



УДК 517.9:519.6

© 2012

**В. М. Булавацкий**

### **Численное моделирование динамики некоторых аномальных процессов переноса**

*(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины И. Н. Парасюком)*

*Выполнено численное моделирование динамики некоторых миграционных процессов в рамках субдиффузионной модели распределенного порядка. Сформулирована соответствующая нелинейная краевая задача для моделирования аномального процесса геомиграции солевых растворов, разработан алгоритм ее приближенного решения, приведены результаты численной реализации указанного алгоритма.*

Вопросы математического моделирования динамики систем, описывающих пространственно-временные процессы геофильтрации и массопереноса, в настоящее время представляют значительный интерес, в частности, при решении задач охраны подземных вод и водозаборов от загрязнений, являющихся (часто на фоне сложных горно-геологических условий) результатом действия техногенных факторов. Следует отметить, что в сложных горно-геологических условиях существенно проявляются эффекты неравновесности геомиграционных процессов, что обусловлено рядом причин, например сложностью пространственно-временной структуры среды, ее неоднородностью, кавернозностью и т. д. [1]. Попытки учесть указанные эффекты при теоретическом описании процессов переноса в насыщенной геопористой среде стимулировали разработку соответствующих локально-неравновесных математических моделей [2, 3]. Так, в работе [4] в рамках теории аномальной диффузии [5] построена математическая модель для исследования динамики геомиграционных процессов в насыщенной соевыми растворами геопористой среде в условиях значительной временной нелокальности и разработана методика численного решения соответствующих этой модели краевых задач.

Данная работа посвящена разработке методики численного моделирования локально-неравновесных во времени геомиграционных процессов в рамках субдиффузионной модели, описываемой уравнениями распределенного порядка [6–8], в частности рассмотрена задача моделирования динамики фильтрационно-консолидационного процесса в насыщенной соевым раствором геопористой среде. Полученные результаты могут быть применены для математического моделирования динамики миграционных процессов в геопористых средах фрактальной структуры в условиях временной нелокальности.

**Разностный метод решения первой краевой задачи для уравнения аномальной диффузии распределенного порядка.** В области  $(0, l) \times (0, T]$  рассмотрим первую краевую задачу для обобщенного уравнения диффузии [6–8]

$$D_t^{(\lambda)} u(x, t) = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - qu + f(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3)$$

где введены обозначения [8]:

$$D_t^{(\lambda)} u = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda(\gamma) D_t^{(\gamma)} u d\gamma; \quad (4)$$

$D_t^{(\gamma)}$  — оператор регуляризованной дробной производной [9] по временной переменной порядка  $\gamma$ ,  $0 \leq \alpha < \gamma < \beta \leq 1$ ,  $\lambda(\gamma) > 0$ ,  $a > 0$ ,  $q \geq 0$ .

Введем в рассмотрение сеточные области  $\omega_h = \{x_i: x_i = ih \ (i = \overline{0, m})\}$ ,

$$\omega_{\tau} = \{t_j: t_j = j\tau \ (j = \overline{0, n})\}, \quad \omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_{\tau}, \quad \omega_{h_*} = \{\gamma_k: \gamma_k = \alpha + kh_* \ (k = \overline{0, N})\},$$

где  $h, h_*, \tau$  — шаги сетки по переменным  $x, \gamma, t$  соответственно. Применяя к (4) квадратурную формулу трапеций, аппроксимируем на сетке  $\omega_{h_*}$  уравнение (1) таким уравнением:

$$\frac{h_*}{2} \left( \lambda(\alpha) D_t^{(\alpha)} u + \lambda(\beta) D_t^{(\beta)} u + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \lambda(\gamma_k) D_t^{(\gamma_k)} u \right) = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - qu + f(x, t). \quad (5)$$

