УДК 519.6

Ю. А. Музичук, Р. С. Хапко

Про метод граничних інтегральних рівнянь розв'язування крайових задач для систем еліптичних рівнянь спеціального виду у частково необмежених областях

(Представлено академіком НАН України В. Л. Макаровим)

Розглядається крайова задача для системи еліптичних рівнянь спеціального виду в частково необмежених областях. Використання техніки функцій Гріна дає можливість отримати інтегральне подання розв'язку з невідомими функціями на поверхні обмеженої області. Обговорюються прямий і непрямий варіанти методу граничних інтегральних рівнянь.

1. Постановка задачі. Метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР) є однаково ефективним для чисельного розв'язування як внутрішніх, так і зовнішніх крайових задач для еліптичних рівнянь з постійними коефіцієнтами, оскільки приводить до знаходження невідомих величин лише на межі області. Його універсальність також проявляється щодо геометрії області. Якщо скористатися функцією Гріна [1] для відповідної задачі, то метод ГІР можна суттєво вдосконалити. Продемонструємо це для такої нескінченної системи еліптичних рівнянь стосовно невідомих функцій u_0, u_1, $\ldots, u_k$, $\ldots$ в деякій області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} Pu_0 = f_0, \\ c_{1,0}u_0 + Pu_1 = f_1, \\ c_{2,0}u_0 + c_{2,1}u_1 + Pu_2 = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{k,0}u_0 + c_{k,1}u_1 + \ldots + c_{k,k-1}u_{k-1} + Pu_k = f_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{1}$$

де P — еліптичний оператор другого порядку зі сталими коефіцієнтами, $c_{i,j}$ — відомі сталі коефіцієнти та f_i — задані в Ω функції (функціонали), $i, j \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Зокрема розглядатимемо випадок диференціального оператора P у вигляді $P := -\Delta + \kappa^2$, де Δ — оператор Лапласа, а $\kappa > 0$ — стале.

Щоб побудувати послідовність функцій, які відіграватимуть для системи ту ж роль, що і функція Гріна для крайової задачі з одним еліптичним рівнянням, скористаємося методом відбиття [1], який застосовний у випадках областей з певним видом симетрії. Для прикладу розглянемо частково необмежену область Ω — півпростір $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ поза включенням Ω_1, тобто $\Omega = \Omega_0 \setminus \overline{\Omega}_1$. Вважаємо, що обмежена однозв'язна область Ω_1 має ліпшицеву межу Γ_1, а нижньою межею півпростору Ω_0 є площина Γ_0 (рис. 1).

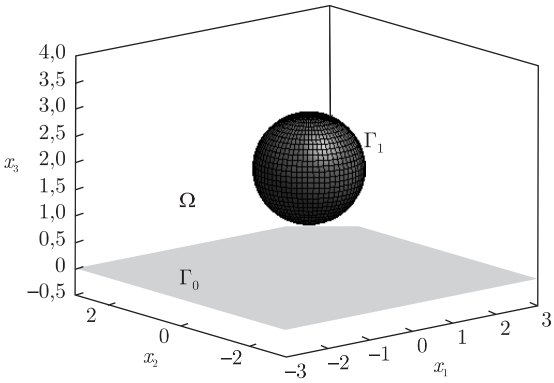

Рис. 1. Частково необмежена область Ω з включенням Ω_1

В [2] авторами було розроблено метод ГІР для побудови узагальненого розв'язку різних крайових задач для такої системи в обмеженій ліпшицевій області без спеціальних припущень щодо її геометрії.

