i}\right).$$

Условия применимости предложенного метода позволяют использовать его для решения многих важных с точки зрения приложений контактных задач (таких, например, в которых взаимодействующими телами являются штамп, упругое полупространство, упругое многослойное основание). При помощи этого метода удалось получить решение задачи о контакте колеса и рельса в существенно негерцовской постановке и установить эффект отставания плоской подошвы штампа, вдавливаемого в упругое многослойное основание, от поверхности основания [10].

1. *Галанов Б. А.* Метод граничных уравнений типа Гаммерштейна для контактных задач теории упругости в случае неизвестных областей контакта // Прикл. математика и механика. – 1985. – **49**, вып. 5. – С. 827–835.
2. *Галанов Б. А.* О приближенном решении некоторых задач упругого контакта двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. – 1981. – № 5. – С. 61–67.
3. *Александров В. М., Kalker J. J., Пожарский Д. А.* Пространственная контактная задача для двухслойного упругого основания с заранее неизвестной областью контакта // Изв. РАН. МТТ. – 1999. – № 4. – С. 51–55.
4. *Чебаков М. И.* Трехмерная контактная задача для слоя с учетом сил трения в области контакта // Там же. – 2002. – № 6. – С. 59–68.
5. *Александров В. М., Пожарский Д. А.* Трехмерные контактные задачи при учете трения и нелинейной шероховатости // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, вып. 3. – С. 516–527.
6. *Александров А. И.* Регуляризирующий алгоритм для нелинейных интегральных уравнений контактной задачи о взаимодействии упругих тел при наличии кулонова трения // Вісн. Запоріз. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 1. – С. 5–9.
7. *Александров А. И.* Метод нелинейных гарничных интегральных уравнений для решения пространственных контактных задач о взаимодействии упругих тел при наличии трения // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. – 2010. – **18**, № 5. – С. 26–38.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1984. – 752 с.
9. *Александров А. И.* О единственности решения задачи контактного взаимодействия упругих тел при наличии кулонова трения // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. – 2009. – **17**, № 5. – С. 3–11.
10. *Александров А. И., Матузко Ю. О., Приварников А. К.* Численное решение пространственных контактных задач для многослойных оснований // Совр. пробл. механики сплошной среды. – Ростов-на-Дону, 2003. – С. 11–14.

ГВУЗ “Запорожский национальный университет”

Поступило в редакцию 16.03.2012

О. І. Александров

Розв'язання задач про контакт пружних тіл з використанням нелінійних інтегральних рівнянь

Запропоновано метод розв'язування задач про контактну взаємодію лінійно-пружних тіл при наявності кулонового тертя між ними та невідомій поверхні контакту. Метод полягає у використанні нелінійних інтегральних рівнянь для моделювання контактної взаємодії тіл і передбачає регуляризацію цих рівнянь, дискретизацію регуляризованих рівнянь та побудову збіжних ітераційних процесів для розв'язування дискретного аналогу регуляризованих рівнянь.

A. I. Alexandrov

The solution of elastic contact problems with the use of nonlinear integral equations

A method for the solution of the contact problems related to the interaction between the linearly elastic bodies under the Coulomb friction between them and the unknown contact surface has been proposed. The method consists in the use of nonlinear integral equations for the simulation of the contact interaction between bodies, regularization of these equations, discretization of the regularized equations, and construction of convergent iteration processes for the solution of a discrete analog of regularized equations.