УДК 517.5

В. А. Войтович, А. С. Сердюк

Наближення класів аналітичних функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Одержано асимптотичні рівності для точних верхніх меж наближень інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена на класах 2π-періодичних функцій $C^{\psi}_{\beta,s}$ та $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, які задаються мультиплікаторами $\psi(k)$ і зсувами за аргументом $\beta \in \mathbb{R}$, за умови, що послідовності $\psi(k)$ задовольняють умову Даламбера $\mathcal{D}_q$: $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q$, $q \in (0,1)$. У цьому випадку функції із зазначених класів допускають регулярне продовження у фіксовану смугу $|\operatorname{Im} z| < \ln(1/q)$ комплексної площини, тобто є аналітичними функціями.

Нехай L_s, $1 \leqslant s < \infty$, — простір сумовних у s-му степені на $(0, 2\pi)$ 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_s = \Big(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^s dt\Big)^{1/s}$, L_∞ — простір вимірних істотно обмежених 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}\limits_t |f(t)|$, C — простір неперервних 2π-періодичних функцій $f(t)$, в якому норма задається рівністю $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$.

Нехай далі $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \subset L_1$, — клас 2π-періодичних сумовних функцій $f (f \in L_1)$, які майже для всіх $x \in \mathbb{R}$ можуть бути подані у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(t)\varphi(x+t)\,dt, \qquad a_0 \in \mathbb{R}, \qquad \varphi \in \mathfrak{N}, \qquad \varphi \perp 1, \tag{1}$$

з фіксованим ядром $\Psi_\beta(t)$, ряд Фур'є якого має вигляд

$$S[\Psi_\beta(t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad \psi(k) > 0, \qquad \beta \in \mathbb{R}.$$

Функцію φ з рівності (1) називають (ψ, β)-похідною функції f і позначають через f^{ψ}_{β}.

В роботі як множини $\mathfrak{N}$ виступають множини

$$U_s = \{\varphi \in L_s \colon \|\varphi\|_s \leqslant 1\}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant \infty, \tag{2}$$

а також

$$H_\omega = \{\varphi \in C \colon \omega(\varphi; t) \leqslant \omega(t)\}, \tag{3}$$

де $\omega(\varphi; t) = \sup\{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| : |x_1 - x_2| \leqslant t, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ — модуль неперервності функції φ, а $\omega(t)$ — фіксований опуклий модуль неперервності. Покладемо далі $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = C \bigcap L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Для класів $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ рівність (1) розуміється як рівність в кожній точці $x \in \mathbb{R}$. Класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ та

$C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ введені О.І. Степанцем (див., наприклад, [1, с. 131–142]). Для зручності покладемо $C^{\psi}_{\beta,s} := C^{\psi}_{\beta}U_s$.

При кожному фіксованому $q \in (0,1)$ через $\mathcal{D}_q$ позначимо множину додатних послідовностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для яких виконується умова $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q$. Основні результати даної роботи отримані для класів $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, що визначаються послідовностями $\psi \in \mathcal{D}_q$ при деякому $q \in (0,1)$. У цьому випадку (див. [1, с. 351]) множини $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ складаються з 2π-періодичних функцій $f(x)$, що допускають регулярне продовження в смугу $|\operatorname{Im} z| \leqslant \ln(1/q)$ комплексної площини, тобто з аналітичних функцій.

Важливим частинним випадком класів $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$, для яких $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, є класи інтегралів Пуассона, що складаються з функцій вигляду

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t)P_{q,\beta}(t)\,dt, \qquad A_0 \in \mathbb{R}, \qquad \varphi \in \mathfrak{N}, \qquad \varphi \perp 1,$$

де

$$P_{q,\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \qquad q \in (0,1), \qquad \beta \in \mathbb{R}, \quad -$$

ядро Пуассона з параметрами q та β. У цьому випадку класи $C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ позначають через $C^{q}_{\beta}\mathfrak{N}$.

Нехай $f \in C$ і $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$ — тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює функцію $f(x)$ у точках $x^{(n-1)}_k = 2k\pi/(2n-1)$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\widetilde{S}_{n-1}(f; x^{(n-1)}_k) = f(x^{(n-1)}_k), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Поліном $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$ можна записати у вигляді (див., наприклад, [2, с. 13–14])

$$\widetilde{S}_{n-1}(f;x) = \frac{a^{(n-1)}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a^{(n-1)}_k \cos kx + b^{(n-1)}_k \sin kx), \tag{4}$$

де

$$a^{(n-1)}_k = \frac{2}{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-2} f(x^{(n-1)}_j)\cos kx^{(n-1)}_j, \qquad k = 0,1,\ldots,n-1, \tag{5}$$

$$b^{(n-1)}_k = \frac{2}{2n-1}\sum_{j=0}^{2n-2} f(x^{(n-1)}_j)\sin kx^{(n-1)}_j, \qquad k = 1,2,\ldots,n-1, \quad - \tag{6}$$

коефіцієнти Фур'є–Лагранжа функції f, за системою вузлів $x^{(n-1)}_k$.