Для компактного запису задачі скористаємося позначеннями з [2]. Нехай $\mathbf{X}$ — деякий лінійний простір, $\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел. Через $\mathbf{X}^\infty$ позначатимемо лінійний простір відображень $\mathbf{u}\colon \mathbb{Z} \to \mathbf{X}$ з властивістю $u(k) = 0$ при $k < 0$. Для будь-якого елемента $\mathbf{u} \in \mathbf{X}^\infty$ (називатимемо його послідовністю) приймемо $u_k \equiv (\mathbf{u})_k := \mathbf{u}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, і писатимемо $\mathbf{u} := (u_0, u_1, \ldots, u_k, \ldots)^\top$. Позначимо оператор $\mathbf{G} := \mathbf{P} + \mathbf{C}$, де $\mathbf{C}\colon \mathbf{X}^\infty \to \mathbf{X}^\infty$ — матричний оператор трикутного вигляду, який діє таким чином: $(\mathbf{Cu})_k = \sum\limits_{l=0}^{k-1} c_{k,l}(\mathbf{u})_l$, $k \in \mathbb{N}_0$, та $\mathbf{P} := (P_{i,j})_{i,j=\overline{0,\infty}}$ — матричний оператор, який має ненульові елементи лише на головній діагоналі: $P_{i,i} \equiv P$ та $P_{i,j} = 0$ при $i \neq j$.

Використовуватимемо простори Соболєва $H^1(\Omega)$ і $H^1_0(\Omega)$ скалярних дійснозначних функцій та спряжені до них відповідно $\widetilde{H}^{-1}(\Omega) := (H^1(\Omega))'$ і $H^{-1}(\Omega) := (H^1_0(\Omega))'$ (див., наприклад, [3]). Нехай γ_0 — оператор сліду на поверхні $\Gamma = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$, який довільному елементові з простору $H^1(\Omega)$ залежно від поверхні ставить у відповідність елемент з простору $H^{1/2}(\Gamma_0)$ або $H^{1/2}(\Gamma_1)$. Сформулюємо задачу Діріхле для системи (1) у нових позначеннях.

Означення 1. Задача Діріхле: для заданих $\mathbf{f} \in (H^{-1}(\Omega))^\infty$, $\widetilde{\mathbf{h}} \in (H^{1/2}(\Gamma_0))^\infty$ і $\widetilde{\mathbf{g}} \in (H^{1/2}(\Gamma_1))^\infty$ знайти послідовність $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^\infty$ таку, що задовольняє операторне рівняння

$$\mathbf{Gu} = \mathbf{f} \qquad \text{в} \qquad (H^{-1}(\Omega))^\infty, \tag{2}$$

крайові умови

$$\gamma_0 \mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{h}} \qquad \text{на} \qquad \Gamma_0 \tag{3}$$

і

$$\gamma_0 \mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{g}} \qquad \text{на} \qquad \Gamma_1 \tag{4}$$

та умову регулярності на нескінченності $u_k(x) \to 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, при $|x| \to \infty$ рівномірно у всіх напрямках.

Зауважимо, що похідні в операторному рівнянні розуміємо в сенсі узагальнених функцій і що для $\widetilde{\mathbf{h}} \in (H^{1/2}(\Gamma_0))^\infty$ виконується умова регулярності компонентів на нескінченності: $\widetilde{h}_k(x) \to 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, при $|x| \to \infty$ на Γ_0.

2. Функції Гріна для системи еліптичних рівнянь. Нехай $\widetilde{\mathbf{E}}(x,y) = (\widetilde{E}_0(x,y), \widetilde{E}_1(x,y),\ldots)^\top$ — фундаментальний розв'язок оператора $\mathbf{G}$, тобто розв'язок рівняння

$$\mathbf{G}\widetilde{\mathbf{E}}(x,\cdot) = \widetilde{\boldsymbol{\delta}}(\cdot - x) \qquad \text{в} \qquad (H^{-1}(\Omega))^\infty, \tag{5}$$

де $\widetilde{\boldsymbol{\delta}}(\theta) = (\delta(\theta),\delta(\theta),\ldots)^\top$ — функціональна послідовність, компонентами якої є δ-функція Дірака [1] і операція диференціювання виконується за другою змінною. Побудуємо послідовність $\mathbf{E}(x,y) = (E_0(x,y), E_1(x,y),\ldots)^\top$, де $E_0(x,y) = \widetilde{E}_0(x,y)$, $E_i(x,y) := \widetilde{E}_i(x,y) - \widetilde{E}_{i-1}(x,y)$, $i \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Компоненти послідовності* $\widetilde{\mathbf{E}}(x,y)$ *у випадку диференціального оператора* $P := -\Delta + \kappa^2$ *мають вигляд*

$$\widetilde{E}_k(x,y) = \frac{e^{-\kappa R(x,y)}}{4\pi R(x,y)} \sum_{i=0}^{k} A_{k,i} R^i(x,y), \tag{6}$$

