Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

12 • 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 515.168.3

Д. В. Болотов

Топология слоений неотрицательной кривизны на пятимерных многообразиях

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Борисенко)

Доказано, что замкнутое многообразие, гомеоморфное пятимерной сфере, не допускает слоения коразмерности один неотрицательной кривизны.

1. Постановка задачи. Будем называть слоение $\mathcal{F}$ *слоением неотрицательной кривизны* на римановом многообразии M, если все слои $\mathcal{F}$ в индуцируемой метрике имеют неотрицательную секционную кривизну.

Примером слоения неотрицательной кривизны является знаменитое слоение Риба на стандартной трехмерной сфере постоянной кривизны. В [1] классифицированы все замкнутые трехмерные ориентированные многообразия, допускающие трансверсально ориентируемые слоения неотрицательной кривизны.

В [2] доказано, что сферы S^{2n+1} положительной секционной кривизны при $n > 1$ не допускают слоения коразмерности один неотрицательной кривизны (даже неотрицательной кривизны Риччи). Однако до сих пор не установлено, могут ли произвольные римановы многообразия, гомеоморфные S^{2n+1}, $n > 1$, иметь слоение коразмерности один неотрицательной секционной кривизны. Этот вопрос поставлен Г. Штаком в [3].

Цель данной работы — дать ответ на вопрос Г. Штака в случае $n = 2$.

Теорема А. *Пусть M — замкнутое пятимерное риманово многообразие, гомеоморфное пятимерной сфере. Тогда M не допускает C^2-слоения коразмерности один неотрицательной секционной кривизны.*

2. Многообразия неотрицательной кривизны. Топология и геометрия полных многообразий неотрицательной кривизны хорошо известны благодаря работам Топоногова, Чигера, Громола, Маренича, Перельмана, Вальшапа. Мы приведем здесь некоторые важные результаты, используемые в данной работе.

Топологическая структура полных некомпактных многообразий неотрицательной секционной кривизны описывается следующей известной теоремой:

Теорема 1 [4]. *Полное открытое многообразие M неотрицательной секционной кривизны диффеоморфно нормальному расслоению $\nu(S)$ компактного вполне выпуклого, вполне геодезического подмногообразия S в M. Подмногообразие S называется душой многообразия M.*

Замкнутые многообразия неотрицательной секционной кривизны обладают следующим важным свойством:

Теорема 2 [4]. *Пусть M — замкнутое многообразие неотрицательной секционной кривизны. Существует последовательность изометрических накрытий*

$$\widetilde{M} \overset{\text{iso}}{\simeq} P \times E^k \overset{\pi_1}{\to} \widehat{M} \overset{\pi_2}{\to} M,$$

где P компактно и односвязно, а $\widehat{M}$ диффеоморфно $M_1 \times T^k$, где M_1 — изометрически накрывается многообразием P, а T^k — плоский тор. В частности, $\pi_1(M)$ содержит подгруппу конечного индекса, изоморфную $\mathbb{Z}^k$, а если M является $K(\pi,1)$-пространством, то M — плоское.

3. Слоения неотрицательной кривизны. Ранее в [1] нам удалось классифицировать замкнутые ориентируемые трехмерные многообразия, допускающие слоения неотрицательной кривизны. Ключевым этапом в доказательстве этой теоремы явилось установление того факта, что слоение отрицательной кривизны является слоением почти без голономии. Это означает, что нетривиальную группу голономии могут иметь только лишь компактные слои. Оказывается, это верно и в многомерном случае. В [5] мы показали, что трансверсально ориентируемое C^2-слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом ориентируемом многообразии является слоением почти без голономии. Это позволило применить результат Иманиши [6] и представить многообразие в виде объединения блоков, где слоение выглядит достаточно просто. А именно, нами была доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{F}$ — трансверсально ориентируемое слоение коразмерности один неотрицательной кривизны Риччи на замкнутом ориентируемом римановом многообразии M. Тогда $\mathcal{F}$ является слоением почти без голономии и выполнена одна из следующих возможностей:*