Задаче (5), (2), (3) поставим в соответствие на сетке  $\omega_{h\tau}$  следующую разностную схему:

$$\tilde{\Delta}_t y = \frac{1}{2} \Lambda(\hat{y} + y) + \varphi, \quad (6)$$

$$y_0 = y_m = 0, \quad y(x, 0) = u_0(x), \quad (7)$$

где обозначено

$$\Lambda y = ay_{\bar{x}x} - qy, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad y = y^j, \quad \varphi = f(x, t_{j+1/2}),$$

$$\tilde{\Delta}_t y = \frac{h_*}{2} \left( \lambda(\alpha) \Delta_t^{(\alpha)} y + \lambda(\beta) \Delta_t^{(\beta)} y + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \lambda(\gamma_k) \Delta_t^{(\gamma_k)} y \right),$$

$$\Delta_t^{(\alpha)} y = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^j b_s^{(j)}(\alpha) y_t^s,$$

$$b_s^{(j)}(\alpha) = \tau^{1-\alpha} ((j-s+1)^{1-\alpha} - (j-s)^{1-\alpha}), \quad \Delta_t^{(\beta)} y = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{s=0}^j d_s^{(j)}(\beta) y_t^s,$$

$$d_s^{(j)}(\beta) = \tau^{1-\beta}((j-s+1)^{1-\beta} - (j-s)^{1-\beta}), \quad \Delta_t^{(\gamma_k)} y = \frac{1}{\Gamma(2-\gamma_k)} \sum_{s=0}^j c_s^{(j)}(\gamma_k) y_t^s,$$

$$c_s^{(j)}(\gamma_k) = \tau^{1-\gamma_k}((j-s+1)^{1-\gamma_k} - (j-s)^{1-\gamma_k}), \quad y_t^s = \frac{y^{s+1} - y^s}{\tau},$$

$\Gamma(z)$  — гамма-функция Эйлера [10].

Отметим, что в классе достаточно гладких функций справедливо соотношение

$$\frac{h_*}{2} \left( \lambda(\alpha) D_t^{(\alpha)} u + \lambda(\beta) D_t^{(\beta)} u + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \lambda(\gamma_k) D_t^{(\gamma_k)} u \right) = \tilde{\Delta}_t u + O(\tau).$$

Расписывая в (6) соответствующие разностные операторы и приводя подобные члены, получаем систему уравнений

$$A y_{i-1}^{j+1} - C y_i^{j+1} + A y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j \quad (i = \overline{1, m-1}; j = \overline{0, n}), \quad (8)$$

где

$$F_i^j = \frac{a\tau}{2h^2} (y_{i+1}^j + y_{i-1}^j) + \left( \rho_{j,N}^{(j)} - \rho_{j-1,N}^{(j)} - \tau \left( \frac{q}{2} + \frac{a}{h^2} \right) \right) y_i^j + R + \tau \varphi_i^j, \quad A = \frac{a\tau}{2h^2},$$

$$R = \rho_{j-1,N}^{(j)} y_i^{j-1} - \tau \sum_{s=0}^{j-2} \rho_{s,N}^{(j)} y_t^s, \quad C = \frac{a\tau}{h^2} + \frac{q\tau}{2} + \rho_{j,N}^{(j)},$$

$$\rho_{s,N}^{(j)} = \frac{h_*}{2} \left( \frac{\lambda(\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} b_s^{(j)}(\alpha) + \frac{\lambda(\beta)}{\Gamma(2-\beta)} d_s^{(j)}(\beta) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\lambda(\gamma_k)}{\Gamma(2-\gamma_k)} c_s^{(j)}(\gamma_k) \right) \quad (s = \overline{0, j}).$$

Система (8) эффективно решается методом прогонки [11, 12]. Неравенство

$$D = |C| - 2|A| = \frac{q\tau}{2} + \rho_{j,N}^{(j)} > 0$$

определяет устойчивость прогонки. На основании принципа максимума [12] имеем неравенство

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \left\| \frac{F}{D} \right\|_C, \quad (9)$$

где  $\|y\|_C = \max_{0 \leq i \leq m} |y_i|$ .

С учетом неравенства [13]  $(j+1)^{1-\gamma} - 2j^{1-\gamma} + (j-1)^{1-\gamma} < 0$  ( $\forall \gamma \geq 1$ ) имеем

$$|R| \leq \max_{0 \leq s \leq j-1} \|y^s\|_C \tau^{1-\beta} (2^{1-\alpha} - 1) \omega_\lambda^N, \quad (10)$$

где

$$\omega_\lambda^N = \frac{h_*}{2} \left( \frac{\lambda(\alpha)}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\lambda(\beta)}{\Gamma(2-\beta)} + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\lambda(\gamma_k)}{\Gamma(2-\gamma_k)} \right). \quad (11)$$

