УДК 539.3


**Я. М. Пастернак**

# Побудова інтегральних рівнянь магнітоелектропружності на основі формалізму Стро

*(Представлено членом-кореспондентом НАН України О. Є. Андрейківим)*

*На основі теорем про голоморфність функцій та умов ортогональності Стро (Stroh) побудовано інтегральні рівняння для неперіодичних та періодичних задач магнітоелектропружності. Отримані співвідношення записані відносно розривів фізико-механічних полів на розімкнутих або замкнутих контурах, що дало можливість побудувати аналітичні розв'язки для систем співвісних проникних та непроникних тріщин у магнітоелектропружному середовищі.*

Інтегральні рівняння для задач лінійної магнітоелектропружності (МЕП), зазвичай, виводять за допомогою [1] варіаційних принципів, методу зважених нев'язок або теорем взаємності. Зокрема, у роботі [2] побудовано фундаментальні розв'язки та використано розширену тотожність Сомільяни для отримання відповідної системи інтегральних рівнянь плоскої задачі. У [3] на прикладі задач електропружності доведено, що симетрія тензора МЕП сталих дає можливість сформулювати теореми взаємності робіт типу Бетті та з використанням фундаментальних розв'язків одержати інтегральні рівняння типу Сомільяни.

Побудові ж інтегральних рівнянь із використанням теорії аналітичних функцій присвячено значно менше робіт, хоча такий підхід є значно продуктивнішим та дає можливість без значних перешкод розглядати також періодичні задачі, півпростори, смуги тощо. Зокрема, у роботах [4, 5] з використанням комплексних потенціалів Стро (Stroh) та інтегральних формул Коші побудовано інтегральні рівняння для дослідження анізотропних та п'єзоелектричних тіл із тріщинами. У [6] отримано інтегральні рівняння плоскої електро- та магнітопружності для комплексних потенціалів типу Лехніцького. У роботі [7] на основі теорії аналітичних функцій одержано інтегральні рівняння анізотропної теорії пружності тіл із тріщинами та тонкими включеннями.

Нижче з використанням розширених комплексних потенціалів Стро [1] та теореми про голоморфність функцій [8, 9] отримано інтегральні рівняння для задач магнітоелектропружності. Такі рівняння мають як загальнотеоретичне, так і важливе прикладне значення, адже їх можна без особливих перешкод внести в обчислювальну схему методу граничних елементів [3], що дає можливість високоточного числового розв'язування неперіодичних та періодичних задач магнітоелектропружності.

**Основні співвідношення магнітоелектропружності. Формалізм Стро.** Розглянемо стаціонарні фізико-механічні поля, що діють у безмежному анізотропному МЕП середовищі, з яким пов'язана глобальна система координат $Ox_1x_2x_3$. Балансові рівняння для відповідних фізико-механічних полів у стаціонарному випадку набудуть вигляду [1, 10]:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \qquad D_{i,i} - q = 0, \qquad B_{i,i} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Тут $\sigma_{ij}$ — компоненти тензора напружень; $f_i$ — компоненти вектора об'ємних сил; $D_i$ — електричне зміщення; $q$ — густина вільних зарядів; $B_i$ — компоненти вектора магнітної індукції. У формулах прийняте правило Ейнштейна підсумовування за індексом, що повторюється. Кома в нижніх індексах означає операцію диференціювання за координатою, індекс якої стоїть після коми, тобто, $u_{i,j} \equiv \partial u_i/\partial x_j$.

Конститутивні співвідношення лінійної магнітоелектропружності відповідно до [1, 10] мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkm}\varepsilon_{km} - e_{pij}E_p - h_{pij}H_p, \\ D_i &= e_{ikm}\varepsilon_{km} + \kappa_{ip}E_p + \beta_{ip}H_p, \\ B_i &= h_{ikm}\varepsilon_{km} + \beta_{ip}E_p + \mu_{ip}H_p, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ — деформації; $E_i = -\phi_{,i}$, $H_i = -\psi_{,i}$ — компоненти векторів напруженості електричного та магнітного полів; $u_i$ — складові вектора переміщень точок тіла; $\phi$, $\psi$ — електричний та магнітний потенціали; $C_{ijkm}$ — компоненти тензора пружних сталих; $e_{ijk}$, $h_{ijk}$ — п'єзоелектричні та п'єзомагнітні сталі; $\kappa_{ij}$, $\mu_{ij}$, $\beta_{ij}$ — діелектрична, магнітна та електромагнітна проникності матеріалу.