1) все слои всюду плотны и M является расслоением над S^1;

2) F содержит компактный слой и M можно разбить конечным числом компактных слоев на блоки[1] *одного из следующих типов:*

A) исключительный блок: B гомеоморфен $K \times I$, где K является компактным слоем слоения и слой $K \times 0$ является предельным для множества компактных слоев;

B) плотный блок: все внутренние слои диффеоморфны типичному слою L и плотны в B;

C) собственный блок: все внутренние слои диффеоморфны типичному слою L и являются вложенными подмногообразиями в B. В этом случае $\operatorname{int} B$ *является расслоением над S^1 со слоем L.*

Если B — неисключительный блок, то $\widetilde{\operatorname{int} B} \cong \widetilde{L} \times \mathbb{R}$, а его фундаментальная группа описывается групповым расширением

$$1 \to \pi_1(L) \to \pi_1(B) \overset{\phi}{\to} \mathbb{Z}^k \to 0, \tag{1}$$

где L — типичный внутренний слой блока B. Более того, $k \geqslant 1$ и $k = 1$ тогда и только тогда, когда блок собственный.

Если, более того, $\mathcal{F}$ — слоение неотрицательной секционной кривизны, то граница каждого блока имеет максимум две компоненты связности.

[1] Блоком мы называем компактное слоеное многообразие с границей, состоящей из компактных слоев.

В случае, когда ориентируемое замкнутое многообразие M имеет размерность пять и $\mathcal{F}$ — трансверсально ориентируемое слоение неотрицательной секционной кривизны на M, нам удалось, существенно используя результаты [7, 8], а также [9], доказать следующее утверждение.

Утверждение 1 [5]. *Если N является объединением конечного числа блоков, граница которых имеет две связные компоненты, то вложение $i\colon K \to N$ граничного слоя является гомотопической эквивалентностью.*

4. Набросок доказательства теоремы А. Из теоремы 2 в случае $n = 4$ следует, что мы можем определить четыре типа компактных слоев:

1. Компактный тип: $\widetilde{K}$ компактно $\Longleftrightarrow \pi_1(K)$ конечна.

2. Тип $S^3 \times E$: $\widetilde{K}$ изометрично прямому произведению трехмерной сферы с метрикой неотрицательной секционной кривизны и евклидовой прямой.

3. Тип $S^2 \times E^2$: $\widetilde{K}$ изометрично риманову произведению двумерной сферы с метрикой неотрицательной секционной кривизны и евклидовой плоскости.

4. Тип E^4: $\widetilde{K}$ изометрично четырехмерному евклидову пространству, т. е. K является плоской четырехмерной пространственной формой.

Всегда можно считать при переходе к конечнолистному накрытию, что многообразие и слоение ориентируемы. В частности, $\mathcal{F}$ трансверсально ориентируемо. Допустим M допускает слоение неотрицательной секционной кривизны.

Случай 1. $\mathcal{F}$ не имеет компактных слоев.

По теореме 3 $\mathcal{F}$ является слоением без голономии, а значит, многообразие является расслоением над окружностью (см. [10]). В частности, фундаментальная группа многообразия должна содержать $\mathbb{Z}$, что невозможно для пятимерной сферы.

Случай 2. $\mathcal{F}$ состоит из компактных слоев.

В этом случае по теореме стабильности Риба (см. [11]), учитывая трансверсальную ориентируемость слоения, M должно быть расслоением над S^1, что невозможно в случае пятимерной сферы.

Случай 3. $\mathcal{F}$ содержит компактный слой с конечной фундаментальной группой.

В этом случае по теореме стабильности Риба $\mathcal{F}$ состоит из компактных слоев, что невозможно по предыдущему случаю.