Позначимо через $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ поліноми вигляду

$$\widetilde{V}_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} \widetilde{S}^{(n-1)}_k(f;x), \qquad n,p \in \mathbb{N}, \qquad p \leqslant n, \tag{7}$$

де $\widetilde{S}_k^{(n-1)}(f;x)$ — частинні суми порядку k полінома $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$ виду (4), тобто

$$\widetilde{S}_k^{(n-1)}(f;x) = \frac{a_0^{(n-1)}}{2} + \sum_{j=1}^{k} \big(a_j^{(n-1)} \cos jx + b_j^{(n-1)} \sin jx\big),$$

$a_j^{(n-1)}$ і $b_j^{(n-1)}$ означені формулами (5) та (6) відповідно. При $p=1$ суми $\widetilde{V}_{n,p}(f;x)$ збігаються з інтерполяційними поліномами $\widetilde{S}_{n-1}(f;x)$.

Для класичних сум Валле Пуссена $V_{n,p}(f;x)$ має місце зображення

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x), \tag{8}$$

де $S_k(f;x)$ — частинні суми ряду Фур'є функції f, тому суми (7) можна розглядати, як інтерполяційні аналоги сум (8).

У роботі досліджується асимптотична поведінка при $n-p\to\infty$ і $p\to\infty$ величин

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; \widetilde{V}_{n,p}; x) = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta,s}} |f(x) - \widetilde{V}_{n,p}(f;x)|, \tag{9}$$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_\omega; \widetilde{V}_{n,p}; x) = \sup_{f\in C^{\psi}_{\beta}H_\omega} |f(x) - \widetilde{V}_{n,p}(f;x)|, \tag{10}$$

при довільних $x\in\mathbb{R}$, $\psi\in\mathcal{D}_q$, $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$.

Для формулювання основних результатів введемо такі позначення:

$$K_{q,p}(u) = 2^{-1/u} \left\| \frac{\sqrt{1-2q^p\cos pt + q^{2p}}}{1-2q\cos t + q^2} \right\|_u, \qquad 1\leqslant u\leqslant\infty, \qquad q\in(0,1), \qquad p\in\mathbb{N}, \tag{11}$$

$$\varepsilon_m = \sup_{k\geqslant m} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|. \tag{12}$$

Теорема 1. *Нехай $\psi\in\mathcal{D}_q$, $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\leqslant s\leqslant\infty$, n, $p\in\mathbb{N}$, $p\leqslant n$ і $\omega(t)$ — опуклий вгору модуль неперервності, що задовольняє умову $\lim\limits_{t\to0}(\omega(t)/t)=\infty$. Тоді для довільного $x\in\mathbb{R}$ при $n-p\to\infty$ і $p\to\infty$ мають місце асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; \widetilde{V}_{n,p}; x) = \frac{\psi(n-p+1)}{p} \Bigg(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+\frac{1}{s'}}} K_{q,p}(s') + \\ + O(1)\bigg(\frac{1}{(n-p+1)(1-q)^3} + \frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^3} + \frac{\psi(n)}{\psi(n-p+1)} \frac{p}{1-q} \bigg) \Bigg), \tag{13}$$

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_\omega; \tilde{V}_{n,p}; x) = \frac{\psi(n-p+1)}{p} \Bigg(\frac{4}{\pi^2} \frac{1-q^{2p}}{1-q^2} \mathbf{K}(q^p) \int_0^{\pi/2} \omega\bigg(\frac{2t}{n-p+1}\bigg) \sin t dt + \\ + O(1)\bigg(\frac{\omega(\pi)}{(n-p+1)(1-q)^3} + \omega\bigg(\frac{1}{n-p+1}\bigg) \bigg(\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^3} + \frac{\psi(n)}{\psi(n-p+1)} \frac{p}{1-q} \bigg)\bigg)\Bigg), \tag{14}$$

де $s' = \dfrac{s}{s-1}$, $\mathbf{K}(\rho) = \int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{\sqrt{1-\rho^2\sin^2 t}}$ *— повний еліптичний інтеграл першого роду,* $K_{q,p}(u)$ *та* ε_{n-p+1} *означені рівностями* (11) *та* (12) *відповідно, а* $O(1)$ *— величини, рівномірно обмежені за всіма розглядуваними параметрами.*

Доведення. З леми 2 роботи [3, с. 287] випливає, що за умови $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ для довільної функції $f \in C^{\psi}_{\beta}X$, де $X = L_s$ або $X = C$, у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ має місце рівність

$$\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x) = \rho_{n,p}(f;x) + O(1)E_n(f^{\psi}_{\beta})_X \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k), \tag{15}$$