Розглянемо двовимірні електричні, магнітні та механічні поля, при яких переміщення, електричний та магнітний потенціали точок циліндричного тіла не змінюються з координатою $x_3$ ($u_{i,3} \equiv 0$, $E_3 = -\phi_{,3} \equiv 0$, $H_3 = -\psi_{,3} \equiv 0$). Введемо, згідно з [1, 3], узагальнені величини

$$\begin{aligned} &\widetilde{u}_i = u_i, \quad \widetilde{u}_4 = \phi, \quad \widetilde{u}_5 = \psi; \quad \widetilde{f}_i = f_i, \quad \widetilde{f}_4 = -q, \quad \widetilde{f}_5 = 0; \\ &\widetilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}, \quad \widetilde{\sigma}_{4j} = D_j, \quad \widetilde{\sigma}_{5j} = B_j; \\ &\widetilde{C}_{ijkm} = C_{ijkm}, \quad \widetilde{C}_{ij4m} = e_{mij}, \quad \widetilde{C}_{4jkm} = e_{jkm}, \quad \widetilde{C}_{4j4m} = -\kappa_{jm}, \\ &\widetilde{C}_{ij5m} = h_{mij}, \quad \widetilde{C}_{5jkm} = h_{jkm}, \quad \widetilde{C}_{5j5m} = -\mu_{jm}, \quad \widetilde{C}_{4j5m} = -\beta_{jm}, \\ &\widetilde{C}_{5j4m} = -\beta_{jm} \quad (i,k = 1,2,3;\ j,m = 1,2). \end{aligned} \tag{3}$$

Із використанням позначень (3) визначальні співвідношення (2) можна записати в уніфікованій компактній формі

$$\widetilde{\sigma}_{ij} = \widetilde{C}_{ijkm}\widetilde{u}_{k,m} \qquad (i,k = 1,..,5;\ j,m = 1,2), \tag{4}$$

а балансові рівняння (1) для стаціонарних механічних, електричних та магнітних полів набудуть вигляду

$$\widetilde{\sigma}_{ij,j} + \widetilde{f}_i \equiv \widetilde{C}_{ijkm}\widetilde{u}_{k,jm} + \widetilde{f}_i = 0 \qquad (i,k = 1,..,5;\ j,m = 1,2). \tag{5}$$

Відповідно до [1] однорідний (для випадку $\widetilde{f}_i = 0$) розв'язок рівнянь (5) має вигляд

$$\widetilde{u}_i = 2\Re[A_{i\alpha}F_\alpha(z_\alpha)], \qquad \widetilde{\varphi}_i = 2\Re[B_{i\alpha}F_\alpha(z_\alpha)] \qquad (i,\alpha = 1,..,5), \tag{6}$$

де $\mathbf{A} \equiv [A_{i\alpha}] = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5]$, $\mathbf{B} \equiv [B_{i\alpha}] = [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_5]$ — матриці комплексних сталих; $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2$; $p_\alpha$ — корені характеристичного рівняння; $\widetilde{\varphi}_i$ — узагальнена функція напружень, електричних зміщень та магнітної індукції (розширена функція напружень); $F_\alpha(z_\alpha)$ — розширені комплексні потенціали Стро для задач магнітоелектропружності.

Компоненти розширеного тензора напружень дорівнюють похідним від відповідних компонент розширеної функції напружень $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$:

$$\widetilde{\sigma}_{i1} = -\widetilde{\varphi}_{i,2}, \qquad \widetilde{\sigma}_{i2} = \widetilde{\varphi}_{i,1} \qquad (i = 1, \ldots, 5). \tag{7}$$

Вектори $\mathbf{a}_\alpha$, що формують матрицю $\mathbf{A}$, та відповідні їм комплексні сталі $p_\alpha$ визначаються із задачі на власні значення формалізму Стро [1]

$$[\mathbf{Q} + p_\alpha(\mathbf{R} + \mathbf{R}^{\mathrm{T}}) + p_\alpha^2 \mathbf{T}]\mathbf{a}_\alpha = 0, \tag{8}$$

де компоненти $5 \times 5$ матриць $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{T}$ дорівнюють [1]: $Q_{ik} = \widetilde{C}_{i1k1}$, $T_{ik} = \widetilde{C}_{i2k2}$, $R_{ik} = \widetilde{C}_{i1k2} = \widetilde{C}_{k2i1}$. Вектори $\mathbf{b}_\alpha$ означені так [1]:

$$\mathbf{b}_\alpha = (\mathbf{R}^{\mathrm{T}} + p_\alpha \mathbf{T})\mathbf{a}_\alpha = -(\mathbf{Q} + p_\alpha \mathbf{R})\mathbf{a}_\alpha / p_\alpha. \tag{9}$$