При выполнении условия

$$\tau^\alpha \leq (2 - 2^{1-\alpha})h^2\omega_\lambda^N \quad (12)$$

с учетом неравенства (10) получаем оценку для  $F$  в виде

$$\|F^j\|_C \leq \tau^{1-\beta}\omega_\lambda^N \max_{0 \leq s \leq j} \|y^s\|_C + \tau \max_{0 \leq s \leq j} \|\varphi^s\|_C. \quad (13)$$

Тогда, на основании неравенства (9), с учетом (13) и неравенства  $D \geq \rho_{j,N}^{(j)}$  получаем

$$\|y^{j+1}\|_C \leq \|y^0\|_C + \frac{\tau^\alpha}{\omega_\lambda^N} \sum_{\nu=0}^j \|\varphi^\nu\|_C, \quad (14)$$

где  $\omega_\lambda^N$  дается соотношением (11). Отсюда легко находится оценка для погрешности  $z = y - u$  ( $u$  — непрерывное решение)

$$\|z^{j+1}\|_C \leq \frac{\tau^\alpha}{\omega_\lambda^N} \sum_{\nu=0}^j \|\psi^\nu\|_C, \quad (15)$$

где  $\psi = \frac{1}{2}\Lambda(\hat{u} + u) + \varphi - \tilde{\Delta}_t u$ .

Неравенства (14), (15) выражают устойчивость разностной задачи (6), (7) по начальным данным и правой части, а также сходимость схемы в равномерной метрике при выполнении условия (12). Следует отметить, что указанное условие устойчивости (12) для разностной схемы, соответствующей уравнению диффузии распределенного порядка, с точностью до не зависящего от  $\tau$  постоянного множителя совпадает с соответствующим условием устойчивости [13] разностной схемы для уравнения диффузии дискретного дробного порядка.

**Численно-аналитическое решение задачи.** На основании метода суммарных представлений (дискретный аналог метода интегральных преобразований [14]) ниже построено численно-аналитическое (замкнутое) решение краевой задачи (1)–(4), непрерывное по временной и дискретное по геометрической переменной.

Не нарушая общности, положим  $\alpha = 0$  и, применяя к (4) квадратурную формулу трапеций, аппроксимируем на сетке  $\omega_{h_*}$  уравнение (1) следующим:

$$\frac{h_*}{2} \left( \lambda(\beta) D_t^{(\beta)} u + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \lambda(\gamma_k) D_t^{(\gamma_k)} u \right) = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( q + \frac{\lambda(0)h_*}{2} \right) u + f(x, t). \quad (16)$$

На сетке  $\omega_h$  поставим в соответствие задаче (16), (2), (3) дифференциально-разностную задачу вида

$$\begin{aligned} \frac{h_*}{2} \left( \lambda(\beta) D_t^{(\beta)} \vec{u}(t) + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \lambda(\gamma_k) D_t^{(\gamma_k)} \vec{u}(t) \right) = \\ = \frac{a}{h^2} (T^{(m-1)} - 2E) \vec{u}(t) - \left( q + \frac{\lambda(0)h_*}{2} \right) \vec{u}(t) + \vec{f}(t), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\vec{u}(0) = \vec{u}_0, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}\vec{u}(t) &= [u_1(t), u_2(t), \dots, u_{m-1}(t)]^T; & \vec{f}(t) &= [f_1(t), f_2(t), \dots, f_{m-1}(t)]^T; \\ \vec{u}_0 &= [u_0(x_1), u_0(x_2), \dots, u_0(x_{m-1})]^T = [u_{0_1}, u_{0_2}, \dots, u_{0_{m-1}}]^T;\end{aligned}$$

$u_i(t) = u(x_i, t)$  ( $i = \overline{1, m-1}$ );  $T^{(m-1)}$  — квадратная матрица порядка  $m-1$ , определенная в [14];  $E$  — единичная матрица  $(m-1)$ -го порядка.