В остальных случаях согласно теореме 3 и с учетом того, что каждый компактный слой разбивает M, многообразие M можно представить в виде объединения $M = A\bigcup B$, где $A\bigcap B$ — объединение блоков, имеющих две компоненты связности границы, если такие блоки существуют, и $A\bigcap B$ — единственный компактный слой в противном случае. Тогда $C = M \setminus \operatorname{int} B$ и $D = M \setminus \operatorname{int} A$ — блоки с одной компонентой связности границы. Тогда из утверждения 1 получаем, что ∂C, ∂D и $A\bigcap B$ гомотопически эквивалентны. Из точной гомологической последовательности Майера–Вийеториса

$$\cdots \to H_2(M) \to H_1(A\bigcap B) \overset{(i_*^A, i_*^B)}{\to} H_1(A) \oplus H_1(B) \to H_1(M) \to \cdots, \tag{2}$$

учитывая, что средние гомологии M нулевые и так как $\beta_1(A)$ и $\beta_1(B)$ нетривиальны (это следует, например, из эпиморфности ϕ в (1)), имеем (i_*^A, i_*^B) — изоморфизм. Следовательно, $\operatorname{Ker} i_*^A = \operatorname{Im} i_*^B \neq 0$ и $\operatorname{Ker} i_*^B = \operatorname{Im} i_*^A \neq 0$. В частности, имеем

$$\beta_1(A\bigcap B) = \beta_1(A) + \beta_1(B) \geqslant 2. \tag{3}$$

Случай 4. $\mathcal{F}$ содержит компактный слой типа E^4.

В этом случае из предложения 1 следует, что все слои и блоки асферичны. Предположим $cd\pi_1(C) < 3$. Тогда $H^3(C) \cong H_2(C, \partial C) = 0$. Из точной последовательности пары следует, что $i_C \colon H_1(\partial C) \to H_1(C)$ — мономорфизм. Следовательно, i_*^A — мономорфизм. Отсюда $\operatorname{Im} i_*^B = 0$, чего не может быть, как отмечалось выше. Из этого противоречия следует, что $cd\pi_1(C) \geqslant 3$. Из аналогичных соображений $cd\pi_1(D) \geqslant 3$.

Напомним следующее свойство группы $\pi_1(M) = \pi_1(A \bigcup B)$ (здесь M — произвольное связное многообразие с линейно связным пересечением $A \bigcap B$):

Теорема 4 [12]. *Если для некоторой группы G следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(A) \arrow[dr, "\rho_1"] & \\
\pi_1(A \cap B) \arrow[ur, "\phi_1"] \arrow[rr, "\rho_3"] \arrow[dr, "\phi_2"'] & & G, \\
& \pi_1(B) \arrow[ur, "\rho_2"'] &
\end{tikzcd}$$

то однозначно определен гомоморфизм $\sigma \colon \pi_1(M) \to G$ такой, что $\rho_i = \sigma \circ \psi_i$, $i = 1, 2, 3$, где ϕ_1, ϕ_2, а также $\psi_1 \colon \pi_1(A) \to \pi_1(M)$, $\psi_2 \colon \pi_1(B) \to \pi_1(M)$, $\psi_3 \colon \pi_1(A \bigcap B) \to \pi_1(M)$ — гомоморфизмы, индуцированные включениями.

Отметим два важных следствия из данной теоремы:

Следствие 1. *Если хотя бы один из гомоморфизмов ϕ_i не сюръективен, то $\pi_1(M)$ нетривиальна.*

Следствие 2. *Пусть N — группа, порожденная $\operatorname{Ker} \phi_1 \bigcup \operatorname{Ker} \phi_2$. Если $N \neq \pi_1(A \bigcap B)$, то $\pi_1(M)$ нетривиальна.*

Утверждение 2. *Пусть M — замкнутое пятимерное многообразие с C^2-слоением коразмерности один неотрицательной секционной кривизны. Если слоение содержит компактный асферический слой, то $\pi_1(M) \neq 0$. В частности, M не может быть гомеоморфно пятимерной сфере.*