При цьому матриці $\mathbf{A}$ та $\mathbf{B}$ нормують співвідношеннями [1]

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{I}, \qquad \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{0}, \tag{10}$$

що із використанням (6) дають можливість легко обчислити значення комплексних потенціалів Стро через дійсні розширені функції переміщень $\widetilde{\mathbf{u}}$ та напружень $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{u}}, \tag{11}$$

де $\mathbf{f} = [F_1(z_1), F_2(z_2), \ldots, F_5(z_5)]^{\mathrm{T}}$ — вектор комплексних потенціалів Стро.

**Побудова інтегральних співвідношень типу Сомільяни.** Розглянемо безмежну комплексну площину із системою гладких розімкнутих дуг $\Gamma = \bigcup\limits_j \Gamma_j$, що не перетинаються. Відповідно до [8, 9] для того, щоб функції $\phi^+(s)$, $\phi^-(s)$ класу $H^*$ на $\Gamma$ (включаючи початки і кінці дуг) були граничними значеннями кусково-голоморфної зовні $\Gamma$ функції $\phi(z)$, що дорівнює нулю на безмежності, необхідним і достатнім є виконання умови

$$\frac{1}{2}\Sigma\phi(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\Delta\phi(\tau)}{\tau - s}d\tau, \tag{12}$$

де $\Sigma(\cdot) = (\cdot)^+ + (\cdot)^-$, $\Delta(\cdot) = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$; $i = \sqrt{-1}$.

Використовуючи означення (7) розширеної функції напружень $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}$, співвідношення $dZ_\alpha = -(n_2 - n_1 p_\alpha)d\Gamma$, балансові рівняння $\int\limits_\Gamma \Sigma\widetilde{t}_j(\mathbf{x})\, d\Gamma(\mathbf{x}) = 0$ та метод інтегрування частинами, на основі співвідношень (11) та (12) отримаємо такі необхідні і достатні умови голоморфності комплексних потенціалів Стро $F_\alpha(z_\alpha)$ у площинах $z_\alpha$:

$$\frac{1}{2}\Sigma F_\alpha(Z_\alpha(\mathbf{y})) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\Delta F_\alpha(Z_\alpha(\mathbf{x}))}{Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})}dZ_\alpha(\mathbf{x}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma A_{j\alpha} \ln Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})\Sigma\widetilde{t}_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{B_{j\alpha}(n_2 - n_1 p_\alpha)}{Z_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})}\Delta\widetilde{u}_j(\mathbf{x})d\Gamma(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma), \tag{13}$$

де $Z_\alpha(\mathbf{x}) = x_1 + p_\alpha x_2$; $n_1$, $n_2$ — компоненти вектора нормалі $\mathbf{n} = \mathbf{n}^+$ до кривої $\Gamma$ у точці $\mathbf{x}$; $\widetilde{t}_i^\pm = \widetilde{\sigma}_{ij}^\pm n_j^\pm$ — граничні значення компонент розширеного вектора напружень.

На основі (6), (7) та (13) легко отримати такі сингулярні інтегральні рівняння для задач магнітоелектропружності:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\Sigma\widetilde{u}_i(\mathbf{y}) = \int\limits_\Gamma U_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Sigma\widetilde{t}_j(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x}) - \int\limits_\Gamma T_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta\widetilde{u}_j(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x}), \\ &\frac{1}{2}\Delta\widetilde{t}_i(\mathbf{y}) = n_j^+(\mathbf{y})\left[\int\limits_\Gamma D_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Sigma\widetilde{t}_k(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x}) - \int\limits_\Gamma S_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta\widetilde{u}_k(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x})\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

У (14) сингулярні та гіперсингулярні інтеграли слід обчислювати в сенсі головного значення або скінченної частини. Ядра рівнянь (14) задані співвідношеннями

$$\begin{aligned} &U_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{\pi}\Im[A_{i\alpha}A_{j\alpha}\ln Z_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})], \qquad T_{ij}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{\pi}\Im\left[A_{i\alpha}B_{j\alpha}\frac{(n_2 - n_1 p_\alpha)}{Z_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right], \\ &D_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{1}{\pi}\Im\left[(\delta_{2j} - \delta_{1j}p_\alpha)B_{i\alpha}A_{k\alpha}\frac{1}{Z_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\right], \\ &S_{ijk}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{\pi}\Im\left[(\delta_{2j} - \delta_{1j}p_\alpha)B_{i\alpha}B_{k\alpha}\frac{n_2 - n_1 p_\alpha}{[Z_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})]^2}\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Інтегральні рівняння (14) цілком аналогічні співвідношенням, отриманим у роботах [1–3] на підставі теорем взаємності робіт.