в якій $\rho_{n,p}(f;x) = f(x) - V_{n,p}(f;x)$, $E_n(\varphi)_X$ — найкраще наближення функції φ тригонометричними поліномами порядку, не вищого ніж $n-1$, в метриці простору X, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

З леми 1 роботи [4, с. 379] випливає, що коли $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, то має місце нерівність

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k) \leqslant \psi(n)\left(\frac{1}{1-q} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)(1-q-\varepsilon_n)}\right). \tag{16}$$

При досить великих значеннях n маємо $\varepsilon_n < (1-q)/2$, а отже, при $n \to \infty$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(n) = O(1)\frac{\psi(n)}{1-q}. \tag{17}$$

Розглянувши точні верхні межі від модулів обох частин у рівності (15) за класом $C^{\psi}_{\beta,s}$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, з урахуванням (17) отримаємо оцінку

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; \widetilde{V}_{n,p}; x) = \mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; V_{n,p}) + O(1)\frac{\psi(n)}{1-q}, \tag{18}$$

де $\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}; V_{n,p}) = \sup\limits_{f \in C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}} |f(x) - V_{n,p}(f;x)|$. З роботи [5, с. 9] випливає, що коли $\psi \in \mathcal{D}_q$, $q \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant s \leqslant \infty$, $n, p \in \mathbb{N}$ та $p \leqslant n$, то при $n - p \to \infty$ і $p \to \infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta,s}; V_{n,p}) = \\ = \frac{\psi(n-p+1)}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+\frac{1}{s'}}} K_{q,p}(s') + O(1)\left(\frac{1}{(n-p+1)(1-q)^3} + \frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^3}\right)\right), \tag{19}$$

де $s' = s/(s-1)$, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів.

На основі (18) та (19) отримаємо рівність (13).

Враховуючи очевидні співвідношення $1 - q^p \leqslant \sqrt{1 - 2q^p\cos pt + q^{2p}} \leqslant 1 + q^p$, можемо записати

$$K_{q,p}(s') = 2^{-1/s'}\left\|\frac{1}{1-2q\cos t + q^2}\right\|_{s'} + O(1)\frac{q^p}{(1-q)^2}. \tag{20}$$

Оскільки $2^{-1/s'}\left\|\dfrac{1}{1-2q\cos t+q^2}\right\|_{s'}\geqslant\dfrac{1}{(1+q)^2}$, то, як випливає з (20), формула (13) є асимптотичною рівністю при $p\to\infty$, $n-p\to\infty$.

Якщо $f\in C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, то з (15) та (17) маємо

$$\widetilde{\rho}_{n,p}(f;x)=\rho_{n,p}(f;x)+O(1)E_n(f^{\psi}_{\beta})_C\frac{\psi(n)}{1-q}. \tag{21}$$

Внаслідок нерівності Джексона (див., наприклад, [6, с. 61]) існує абсолютна стала $K>0$ така, що $E_n(f^{\psi}_{\beta})_C\leqslant K\omega(1/n)$, тому, розглянувши точні верхні межі від модулів обох частин рівності (21) за класом $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, отримаємо

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega};\widetilde{V}_{n,p};x)=\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega};V_{n,p})+O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\psi(n)}{1-q}. \tag{22}$$

З роботи [5, с. 11] випливає, що коли $\psi\in\mathcal{D}_q$, $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, n, $p\in\mathbb{N}$, $p\leqslant n$, а $\omega(t)$ — опуклий вгору модуль неперервності, що задовольняє умову $\lim\limits_{t\to0}(\omega(t)/t)=\infty$, то при $n-p\to\infty$ і $p\to\infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H_{\omega};V_{n,p})=\frac{\psi(n-p+1)}{p}\Bigg(\frac{4}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n-p+1}\right)\sin t\,dt+$$
$$+O(1)\left(\frac{\omega(\pi)}{(n-p+1)(1-q)^3}+\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^3}\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\right)\Bigg), \tag{23}$$

де $\mathbf{K}(\rho)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду, а $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно всіх розглядуваних параметрів. Із (22) та (23) отримуємо рівність (14). Теорему доведено.