Доказательство. Заметим, что ∂C плоское (по теореме 2) и, по известной теореме Бибербаха, содержит подгруппу конечного индекса, изоморфную $\mathbb{Z}^4$. Из предположения, что $\pi_1(M)$ тривиальна, и следствия 1 следует, что $\phi_1(\mathbb{Z}^4)$ и $\phi_2(\mathbb{Z}^4)$ имеют конечный индекс в $\pi_1(A)$ и $\pi_1(B)$ соответственно. Так как $cd\pi_1(A) \geqslant 3$ и $cd\pi_1(B) \geqslant 3$, то $cd \operatorname{Ker} \phi_1 \bigcap \mathbb{Z}^4 = cd \operatorname{Ker} \phi_1 \leqslant 1$ и $cd \operatorname{Ker} \phi_2 \bigcap \mathbb{Z}^4 = cd \operatorname{Ker} \phi_2 \leqslant 1$. Так как группа $\pi_1(\partial C) \cong \pi_1(A \bigcap B)$ имеет полиномиальный рост, она не содержит подгруппу $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. А так как группы с $cd\pi \leqslant 1$ — это свободные произведения группы $\mathbb{Z}$, то ядро $\operatorname{Ker} \phi_i$ либо тривиально, либо изоморфно $\mathbb{Z}$. Если одна из групп $\operatorname{Ker} \phi_i$ тривиальна, то очевидно, что $N \neq \pi_1(A \bigcap B)$, и $\pi_1(M)$ нетривиальна по следствию 2. Предположим $\operatorname{Ker} \phi_1 = \operatorname{Ker} \phi_2 = \mathbb{Z}$. Обозначим соответствующие образующие через a и b. Так как обе группы $\operatorname{Ker} \phi_1$ и $\operatorname{Ker} \phi_2$ нормальны, имеем следующие соотношения в группе N:

$$aba^{-1} = b^k, \qquad bab^{-1} = a^l.$$

Если $k \neq 1$ и $l \neq 1$, то группа $N = I(N) := \{n \in N \colon \exists p \colon n^p \in N'\}$. Предположим $N = \pi_1(A \bigcap B)$, тогда $\beta_1(A \bigcap B) = \beta_1(\partial C) = 0$. Но из (3) следует, что это невозможно.

Отсюда мы заключаем, что k или l равно 1 и, учитывая, что N не имеет кручения, $N = \mathbb{Z}^2$. Но тогда $N \neq \pi_1(A \bigcap B)$ по теореме 2, и по следствию 2 $\pi_1(M) \neq 0$, что невозможно. Следовательно, предположение, что $\pi_1(M)$ — тривиальна, неверно. Это завершает доказательство предложения.

Случай 5. $\mathcal{F}$ содержит компактный слой K типа $S^2 \times E^2$.

Из леммы 1 следует, что ∂C, ∂D и $A \bigcap B$ гомотопически эквивалентны. Из (3) получаем, что $\mathbb{Z}^2 \subset H_1(K)$. Кроме того, по теореме 2 $\pi_1(K)$ содержит конечную подгруппу $\mathbb{Z}^2$.