Відповідно до [8, 9] формули для замкнутих контурів можна трактувати як частковий випадок формул для розімкнутих контурів. Для цього слід лише вважати, що на замкнутому контурі $\phi^+(s) = \phi(s)$, а $\phi^-(s) \equiv 0$.

**Інтегральні співвідношення періодичних задач.** У роботі [8] доведено, що для того щоб функції $\phi^+(s)$, $\phi^-(s)$ класу $H^*$ на $\Gamma$ були граничними значеннями періодичної з періодом $\pi$ кусково-голоморфної зовні $\Gamma$ і розташованих із тим же періодом конгруентних до $\Gamma$ контурів функції $\phi(z)$, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\frac{1}{2}\Sigma\phi(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \Delta\phi(\tau)\operatorname{ctg}(\tau - s)\,d\tau. \tag{16}$$

Лінійне перетворення $z = \pi Z/(\omega_{x_1} + i\omega_{x_2})$ дає можливість перейти у цих залежностях до задачі з довільним періодом $\boldsymbol{\omega} = [\omega_{x_1}, \omega_{x_2}]^{\mathrm{T}}$.

Внаслідок лінійності задачі для випадку періодичних систем дуг $\Gamma$ комплексні потенціали Стро можна подати у вигляді суми зумовлених дією прикладеного на безмежності навантаження потенціалів $F_\alpha^\infty(z_\alpha)$ та збурених періодичних складових $F_\alpha^*(z_\alpha)$. Тоді на основі теореми голоморфності (16) із використанням співвідношень (6), (7) та (11) отримаємо такі інтегральні рівняння періодичних задач магнітоелектропружності:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\Sigma\widetilde{u}_i(\mathbf{y}) = \int\limits_\Gamma U_{ij}^{\mathrm{p}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Sigma\widetilde{t}_j(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x}) - \int\limits_\Gamma T_{ij}^{\mathrm{p}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta\widetilde{u}_j(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x}) + \widetilde{u}_i^\infty(\mathbf{y}), \\ &\frac{1}{2}\Delta\widetilde{t}_i(\mathbf{y}) = n_j^+(\mathbf{y})\left[\int\limits_\Gamma D_{ijk}^{\mathrm{p}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Sigma\widetilde{t}_k(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x}) - \int\limits_\Gamma S_{ijk}^{\mathrm{p}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\Delta\widetilde{u}_k(\mathbf{x})\,d\Gamma(\mathbf{x}) + \widetilde{\sigma}_{ij}^\infty\right], \end{aligned} \tag{17}$$

де $\widetilde{u}_i^\infty(\mathbf{y})$ — зумовлені дією віддаленого навантаження $\widetilde{\sigma}_{ij}^\infty$ компоненти розширеного вектора переміщень. Ядра рівнянь (17) означені виразами

$$\begin{aligned}
&U_{ij}^{\mathrm{p}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{\pi}\Im\left[A_{i\alpha}A_{j\alpha}\ln\sin\frac{\pi Z_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{Z_\alpha(\boldsymbol{\omega})}\right],\\
&T_{ij}^{\mathrm{p}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Im\left[A_{i\alpha}B_{j\alpha}\frac{(n_2-n_1p_\alpha)}{Z_\alpha(\boldsymbol{\omega})}\operatorname{ctg}\frac{\pi Z_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{Z_\alpha(\boldsymbol{\omega})}\right],\\
&D_{ijk}^{\mathrm{p}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\Im\left[(\delta_{2j}-\delta_{1j}p_\alpha)\frac{B_{i\alpha}A_{k\alpha}}{Z_\alpha(\boldsymbol{\omega})}\operatorname{ctg}\frac{\pi Z_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{Z_\alpha(\boldsymbol{\omega})}\right],\\
&S_{ijk}^{\mathrm{p}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \pi\Im\left[(\delta_{2j}-\delta_{1j}p_\alpha)B_{i\alpha}B_{k\alpha}\frac{n_2-n_1p_\alpha}{[Z_\alpha(\boldsymbol{\omega})]^2}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi Z_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{Z_\alpha(\boldsymbol{\omega})}\right].
\end{aligned} \tag{18}$$