де $R(x,y) = |x-y|$, *а коефіцієнти* $A_{k,m}$ *визначаються таким чином:*

$$A_{k,m} = \frac{1}{2m\kappa}\left(A_{k,m+1} - \sum_{i=m-1}^{k-1} c_{k,i} A_{i,m-1}\right), \qquad m = k-1,\ldots,1, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

причому $A_{k,k} = -\dfrac{c_{k,k-1}}{2k\kappa} A_{k-1,k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, *та* $A_{k,0} = 1$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Доведення. Зауважимо [3], що фундаментальний розв'язок залежатиме лише від відстані між точками x та y, тому, використовуючи перехід до сферичних координат, для кожного компонента послідовності $\widetilde{\mathbf{E}}(x,y)$ отримуємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку, звідки після підстановки (6) та групування доданків при однакових степенях R отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} -2A_{k,2} + 2\kappa A_{k,1} + \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} c_{k,i} A_{i,0} = 0, \\ -6A_{k,3} + 4\kappa A_{k,2} + \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} c_{k,i} A_{i,1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -(k-1)kA_{k,k} + 2(k-1)\kappa A_{k,k-1} + \displaystyle\sum_{i=k-2}^{k-1} c_{k,i} A_{i,k-2} = 0, \\ 2k\kappa A_{k,k} + c_{k,k-1} A_{k-1,k-1} = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи її послідовно, починаючи з останнього рівняння, приходимо до твердження теореми.

Нехай $\mathbf{q}(x,y)$ — довільний розв'язок рівняння $\mathbf{Gq} = \mathbf{0}$ у півпросторі Ω_0, який є неперервною функцією за змінною $x \in \Omega_0 \bigcup \Gamma_0$ і для довільного фіксованого $y \in \Omega_0$ задовольняє умову $\mathbf{q}(x,y) = -\mathbf{E}(x,y)$ для всіх $x \in \Gamma_0$.

Означення 2. Послідовність $\mathbf{N}(x,y) := \mathbf{E}(x,y) + \mathbf{q}(x,y)$, $x \in \Omega_0 \bigcup \Gamma_0$, $y \in \Omega_0$, називатимемо послідовністю функцій Гріна для задачі Діріхле для системи еліптичних рівнянь (1) в області Ω_0.

Зауважимо, що задана у такий спосіб послідовність є фундаментальним розв'язком оператора $\mathbf{G}$, який для довільного фіксованого $y \in \Omega_0$ задовольняє умову $\mathbf{N}(x,y) = 0$ для всіх $x \in \Gamma_0$.

Теорема 2. *У випадку диференціального оператора* $P := -\Delta + \kappa^2$ *та півпростору* Ω_0 *послідовність функцій Гріна* $\mathbf{N}(x,y) = (N_0(x,y), N_1(x,y), \ldots)^\top$ *складатиметься з таких компонентів:*

$$N_k(x,y) = \frac{e^{-\kappa R(x,y)}}{4\pi R(x,y)} \left(\sum_{i=0}^{k-1} (A_{k,i} - A_{k-1,i}) R^i(x,y) + A_{k,k} R^k(x,y) \right) -$$
$$- \frac{e^{-\kappa R(x,\overline{y})}}{4\pi R(x,\overline{y})} \left(\sum_{i=0}^{k-1} (A_{k,i} - A_{k-1,i}) R^i(x,\overline{y}) + A_{k,k} R^k(x,\overline{y}) \right), \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

де $\overline{y}$ *— точка, симетрична до точки* y *відносно площини* Γ_0.

3. Інтегральне подання розв'язків системи. За допомогою послідовності $\mathbf{N}$ побудуємо послідовності, які за аналогією з теорією еліптичних рівнянь також називатимемо потенціалами.