Введем в рассмотрение  $P$ -трансформации векторов  $\vec{u}$ ,  $\vec{f}$ ,  $\vec{u}_0$  соотношениями

$$\vec{\tilde{u}}(t) = P^{(m-1)}\vec{u}(t), \quad \vec{\tilde{f}}(t) = P^{(m-1)}\vec{f}(t), \quad \vec{\tilde{u}}_0 = P^{(m-1)}\vec{u}_0,$$

где  $P^{(m-1)}$  — фундаментальная по отношению к матрице  $T^{(m-1)}$  матрица порядка  $m-1$ , определенная соотношением [14]

$$P^{(m-1)} = [p_{kj}]_{k,j=1}^{m-1} = \sqrt{\frac{2}{m}} \left[ \sin\left(\frac{\pi kj}{m}\right) \right]_{k,j=1}^{m-1}. \quad (19)$$

Умножая (17), (18) слева на матрицу  $P^{(m-1)}$ , с учетом равенства [14]  $T^{(m-1)} = P^{(m-1)}\Lambda^{(m-1)}P^{(m-1)}$  ( $\Lambda^{(m-1)} = [\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_{m-1}^*]$  — диагональная матрица собственных чисел матрицы  $T^{(m-1)}$ ,  $\lambda_k^* = 2 \cos(\pi k/m)$  ( $k = \overline{1, m-1}$ )), получаем в изображениях задачу Коши, записываемую в скалярной форме в виде

$$D_t^{(\beta)}\hat{u}_i(t) - \tilde{\lambda}D_t^{(\gamma_{N-1})}\hat{u}_i(t) - \sum_{k=1}^{N-2} A_k D_t^{(\gamma_k)}\hat{u}_i(t) - \tilde{A}_i\hat{u}_i(t) = \hat{F}_i(t) \quad (i = \overline{1, m-1}), \quad (20)$$

$$\hat{u}_i(0) = \hat{u}_{0_i} \quad (i = \overline{1, m-1}). \quad (21)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\hat{u}_i(0) &= \sum_{k=1}^{m-1} p_{ik}u_{0_k} \quad (i = \overline{1, m-1}); & \tilde{\lambda} &= -\frac{2\lambda(\gamma_{N-1})}{\lambda(\beta)}; \\ A_k &= -\frac{2\lambda(\gamma_k)}{\lambda(\beta)} \quad (k = \overline{1, N-2}); & \hat{F}_i(t) &= \frac{2}{\lambda(\beta)h_*}\hat{f}_i(t) \quad (i = \overline{1, m-1}); \\ \tilde{A}_i &= \frac{1}{\lambda(\beta)} \left( \frac{2a}{h^2 h_*}(\lambda_i^* - 2 - q) - \lambda(0) \right) \quad (i = \overline{1, m-1}); & \lambda(\beta) &\neq 0.\end{aligned}$$

Решение задачи (20), (21), согласно [9], имеет вид

$$\hat{u}_i(t) = \hat{u}_{0_i}\Phi_i(t) + \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} G_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N-2}; \gamma_{N-1}, \tilde{\lambda}}^{(i)}(t-\tau)\hat{F}_i(\tau) d\tau \quad (i = \overline{1, m-1}), \quad (22)$$

где функции  $\Phi_i$ ,  $G^{(i)}$  записываются в замкнутом виде в терминах обобщенной функции Райта [9] (ввиду громоздкости соответствующие соотношения здесь не приводятся).

Возвращаясь в соотношениях (22) к оригиналам по геометрической переменной, получаем решение дифференциально-разностной задачи (17), (18) в виде

$$u_i(t) = \chi_i(t) + \sum_{k=1}^{m-1} \int_0^t \Omega_{ik}(t-\tau) f_k(\tau) d\tau \quad (i = \overline{1, m-1}), \quad (23)$$

где

$$\Omega_{ik}(t-\tau) = \frac{2(t-\tau)^{\beta-1}}{\lambda(\beta)h_*} \sum_{l=1}^{m-1} p_{il} p_{lk} G_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{N-2}; \gamma_{N-1}, \beta; \tilde{\lambda}}^{(l)}(t-\tau), \quad (24)$$

$$\chi_i(t) = \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} p_{il} p_{lk} \Phi_l(t) u_{0k} \quad (i = \overline{1, m-1}; k = \overline{1, m-1}).$$

Данное решение обладает, в частности, преимуществом, состоящем в возможности выборочного счета значений искомой функции в фиксированной точке сеточной области в заданный момент времени. Указанное свойство позволяет во многих случаях сократить время вычисления решения и удобно в инженерных приложениях.