Легко показать, что равенство $\chi(K) = 0$ всегда имеет место для компактного слоя K любого трансверсально ориентируемого слоения коразмерности один замкнутого многообразия M^n, при условии, что $[K] = 0$ в $H_{n-1}(M^n)$ (см. [11]). В силу теоремы 10.12 работы [13], учитывая ориентируемость слоев, единственно возможным вариантом является случай, когда K гомотопически эквивалентно $S^2 \times S^1$-расслоению над S^1. Поэтому $\pi_1(K)$ гомеоморфна либо $\mathbb{Z}^2$, либо фундаментальной группе бутылки Клейна. Но так как $\mathbb{Z}^2 \subset H_1(K)$, мы заключаем, что $\pi_1(K) \cong \mathbb{Z}^2$. Заметим, что касательное расслоение TK есть ограничение $T\mathcal{F}$ на K. Поэтому полный класс Штифеля–Уитни $w(TK) = 0$. Согласно [13, Cor. 6.11.1] K определяется с точностью до гомеоморфизма полным классом Штифеля — Уитни и фундаментальной группой, поэтому K гомеоморфно $S^2 \times T^2$. Из утверждения 1 и теоремы об s-кобордизме [14], учитывая, что $Wh(\pi_1(K)) = Wh(\mathbb{Z}^2) = 0$, получаем, что если $\mathcal{F}$ содержит блок B с двумя связными компонентами границы, то $B \simeq S^2 \times T^2 \times I$. Теперь многообразие M, как и выше, можно представить в виде объединения $M = A \bigcup B$, где $A \bigcap B \simeq S^2 \times T^2 \times I$, если множество блоков с двумя компонентами связности границы непусто, и $A \bigcap B \simeq S^2 \times T^2$ в противном случае. Из последовательности (2) ввиду нетривиальности $\beta_1(A)$ и $\beta_1(B)$ немедленно следует, что

$$H_1(C) \cong H_1(D) \cong \mathbb{Z}. \tag{4}$$

В частности, отсюда и теоремы 3 следует, что блоки C и D собственные и их внутренности являются расслоением над S^1 с типичным слоем L. Комбинируя (4) со следствием 1 и тем, что $\pi_1(S^2 \times T^2) \cong \mathbb{Z}^2$, получаем, что $\pi_1(C)$ и $\pi_1(D)$ абелевы, и единственно возможным вариантом является случай, когда фундаментальная группа типичного слоя L как в C, так и в D тривиальна. Более того, типичный слой L должен иметь один конец, так как в противном случае $L \overset{\text{iso}}{\simeq} S^3 \times E$ имеет кокомпактную группу изометрий и должен накрывать K (см. [9]), что невозможно.

Без ограничения общности рассмотрим блок C. Из доказанного следует, что $\partial C \simeq S^2 \times \times T^2$. Учитывая результат Нисимори [15], описывающий структуру слоения в окрестности компактного слоя с абелевой голономией, нетрудно построить везде, кроме нижнего основания, трансверсальное гладкое вложение $j\colon T^2 \times I \to C$ такое, что $j_0 := j|_{T^2 \times 0}$ совпадает с ограничением вложения граничного слоя $i\colon S^2 \times T^2 \to C$ на $s \times T^2$ для некоторой точки $s \in S^2$. Так как слоение внутри C является расслоением, единственно возможным вариантом индуцированного на торе $j_1(T^2) := j(T^2 \times 1)$ слоения $\mathcal{G}$ является расслоение окружностями. Так как типичный слой внутри C имеет один конец, нетрудно показать, что двойственная по Пуанкаре к слоям $\mathcal{G}$ окружность $l \subset j_1(T^2)$ является не только сечением расслоения $\mathcal{G}$, но и сечением расслоения $L \to \operatorname{int} C \overset{p}{\to} S^1$. Таким образом, мы имеем послойное вложение $T^2 \to \operatorname{int} C$. Рассмотрим отображение спектральных последовательностей расслоений $E^p_{ql} \to E'^p_{ql}$, индуцированное включением $j_1\colon T^2 \to \operatorname{int} C$. Так как $\pi_1(L) = H_1(L) = 0$, имеем $j_{1*}[T^2] \cong j_{1*}E^2_{11} \subset E'^2_{11} \cong H_1(S^1; H_1(L)) = 0$. Следовательно, $j_{1*}[T^2] = j_{0*}[T^2] = i_*[T^2] = 0$. Аналогичное утверждение верно и для блока D. Так как $A \bigcap B \simeq S^2 \times T^2 \times I$, то в точной последовательности Майера–Вийеториса

$$\cdots \to H_3(M) \to H_2(A \bigcap B) \overset{(i^A_*, i^B_*)}{\to} H_2(A) \oplus H_2(B) \to H_2(M) \to \cdots$$

$0 \neq [T^2] \subset \mathrm{Ker}(i_*^A, i_*^B)$, и мы заключаем, что $H_3(M) \neq 0$. Значит, многообразие M не может быть гомеоморфно пятимерной сфере.