Означення 3. Нехай $\mathbf{f} \in (\widetilde{H}^{-1}(\Omega))^\infty$ — задана послідовність. Послідовність

$$\mathbf{Uf}(x) := (\mathbf{Uf})(x) = \mathbf{f}(\cdot) \underset{\widetilde{H}^{-1}(\Omega)}{\circ} \mathbf{N}(x,\cdot), \qquad x \in \Omega, \tag{8}$$

називатимемо об'ємним потенціалом для оператора $\mathbf{G}$ в області Ω.

Тут використано позначення q-згортки послідовностей [2], яка в цьому випадку трактується так:

$$(\mathbf{f} \underset{\widetilde{H}^{-1}(\Omega)}{\circ} \mathbf{N}(x,\cdot))_k := \sum_{n=0}^{k} \langle f_n, N_{k-n}(x,\cdot) \rangle_{H^1(\Omega)}, \qquad x \in \Omega,$$

де $\langle \cdot,\cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ означає відношення двоїстості просторів $H^1(\Omega)$ і $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$. Детальніше про означення q-згортки та її властивості див. [2]. Позначимо $\partial_{\overline{\nu}} u(x) \colon = \sum_{i,j=1}^{3} \nu_j(x) \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}$, $x \in \Gamma$, нормальну похідну ($\overline{\nu}(x) := (\nu_1(x), \nu_2(x), \nu_3(x))$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ в точці x) і введемо поверхневі потенціали.

Означення 4. Нехай $\boldsymbol{\lambda} \in (H^{1/2}(\Gamma))^\infty$ і $\boldsymbol{\mu} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty$. Послідовності

$$\mathbf{V}\boldsymbol{\mu}(x) := (\mathbf{V}\boldsymbol{\mu})(x) = \boldsymbol{\mu}(\cdot) \underset{H^{-1/2}(\Gamma)}{\circ} \mathbf{N}(x,\cdot), \qquad x \in \Omega, \tag{9}$$

та

$$\mathbf{W}\boldsymbol{\lambda}(x) := (\mathbf{W}\boldsymbol{\lambda})(x) = \partial_{\overline{\nu}(\cdot)} \mathbf{N}(x,\cdot) \underset{H^{-1/2}(\Gamma)}{\circ} \boldsymbol{\lambda}(\cdot), \qquad x \in \Omega, \tag{10}$$

називатимемо відповідно потенціалами простого та подвійного шару стосовно поверхні Γ для оператора $\mathbf{G}$.

Відомо [3], що простір $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ можна подати у вигляді прямої суми

$$\widetilde{H}^{-1}(\Omega) = \widetilde{H}_0^{-1}(\Omega) \oplus \widetilde{H}_\Gamma^{-1}(\Omega),$$

де підпростір

$$\widetilde{H}_{\Gamma}^{-1}(\Omega) := \{f \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega) \mid \langle f, v\rangle_{H^1(\Omega)} = 0 \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\}$$

складають функціонали з носієм лише на поверхні Γ, а $\widetilde{H}_0^{-1}(\Omega) := (\widetilde{H}_{\Gamma}^{-1}(\Omega))^{\perp}$ в $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$. Зауважимо, що $\widetilde{H}_0^{-1}(\Omega)$ можна ототожнити з деяким підпростором простору $H^{-1}(\Omega)$.

Введемо простір

$$H^1(\Omega, P) := \{u \in H^1(\Omega) \mid Pu \in \widetilde{H}_0^{-1}(\Omega)\}.$$

Відомо [3, 4], що на його елементах можна задати оператор нормальної похідної $\gamma_1 \colon H^1(\Omega, P) \to (H^{1/2}(\Gamma))' = H^{-1/2}(\Gamma)$, який у випадку функцій з $H^2(\Omega)$ та достатньо гладкої межі Γ збігається з нормальною похідною.

Використовуючи потенціали (8), (9) та (10), можна побудувати інтегральне зображення компонентів довільної послідовності $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega, P))^{\infty}$ в частково необмеженій області:

Теорема 3. *Для послідовностей $\mathbf{u} \in (H^1(\Omega, P))^{\infty}$ маємо таке зображення:*

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{U}\mathbf{f}(x) + \mathbf{V}\boldsymbol{\mu}(x) - \mathbf{W}\boldsymbol{\lambda}(x), \qquad x \in \Omega, \tag{11}$$

де $\mathbf{f} := \mathbf{G}\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\lambda} := \gamma_0\mathbf{u}$ *і* $\boldsymbol{\mu} := \gamma_1\mathbf{u}$.