**Системи співвісних тріщин у МЕП середовищі.** Новими і важливими для дослідження видаються періодичні задачі магнітоелектропружності, тому здійснимо аналіз прикладів для періодичних систем тріщин у МЕП середовищах. Як і в суто пружних задачах теорії тріщин [11], у МЕП середовищах поблизу вершин тріщиноподібних дефектів поля напружень, електричних зміщень та магнітної індукції також мають кореневу особливість [1, 3]. Коефіцієнти інтенсивності цих полів біля вершини тріщини обчислюються за формулою [3]

$$\widetilde{\mathbf{k}}^{(1)} = \lim_{s\to 0}\sqrt{\frac{\pi}{8s}}\mathbf{L}\cdot\Delta\widetilde{\mathbf{u}}(s), \tag{19}$$

де $\widetilde{\mathbf{k}}^{(1)} = [K_{\mathrm{II}}, K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{III}}, K_D, K_B]^{\mathrm{T}}$ — вектор коефіцієнтів інтенсивності напружень, електричних зміщень та магнітної індукції (КІНЕЗМІ); $\mathbf{L} = -2\sqrt{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ — дійсний тензор Barnett–Lothe [1]. Механічні, електричні та магнітні поля у локальній полярній системі координат $Ox_1'x_2'$ із розташованим у вершині тріщини початком $O$ та спрямованою вздовж дотичної до лінії тріщини віссю $Ox_1'$ означені залежностями [3]

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 = [\widetilde{\sigma}_{i1}] = -\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{,2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Re\{\mathbf{B}\langle p_* Z_*^{-1/2}\rangle\mathbf{B}^{-1}\widetilde{\mathbf{k}}^{(1)}\},\\
&\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 = [\widetilde{\sigma}_{i2}] = \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_{,1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Re\{\mathbf{B}\langle Z_*^{-1/2}\rangle\mathbf{B}^{-1}\widetilde{\mathbf{k}}^{(1)}\},
\end{aligned} \tag{20}$$

де $\langle Z_*^{-1/2}\rangle = \operatorname{diag}[Z_1^{-1/2}, Z_2^{-1/2}, \ldots, Z_5^{-1/2}]$.

Розглянемо періодичну систему розташованих уздовж осі $Ox_1$ на відстані $d$ ($\boldsymbol{\omega} = [d,0]^{\mathrm{T}}$) одна від одної співвісних тріщин завдовжки $2a$, що перебувають під впливом заданого компонентами $\widetilde{\sigma}_{ij}^\infty$ розширеного тензора напружень, електричних зміщень та магнітної індукції навантаження на нескінченності. За відсутності електричного та магнітного контакту берегів (непроникні тріщини) інтегральні рівняння (17) набудуть вигляду

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\Delta\widetilde{u}_{i,1}\left[\frac{\pi}{d}\operatorname{ctg}\frac{\pi(x-\xi)}{d}\right]dx = -2L_{ij}^{-1}\widetilde{\sigma}_{j2}^\infty \qquad (i,j = 1,\ldots,5). \tag{21}$$

У випадку проникних тріщин, береги яких перебувають в ідеальному електричному та магнітному контакті ($\Delta\widetilde{u}_{4,1} = \Delta\widetilde{u}_{5,1} = 0$), система інтегральних рівнянь (17) зведеться до

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a}\Delta\widetilde{u}_{i,1}\left[\frac{\pi}{d}\operatorname{ctg}\frac{\pi(x-\xi)}{d}\right]dx = -L_{ij}^{-1}(2\widetilde{\sigma}_{j2} + \delta_{j4}\Delta\widetilde{t}_4 + \delta_{j5}\Delta\widetilde{t}_5). \tag{22}$$

Згідно з [11], розв'язок рівнянь типу (21) має вигляд

$$\widetilde{k}_i^{(1)} = \widetilde{\sigma}_{i2}\sqrt{\pi a}K^0, \qquad K^0 = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(z)}{z}}, \tag{23}$$

де $z = \pi\lambda/2$; $\lambda = 2a/d$. Важливо наголосити, що при однорідному навантаженні на нескінченності КІНЕЗМІ періодичної системи співвісних непроникних тріщин не залежать від властивостей МЕП матеріалу. Коефіцієнти інтенсивності напружень у цьому випадку тотожні розв'язкам плоскої задачі теорії пружності ізотропного тіла [11].