**Численное моделирование динамики локально-неравновесного во времени процесса геомиграции солевых растворов на основе субдиффузионной модели распределенного порядка.** Математическая модель для изучения динамики процесса миграции солевых растворов в геопористой среде в условиях сильной временной нелокальности построена в [4] и базируется на системе уравнений дискретного дробного порядка для полей поровых давлений  $p(x, t)$  и концентрации в жидкой фазе  $C(x, t)$ . В рамках теории аномальных субдиффузионных процессов распределенного порядка [6–8] соответствующая модель может быть сформулирована в виде следующей системы уравнений с производными распределенного порядка от искомых функций:

$$D_t^{(\lambda)} p(x, t) = \kappa \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (25)$$

$$\sigma D_t^{(\lambda)} C(x, t) = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v_x \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (26)$$

где  $v_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial C}{\partial x}$  — скорость фильтрации;  $k$  — коэффициент фильтрации;  $\mu$  — вязкость жидкости;  $\nu$  — коэффициент осмоса,  $\kappa = k/(\mu\beta_1^*)$ ,  $\eta = \nu/\beta_1^*$ ,  $\beta_1^*$  — коэффициент упругоёмкости пласта;  $D_t^{(\lambda)}$  — оператор производной распределенного порядка вида (4) ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ );  $\sigma$  — пористость среды;  $d$  — коэффициент диффузии.

Таким образом, исследование динамики полей давлений и концентраций при геофильтрации солевых растворов в условиях временной нелокальности процесса, например в случае массива конечной мощности  $l$  с проницаемыми границами, сводится к решению в области  $(0, l) \times (0, +\infty)$  системы уравнений (25), (26) с краевыми условиями

$$p(0, t) = 0, \quad p(l, t) = 0, \quad p(x, 0) = p_0, \quad (27)$$

$$C(0, t) = C_0, \quad C'_x(l, t) = 0, \quad C(x, 0) = 0, \quad (28)$$

где  $p_0$  — начальное поровое давление;  $C_0$  — заданное значение концентрации солей на входе фильтрационного потока.

Введем в рассмотрение безразмерные переменные и параметры соотношениями

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{l}, & t' &= \left(\frac{\kappa}{l^2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} t, & C' &= \frac{C}{C_0}, & p' &= \frac{p}{p_0}, & d' &= \frac{d}{\kappa}, \\ \nu' &= \frac{\nu C_0}{\kappa}, & k' &= \frac{k p_0}{\mu \kappa}, & \eta' &= \frac{\eta C_0}{\kappa p_0} \quad (\gamma = \text{const}). \end{aligned} \quad (29)$$

Переходя в (25)–(28) к безразмерным переменным согласно соотношениям (29) и опуская в дальнейшем знак “штрих” над безразмерными величинами, получаем нелинейную краевую задачу

$$D_t^{(\lambda)} p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (30)$$

$$\sigma D_t^{(\lambda)} C = d \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - v \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (31)$$

$$p(0, t) = p(1, t) = 0, \quad p(x, 0) = 1, \quad (32)$$

$$C(0, t) = 1, \quad C'_x(1, t) = 0, \quad C(x, 0) = 0, \quad (33)$$

где  $v = -k \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial C}{\partial x}$ .

Конечноразностная методика построения приближенного решения краевой задачи (30)–(33) кратко состоит в следующем.

Введем в рассмотрение сеточную область  $\omega_{h\tau}$  и используем аппроксимацию непрерывных производных вида

$$D_t^{(\lambda)} u \approx \Delta_t^{(\lambda)} u,$$

где

$$\Delta_t^{(\lambda)} u = \sum_{s=0}^j \rho_s^{(j)} u_t^s, \quad \rho_s^{(j)} = \int_0^1 \frac{\lambda(\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)} b_s^{(j)}(\gamma) d\gamma,$$

$$b_s^{(j)}(\gamma) = \tau^{1-\gamma} ((j-s+1)^{1-\gamma} - (j-s)^{1-\gamma}), \quad u_t^s = \frac{u^{s+1} - u^s}{\tau},$$

$\lambda(\gamma) > 0$  — весовая функция.