Доведення. Повторює хід доведення теореми 3 з [1, §29].

Наслідок. *Використовуючи крайову умову* (3) *та враховуючи, що для довільного фіксованого* $x \in \Omega_0$ *виконується* $\mathbf{N}(x, y) = 0$ *для всіх* $y \in \Gamma_0$, *отримуємо таке зображення послідовності* $\mathbf{u}$*:*

$$\mathbf{u}(x) = \gamma_{1,\Gamma_1}\mathbf{u}(\cdot) \underset{H^{-1/2}(\Gamma_1)}{\circ} \mathbf{N}(x, \cdot) - \frac{\partial}{\partial\nu(\cdot)}\mathbf{N}(x, \cdot) \underset{H^{-1/2}(\Gamma_1)}{\circ} \gamma_{0,\Gamma_1}\mathbf{u}(\cdot) + \mathbf{U}\mathbf{f}(x) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial\nu(\cdot)}\mathbf{N}(x, \cdot) \underset{H^{-1/2}(\Gamma_0)}{\circ} \widetilde{\mathbf{h}}(\cdot), \qquad x \in \Omega, \tag{12}$$

де позначення γ_{0,Γ_1} *та* γ_{1,Γ_1} *відповідають операторам сліду та нормальної похідної на поверхні* Γ_1.

За аналогією з [2] для довільних $\boldsymbol{\lambda} \in (H^{1/2}(\Gamma))^{\infty}$ і $\boldsymbol{\mu} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^{\infty}$ поверхневі потенціали $\mathbf{V}\boldsymbol{\mu}$ і $\mathbf{W}\boldsymbol{\lambda}$ є розв'язками однорідного рівняння $\mathbf{G}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ в Ω. Крім цього, потенціали (9) та (10) характеризуються відповідними відношеннями стрибків [2, теореми 5 та 7].

Далі розглядатимемо граничні оператори $\mathbf{V}$, $\mathbf{K}'$, $\mathbf{K}$ і $\mathbf{D}$, які діють таким чином:

$$\mathbf{V} \colon (H^{-1/2}(\Gamma))^{\infty} \to (H^{1/2}(\Gamma))^{\infty}, \qquad \mathbf{K}' \colon (H^{-1/2}(\Gamma))^{\infty} \to (H^{-1/2}(\Gamma))^{\infty},$$
$$\mathbf{K} \colon (H^{1/2}(\Gamma))^{\infty} \to (H^{1/2}(\Gamma))^{\infty}, \qquad \mathbf{D} \colon (H^{1/2}(\Gamma))^{\infty} \to (H^{-1/2}(\Gamma))^{\infty}.$$

При цьому їхні компоненти визначені за допомогою q-згортки при відповідному відображенні q:

$$(\mathbf{V}\boldsymbol{\mu})_i := \sum_{j=0}^{i} V_j\mu_{i-j}, \qquad (\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda})_i := \sum_{j=0}^{i} K_j\lambda_{i-j},$$
$$(\mathbf{K}'\boldsymbol{\mu})_i := \sum_{j=0}^{i} K_j'\mu_{i-j}, \qquad (\mathbf{D}\boldsymbol{\lambda})_i := \sum_{j=0}^{i} D_j\lambda_{i-j}, \qquad i \in \mathbb{N}_0,$$

для довільних послідовностей $\boldsymbol{\lambda} \in (H^{1/2}(\Gamma))^{\infty}$ і $\boldsymbol{\mu} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^{\infty}$.