Розв'язуючи систему рівнянь (22), отримаємо значення КІНЕЗМІ для співвісних електрично та магнітно проникних тріщин:

$$\begin{gathered}\widetilde{k}_i^{(1)} = \left(\widetilde{\sigma}_{i2} + \frac{\delta_{i4}\Delta\widetilde{t}_4 + \delta_{i5}\Delta\widetilde{t}_5}{2}\right)K^0\sqrt{\pi a},\\ \Delta\widetilde{t}_4 = 2\frac{(L_{5i}^{-1}L_{45}^{-1} - L_{4i}^{-1}L_{55}^{-1})\widetilde{\sigma}_{i2}}{L_{44}^{-1}L_{55}^{-1} - L_{45}^{-1}L_{54}^{-1}}, \qquad \Delta\widetilde{t}_5 = 2\frac{(L_{4i}^{-1}L_{54}^{-1} - L_{5i}^{-1}L_{44}^{-1})\widetilde{\sigma}_{i2}}{L_{44}^{-1}L_{55}^{-1} - L_{45}^{-1}L_{54}^{-1}}.\end{gathered} \tag{24}$$

На відміну від (23), розв'язок (24) для проникних тріщин залежить від властивостей МЕП середовища, заданих компонентами $L_{ij}$ тензора Barnett–Lothe.

Таким чином, формалізм Стро є компактним та елегантним підходом для дослідження плоских задач магнітоелектропружності. Завдяки співвідношенням ортогональності він дає можливість отримати прості зв'язки між комплексними потенціалами та функціями переміщень і напружень. Поєднання цього формалізму із теоремами про голоморфність функцій дає змогу побудувати інтегральні рівняння типу Сомільяни, які у загальному випадку найзручніше розв'язувати методом граничних елементів. Зокрема, отримані в такий спосіб співвідношення для періодичних задач дали можливість одержати замкнуті розв'язки для систем співвісних проникних та непроникних тріщин у МЕП середовищі.


1. *Qin Q. H.* Green's function and boundary elements of multifield materials. – Oxford: Elsevier, 2007. – 254 p.
2. *Ding H., Jiang A.* A boundary integral formulation and solution for 2D problems in magneto-electro-elastic media // Computers and Structures. – 2004. – **82**. – P. 1599–1607.
3. *Pasternak Ia.* Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // Engng. Anal. Bound. Elem. – 2011. – **35**, No 4. – P. 678–690.
4. *Wu K. C.* A new boundary integral equation method for analysis of cracked linear elastic bodies // Journal of the Chinese Institute of Engineers. – 2004. – **27**, No 6. – P. 937–941.
5. *Wu K. C.* A new boundary integral equation method for cracked piezoelectric bodies // Key Eng. Mat. – 2006. – Vols. 306–308. – P. 465–470.
6. *Bardzokas D. I., Filshtinsky M. L., Filshtinsky L. A.* Mathematical methods in electro-magneto-elasticity. – New York: Springer, 2007. – 530 p.
7. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавн. центр НТШ, 2007. – 716 с.

8. *Линьков А. М.* Комплексный метод граничных интегральных уравнений теории упругости. – СПб.: Наука, 1999. – 382 с.
9. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3-е, испр. и дополн. – Москва: Наука, 1968. – 512 с.
10. *Калоеров С. А., Петренко А. В.* Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
11. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.

*Луцький національний технічний університет*

*Надійшло до редакції 28.11.2011*
*Після доопрацювання — 23.02.2012*

**Я. М. Пастернак**

**Построение интегральных уравнений магнитоэлектроупругости на основе формализма Стро**

*На основе теорем о голоморфности функций и условий ортогональности Стро (Stroh) построены интегральные уравнения для непериодических и периодических задач магнитоэлектроупругости. Полученные соотношения записаны относительно разрывов физико-механических полей на разомкнутых или замкнутых контурах, что дало возможность построить аналитические решения для систем соосных проницаемых и непроницаемых трещин в магнитоэлектроупругой среде.*

**Ia. M. Pasternak**

**Construction of the integral equations of magnetoelectroelasticity using the Stroh formalism**

*Based on the theorems on the holomorphy of functions and the Stroh orthogonality relations, the integral equations for non-periodic and periodic problems of magnetoelectroelasticity are constructed. The obtained relations are written for the discontinuities of physical and mechanical fields, which allows obtaining the closed-form solutions for the sets of colinear permeable and impermeable cracks in a magnetoelectroelastic medium.*