Отметим, что в классе достаточно гладких функций справедливо соотношение  $D_t^{(\lambda)} u = \Delta_t^{(\lambda)} u + O(\tau)$ . Применяя для аппроксимации на сетке  $\omega_{h\tau}$  уравнений (30), (31) неявную шеститочечную разностную схему, имеем в стандартных обозначениях теории разностных схем [12] систему вида

$$\Delta_t^{(\lambda)} p = \frac{1}{2} (\widehat{p}_{\bar{x}x} + p_{\bar{x}x}) - \eta \widehat{C}_{\bar{x}x}, \quad (34)$$

$$\sigma \Delta_t^{(\lambda)} C = \frac{d}{2} (\widehat{C}_{\bar{x}x} + C_{\bar{x}x}) + \frac{1}{2} (k p_x - \nu C_x) (\widehat{C}_x + C_x). \quad (35)$$

Расписывая в соотношениях (34), (35) соответствующие разностные операторы и приводя подобные члены, получаем следующие системы линейных алгебраических уравнений:

$$Ap_{i-1}^{j+1} - Sp_i^{j+1} + Ap_{i+1}^{j+1} = -F_i^j \quad (i = \overline{1, m-1}; j = \overline{0, n}), \quad (36)$$

$$\tilde{A}_i^j C_{i-1}^{j+1} - \tilde{S}_i^j C_i^{j+1} + \tilde{B}_i^j C_{i+1}^{j+1} = -\tilde{F}_i^j \quad (i = \overline{1, m-1}; j = \overline{0, n}), \quad (37)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2h^2}, & S &= 2A + \frac{\rho}{\tau}, & \tilde{A}_i^j &= \frac{1}{2h} \left( \frac{d}{h} - v_i^j \right), & \tilde{B}_i^j &= \frac{1}{2h} \left( \frac{d}{h} + v_i^j \right), \\ \tilde{S}_i^j &= \sigma \frac{\rho}{\tau} + \tilde{A}_i^j + \tilde{B}_i^j, & v_i^j &= \frac{1}{4h} (k(p_{i+1}^j - p_{i-1}^j) - \nu(C_{i+1}^j - C_{i-1}^j)), \\ F_i^j &= \frac{\rho}{\tau} p_i^j - \sum_{s=0}^{j-1} \rho_s^{(j)} \frac{p_i^{s+1} - p_i^s}{\tau} + \frac{1}{2h^2} (p_{i-1}^j - 2p_i^j + p_{i+1}^j) - \frac{\eta}{h^2} (C_{i-1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i+1}^{j+1}), \\ \tilde{F}_i^j &= \sigma \frac{\rho}{\tau} C_i^j - \sigma \sum_{s=0}^{j-1} \rho_s^{(j)} \frac{C_i^{s+1} - C_i^s}{\tau} + \frac{d}{2h^2} (C_{i-1}^j - 2C_i^j + C_{i+1}^j) + \frac{v_i^j}{2h} (C_{i+1}^j - C_{i-1}^j), \\ \rho &= \int_0^1 \frac{\lambda(\gamma) \tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} d\gamma, & \sum_{s=0}^{j-1} (\cdot) &= 0 \quad \text{при} \quad j = 0. \end{aligned}$$

Разностные уравнения систем (36), (37), являясь трехточечными, эффективно решаются методом прогонки [11, 12]. При этом устойчивость метода прогонки вытекает из факта диагонального преобладания в матрицах коэффициентов этих систем алгебраических уравнений.

Вычислительный алгоритм для приближенного решения рассматриваемой задачи состоит в последовательном вычислении на данном временном слое значений концентрации  $C$  в соответствии с (37) и давления  $p$  — в соответствии с (36).

Численное моделирование динамики полей фильтрационных давлений и полей концентраций в рамках рассматриваемой локально-неравновесной во времени математической модели геомиграции (называемой в дальнейшем моделью распределенного порядка) выполнено относительно безразмерных переменных и параметров, определяемых соотношениями (29). Некоторые из полученных результатов для случая  $\lambda(\gamma) = H(\gamma) - H(\gamma - 1)$  ( $H$  — функция Хевисайда) графически изображены на рис. 1, где показана динамика полей поровых давлений для дробно-дифференциальной геомиграционной модели [4] дискретного порядка (кривые 1–4,  $\gamma = 0,8$ ) и модели распределенного порядка (кривые 1'–4') в различные моменты времени: 1, 1' —  $t = 0,15$ ; 2, 2' —  $t = 0,3$ ; 3, 3' —  $t = 0,45$ ; 4, 4' —  $t = 0,75$ .