Тут ми використовуємо позначення $V_j\mu := \gamma_{0,\Gamma_1}V_j\mu$, $D_j\lambda := -\gamma_{1,\Gamma_1}W_j\lambda$ $(j \in \mathbb{N}_0)$, а граничні оператори K_j, K'_j $(j \in \mathbb{N}_0)$ діють за такими правилами:

$$K'_0\mu := \gamma_{1,\Gamma_1}V_0\mu - \frac{1}{2}\mu, \qquad K'_j\mu := \gamma_{1,\Gamma_1}V_j\mu,$$

$$K_0\lambda := \gamma_{0,\Gamma_1}W_0\lambda + \frac{1}{2}\lambda, \qquad K_j\lambda := \gamma_{0,\Gamma_1}W_j\lambda, \qquad j \in \mathbb{N},$$

та на підставі теореми 5 [2] і неперервності операторів γ_{0,Γ_1} та γ_{1,Γ_1} теж є неперервними.

Тоді для довільних $\boldsymbol{\lambda} \in (H^{1/2}(\Gamma))^\infty$ та $\boldsymbol{\mu} \in (H^{-1/2}(\Gamma))^\infty$ правильними є такі співвідношення:

$$\mathbf{V}\boldsymbol{\mu} = \gamma_{0,\Gamma_1}\mathbf{V}\boldsymbol{\mu}, \qquad \mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \left(\gamma_{0,\Gamma_1}\mathbf{W} + \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\lambda},$$

$$\mathbf{K}'\boldsymbol{\mu} = \left(\gamma_{1,\Gamma_1}\mathbf{V} - \frac{1}{2}\mathbf{I}\right)\boldsymbol{\mu}, \qquad \mathbf{D}\boldsymbol{\lambda} = -\gamma_{1,\Gamma_1}\mathbf{W}\boldsymbol{\lambda}.$$

4. Метод граничних інтегральних рівнянь. Надалі розглядатимемо лише однорідні системи (1). Тоді слабкий розв'язок можна подати через його граничне значення та нормальну похідну на поверхні Γ_1. Для того щоб мати повні дані Коші, які лише частково задані крайовими умовами, необхідно розглянути відповідні граничні інтегральні рівняння. Зауважимо, що в цьому полягає так званий прямий підхід [3] до заміни крайових задач інтегральними рівняннями.

Застосуємо до зображення (12) оператор сліду на поверхні Γ_1 та скористаємося співвідношенням стрибка для поверхневого потенціалу подвійного шару. В результаті отримаємо

$$\gamma_{0,\Gamma_1}\mathbf{u}(x) = \mathbf{V}\gamma_{1,\Gamma_1}\mathbf{u}(x) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{K}\right)\gamma_{0,\Gamma_1}\mathbf{u}(x) - \frac{\partial}{\partial\nu(\cdot)}\mathbf{N}(x,\cdot) \underset{H^{-1/2}(\Gamma_0)}{\circ} \widetilde{\mathbf{h}}(\cdot), \quad x \in \Gamma_1. \tag{13}$$

При цьому з крайової умови (4) відома послідовність $\gamma_{0,\Gamma_1}\mathbf{u} = \widetilde{\mathbf{g}}$. Тоді з (13) отримуємо граничне інтегральне рівняння першого роду відносно послідовності $\boldsymbol{\mu} := \gamma_{1,\Gamma_1}\mathbf{u}$:

$$\mathbf{V}\boldsymbol{\mu}(x) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}\right)\widetilde{\mathbf{g}}(x) + \frac{\partial}{\partial\nu(\cdot)}\mathbf{N}(x,\cdot) \underset{H^{-1/2}(\Gamma_0)}{\circ} \widetilde{\mathbf{h}}(\cdot), \qquad x \in \Gamma_1. \tag{14}$$

Легко бачити, що завдяки спеціальному вигляду оператора q-згортки останнє рівняння допускає послідовне розв'язування відносно невідомих μ_k, $k \in \mathbb{N}_0$, причому ліва частина кожного з отриманих рівнянь міститиме один і той самий інтегральний оператор, а в праву частину входитимуть розв'язки рівнянь, знайдені на попередніх кроках.