Случай 6. $\mathcal{F}$ содержит компактный слой K типа $S^3 \times E$.

По теореме 2 $\pi_1(K)$ содержит кокомпактную подгруппу, изоморфную $\mathbb{Z}$. Следовательно, $\beta_1(K) \leqslant 1$. Но это противоречит неравенству (3), так как K и $A \bigcap B$ гомотопически эквивалентны. Поэтому этот случай также приводит к противоречию. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность проф. А. А. Борисенко за внимание к работе и полезные замечания.

1. *Болотов Д. В.* Слоения неотрицательной кривизны на замкнутых трехмерных многообразиях // Мат. сб. – 2009. – **200**. – С. 3–16.
2. *Болотов Д. В.* Гиперслоения неотрицательной кривизны Риччи // Успехи мат. наук. – 2000. – **55**. – С. 333–334.
3. *Stuck G.* Un analogoue feuillete du theoreme de Cartan-Hadamard // C. r. Acad. Sci. Paris. – 1991. – **313**. – P. 519–522.
4. *Cheeger J., Gromoll D.* On structure of complete manifolds of nonnegative curvature // Ann. Math. – 1972. – **96**. – P. 413–443.
5. *Болотов Д. В.* О структуре слоений коразмерности один неотрицательной кривизны // Тр. конф. "Актуальные проблемы современной математики, механики и информатики". – Харьков, 2011. – С. 324–331.
6. *Imanishi H.* Structure of codimension one foliations which are almost without holonomy // J. Math. Kyoto Univ. – 1976. – **313**, No 1. – P. 93–99.
7. *Walschap G.* Nonnegative curved manifolds with souls of codimension 2 // J. Different. Geom. – 1988. – **27**. – P. 525–537.
8. *Guijarro L., Walschap G.* The metric projection onto the soul // Trans. Amer. Math. Soc. – 1999. – **352**. – P. 55–69.
9. *Adams S., Stuck G.* Splitting of non-negatively curved leaves in minimal sets of foliations // Duke Math. J. – 1993. – **71**. – P. 71–92.
10. *Новиков С. П.* Топология слоений // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1965. – **14**. – С. 249–278.
11. *Тамура И.* Топология слоений. – Москва: Мир, 1979. – 317 с.
12. *Масси У., Столлингс Д.* Алгебраическая топология. Введение. – Москва: Мир, 1977. – 344 с.
13. *Hillman J.* Four-manifolds, geometries and knots // Geometry & Topology. – 2002. – **5**. – P. 1–396.
14. *Freedman M., Teichner P.* Teichner 4-manifold topology // Invent. Math. – 1995. – **122**, No 3. – P. 509–529.
15. *Nishimori T.* Compact leaves with abelian holonomy // Tohoku Math. J. – 1975. – **27**. – P. 259–272.

Физико-технический институт низких температур НАН Украины им. Б. И. Веркина, Харьков

Поступило в редакцию 31.05.2012

Д. В. Болотов

Топологія шарувань невід'ємної кривини на п'ятивимірних многовидах

Доведено, що замкнений многовид, гомеоморфний п'ятивимірній сфері, не припускає шарування ковимірності один невід'ємної кривини.

D. V. Bolotov

Topology of nonnegative curvature foliations on five-dimensional manifolds

We prove that a closed manifold homeomorphic to a five-dimensional sphere does not admit a codimension one foliation of nonnegative curvature.