Анализ результатов численных экспериментов позволяет сделать вывод о том, что за исключением начальной стадии процесса (для которой имеет место несколько ускоренное рассеивание полей давлений в рамках модели распределенного порядка) на всех последующих стадиях геомиграционного процесса имеем стойкое замедление процесса рассеивания полей поровых давлений, описываемых моделью распределенного порядка, по сравнению со случаем его описания дробно-дифференциальной моделью дискретного порядка (кри-



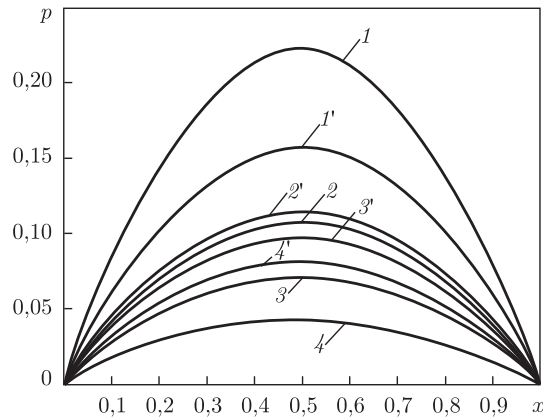


Рис. 1

вые 2, 2'; 3, 3'; 4, 4' на рис. 1). Кроме того, сопоставление результатов численных экспериментов, касающихся динамики соответствующих полей концентраций в жидкой фазе в рамках обоих упомянутых выше моделей, показывает заметное отставание во времени при формировании полей концентраций в случае описания процесса моделью распределенного порядка.

В заключение отметим, что компьютерные эксперименты свидетельствуют о качественном соответствии результатов моделирования динамики рассматриваемого геомиграционного процесса при описании его как моделью распределенного порядка (в рамках теории сверхмедленной диффузии [6–8]), так и дробно-дифференциальной моделью дискретного порядка [4].

1. Хасанов М. М., Булгакова Г. Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. – Москва; Ижевск: Изд. Ин-та компьютерных исследований, 2003. – 288 с.
2. Булавацький В. М., Кривонос Ю. Г., Скопецький В. В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. – Киев: Наук. думка, 2005. – 283 с.
3. Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопецький В. В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродиніміки. – Київ: Наук. думка, 2007. – 292 с.
4. Булавацький В. М. Математическая модель геoinформатики для исследования динамики локально-неравновесных геофильтрационных процессов // Пробл. управления и информатики. – 2011. – № 6. – С. 76–83.
5. Zaslavsky G. M. Chaos, fractional kinetics and anomalous transport // Phys. Reports. – 2002. – **371**. – P. 461–580.
6. Chechkin A. V., Gorenflo R., Sokolov I. M., Gonchar V. Yu. Distributed order time fractional diffusion equation // Fractional Calculus and Appl. Analysis. – 2003. – No 6. – P. 259–279.
7. Naber M. Distributed order fractional sub-diffusion // Fractals. – 2004. – **12**. – P. 23–32.
8. Kochubei A. N. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // J. of Math. Anal. and Appl. – 2008. – **340**, 1. – P. 252–281.
9. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 523 p.
10. Abramovitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions. – New York: Dover, 1965. – 831 p.
11. Ляшко И. И., Макаров В. Л., Скоробогатько А. А. Методы вычислений. – Киев: Вища шк., 1977. – 408 с.
12. Самарский А. А. Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1977. – 656 с.
13. Таукенова Ф. И., Штануков-Лафишев М. Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2006. – **46**. – № 10. – С. 1871–1881.

14. Положий Г. Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. – Киев: Вища шк., 1962. – 161 с.

*Институт кибернетики им. В. М. Глушкова  
НАН Украины, Киев*

*Поступило в редакцию 24.04.2012*

**В. М. Булавацький**

**Числове моделювання динаміки деяких аномальних процесів переносу**

*Виконано числове моделювання динаміки деяких міграційних процесів у рамках субдифузійної моделі розподіленого порядку. Сформульовано відповідну нелінійну крайову задачу для моделювання аномального процесу геоміграції сольових розчинів, розроблено алгоритм її наближеного розв'язання, наведено результати чисельної реалізації вказаного алгоритму.*

**V. M. Bulavatsky**

**Numerical modeling of the dynamics of some anomalous transfer processes**

*The numerical modeling of the dynamics of some migration processes in the frame of a sub-diffusion model of distributed order has been performed. The corresponding nonlinear boundary-value problem for the modeling of the anomalous geomigration of salt solutions is formulated, the algorithm of its approximate solution is developed, and the results of numerical realization of the specified algorithm are given.*