У випадку класів інтегралів Пуассона $C^q_{\beta}\mathfrak{N}$ з теореми 1 отримуємо таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай $q\in(0,1)$, $\beta\in\mathbb{R}$, $1\leqslant s\leqslant\infty$, $n,p\in\mathbb{N}$, $p\leqslant n$ і $\omega(t)$ — опуклий вгору модуль неперервності, що задовольняє умову $\lim\limits_{t\to0}(\omega(t)/t)=\infty$. Тоді для довільного $x\in\mathbb{R}$ при $n-p\to\infty$ і $p\to\infty$ мають місце асимптотичні рівності*

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta,s};\widetilde{V}_{n,p};x)=\frac{q^{n-p+1}}{p}\left(\frac{\|\cos t\|_{s'}}{\pi^{1+\frac{1}{s'}}}K_{q,p}(s')+O(1)\frac{1}{(n-p+1)(1-q)^3}+\frac{pq^{p-1}}{1-q}\right),$$

$$\mathcal{E}(C^q_{\beta}H_{\omega};\widetilde{V}_{n,p};x)=\frac{q^{n-p+1}}{p}\Bigg(\frac{4}{\pi^2}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)\int\limits_0^{\pi/2}\omega\left(\frac{2t}{n-p+1}\right)\sin t\,dt+$$
$$+O(1)\left(\frac{\omega(\pi)}{(n-p+1)(1-q)^3}+\omega\left(\frac{1}{n-p+1}\right)\frac{pq^{p-1}}{1-q}\right)\Bigg),$$

де $s'=s/(s-1)$, $\mathbf{K}(\rho)$ — повний еліптичний інтеграл першого роду, величина $K_{q,p}(u)$ означена рівністю (11), а $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені за всіма розглядуваними параметрами.

Прикладами опуклих модулів неперервності $\omega(t)$, що задовольняють умову $\lim\limits_{t\to 0}(\omega(t)/t) = \infty$, є функції $\omega(t) = t^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $\omega(t) = \ln^{\beta}(t+1)$, $\beta \in (0,1)$, та інші. Відзначимо, що у випадку $\omega(t) = t^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, класи H_{ω} перетворюються у відомі класи Гельдера порядку α, що позначаються через H^{α}. В цьому випадку рівність (14) набуває вигляду

$$\mathcal{E}(C^{\psi}_{\beta}H^{\alpha}; \widetilde{V}_{n,p}; x) = \frac{\psi(n-p+1)}{p}\left(\frac{2^{\alpha+2}}{\pi^2(n-p+1)^{\alpha}}\frac{1-q^{2p}}{1-q^2}\mathbf{K}(q^p)\int\limits_0^{\pi/2} t^{\alpha}\sin t dt + \right.$$
$$\left. + O(1)\left(\frac{\pi^{\alpha}}{(n-p+1)(1-q)^3} + \frac{1}{(n-p+1)^{\alpha}}\left(\frac{\varepsilon_{n-p+1}}{(1-q)^3} + \frac{\psi(n)}{\psi(n-p+1)}\frac{p}{1-q}\right)\right)\right).$$

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. Ч. 1. – Київ, 2002. – 427 с. – (Праці Інституту математики НАН України; Т. 40).
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – Москва: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.
3. *Сердюк А. С., Войтович В. А.* Наближення класів цілих функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – **7**, № 1. – С. 274–297.
4. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Приближение суммами Фурье и наилучшие приближения на классах аналитических функций // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 3. – С. 375–395.
5. *Serdyuk A. S., Ovsii Ie. Yu., Musienko A. P.* Approximation of classes of analytic functions by de la Vallee Poussin sums in uniform metric. – arXiv:1112.0967. – 14 p.
6. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. Ч. 2. – Київ, 2002. – 468 с. – (Праці Інституту математики НАН України; Т. 40).

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 20.06.2012

В. А. Войтович, А. С. Сердюк

Приближение классов аналитических функций интерполяционными аналогами сумм Валле Пуссена

Получены асимптотические равенства для точных верхних границ приближений интерполяционными аналогами сумм Валле Пуссена на классах 2π-периодических функций $C^{\psi}_{\beta,s}$ и $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, которые задаются мультипликаторами $\psi(k)$ и сдвигами по аргументу $\beta \in \mathbb{R}$, при условии, что последовательности $\psi(k)$ удовлетворяют условию Даламбера $\mathcal{D}_q$: $\lim\limits_{k\to\infty}\psi(k+1)/\psi(k) = q$, $q \in (0,1)$. В этом случае функции из указанных классов допускают регулярное продолжение в фиксированную полосу $|\operatorname{Im} z| < \ln(1/q)$ комплексной плоскости, т. е. они являются аналитическими функциями.

V. A. Voytovich, A. S. Serdiyk

Approximation of classes of analytic functions by interpolation analogs of Vallée–Poussin sums

We have found asymptotic estimates for the least upper bounds of approximations by the interpolation analogs of Vallée–Poussin sums on the classes of 2π-periodic functions $C^{\psi}_{\beta,s}$ and $C^{\psi}_{\beta}H_{\omega}$, that are set by multipliers $\psi(k)$ and by shifts by the argument β_k under condition that the sequences $\psi(k)$ satisfy the d'Alembert condition D_q, $q \in (0,1)$. In this case, the functions of these classes allow a regular continuation in a fixed strip $|\operatorname{Im} z| < \ln(1/q)$ of the complex plane i. e., they are analytic functions.