Подібним чином для задачі (2)–(4) можна отримати й інтегральне рівняння другого роду. Для цього подіємо на інтегральне зображення (12) оператором нормальної похідної на поверхні Γ_1:

$$\gamma_{1,\Gamma_1}\mathbf{u}(x) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{I} + \mathbf{K}'\right)\gamma_{1,\Gamma_1}\mathbf{u}(x) + \mathbf{D}\gamma_{0,\Gamma_1}\mathbf{u}(x) - \frac{\partial}{\partial\nu(\cdot)}\mathbf{N}(x,\cdot) \underset{H^{-1/2}(\Gamma_0)}{\circ} \widetilde{\mathbf{h}}(\cdot), \qquad x \in \Gamma_1.$$

Враховуючи крайову умову (4) та позначення $\boldsymbol{\mu} := \gamma_{1,\Gamma_1}\mathbf{u}$, приходимо до такого ГІР:

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{K}'\right)\boldsymbol{\mu}(x) = \mathbf{D}\widetilde{\mathbf{g}}(x) - \frac{\partial}{\partial\nu(\cdot)}\mathbf{N}(x,\cdot) \underset{H^{-1/2}(\Gamma_0)}{\circ} \widetilde{\mathbf{h}}(\cdot), \qquad x \in \Gamma_1. \tag{15}$$

Для розв'язування задачі (2)–(4) можна скористатись і непрямим підходом. При цьому невідому функцію зобразимо у вигляді різниці двох потенціалів відносно невідомої густини $\boldsymbol{\mu}$:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{V}\boldsymbol{\mu}(x) - \frac{\partial}{\partial \nu(\cdot)}\mathbf{N}(x,\cdot) \underset{H^{-1/2}(\Gamma_0)}{\circ} \widetilde{\mathbf{h}}(\cdot), \qquad x \in \Omega.$$

Тоді, підставивши дане зображення в крайову умову (4), у результаті знову отримаємо граничне інтегральне рівняння першого роду відносно послідовності $\boldsymbol{\mu}$:

$$\mathbf{V}\boldsymbol{\mu}(x) = \widetilde{\mathbf{g}}(x) + \frac{\partial}{\partial \nu(\cdot)}\mathbf{N}(x,\cdot) \underset{H^{-1/2}(\Gamma_0)}{\circ} \widetilde{\mathbf{h}}(\cdot), \qquad x \in \Gamma_1. \tag{16}$$

Зауважимо, що за аналогією з теоремами 9 та 12 [2] можна показати коректність відповідних граничних інтегральних рівнянь.

Отже, нам вдалося отримати подання розв'язку задачі (2)–(4) у вигляді потенціалів, за допомогою якого ми прийшли до систем граничних рівнянь з рекурентними правими частинами та однаковими інтегральними операторами в лівих частинах. В подальшому передбачається побудувати ефективні чисельні методи їхнього розв'язування на основі граничних елементів. Зауважимо, що дана теорія залишиться справедливою і у випадку інших крайових умов, зокрема Неймана.

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.
2. *Muzychuk Yu. A., Chapko R. S.* On variational formulations of inner boundary value problems for infinite systems of elliptic equations of special kind // Matem. Studii. – 2012. – **38**, No 1. – P. 12–34.
3. *Hsiao G. C., Wendland, W. L.* Boundary integral equations. – Berlin: Springer, 2008. – 640 p.
4. *Costabel M.* Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results // SIAM J. Math. Anal. – 1988. – **19**. – P. 613–626.

Львівський національний університет ім. Івана Франка

Надійшло до редакції 08.05.2012

Ю. А. Музычук, Р. С. Хапко

О методе граничных интегральных уравнений решения краевых задач для системы эллиптических уравнений специального вида в частично неограниченных областях

Рассматривается краевая задача для системы эллиптических уравнений специального вида в частично неограниченных областях. Использование техники функций Грина дает возможность получить интегральное представление решения с неизвестными функциями на поверхности ограниченной области. Обсуждаются прямой и непрямой варианты метода граничных интегральных уравнений.

Yu. A. Muzychuk, R. S. Chapko

On the boundary integral equation method for boundary-value problems for a system of elliptic equations of the special type in partially semiinfinite domains

We consider the boundary-value problem for a system of elliptic equations of the special type in semiinfinite domains. The use of Green's function technique leads to the integral representation of the solution with unknown functions on the surface of a bounded domain. The direct and indirect versions of the boundary integral equation method are discussed.