УДК 531.36

Д. М. Лила

Об устойчивости движения математического маятника, взаимодействующего со струной

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

В линейной и нелинейной постановках решена задача об устойчивости стационарных движений однозвенного маятника в гибридной модели механической системы, состоящей из горизонтально закрепленной струны, нагруженной колеблющейся сосредоточенной массой.

При исследовании устойчивости движения систем с распределенными параметрами эффективной является идея декомпозиции. В данной работе, согласно разделу 4.3 диссертации [1], исследуется проблема устойчивости стационарных движений однозвенного математического маятника, колеблющегося под влиянием малых колебаний взаимодействующей с ним упругой струны [2–9]. Система дифференциальных уравнений бесконечной размерности, описывающих эти движения, заменяется некоторым конечным приближением вследствие рассмотрения конечной линейной комбинации системы "координатных" функций, аппроксимирующих движение системы с бесконечным числом степеней свободы.

Данная работа является продолжением статьи [10].

Постановка задачи. Ограничиваясь в формуле (4.1) статьи [10] 2-й частичной суммой, рассмотрим систему трех нелинейных связанных осцилляторов. В нормальной форме будем иметь следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\dot\xi_1 = \xi_4, \qquad \dot\xi_2 = \xi_5, \qquad \dot\xi_3 = \xi_6,\\
&\dot\xi_4 = \beta_1 - \nu_1^2\xi_1 + mlu_{10}\times\\
&\qquad\times\left(\xi_6^2\cos\xi_3 - \frac{\left[\dfrac{g}{l}+a_1+a_2+\dfrac{\nu_1^2u_{10}}{l}\xi_1+\dfrac{\nu_2^2u_{20}}{l}\xi_2+b\xi_6^2\cos\xi_3\right]\sin^2\xi_3+\dfrac{k}{ml^2}\xi_6\sin\xi_3}{1+b\sin^2\xi_3}\right),\\
&\dot\xi_5 = \beta_2 - \nu_2^2\xi_2 + mlu_{20}\times\\
&\qquad\times\left(\xi_6^2\cos\xi_3 - \frac{\left[\dfrac{g}{l}+a_1+a_2+\dfrac{\nu_1^2u_{10}}{l}\xi_1+\dfrac{\nu_2^2u_{20}}{l}\xi_2+b\xi_6^2\cos\xi_3\right]\sin^2\xi_3+\dfrac{k}{ml^2}\xi_6\sin\xi_3}{1+b\sin^2\xi_3}\right),\\
&\dot\xi_6 = -\frac{\left[\dfrac{g}{l}+a_1+a_2+\dfrac{\nu_1^2u_{10}}{l}\xi_1+\dfrac{\nu_2^2u_{20}}{l}\xi_2+b\xi_6^2\cos\xi_3\right]\sin\xi_3+\dfrac{k}{ml^2}\xi_6}{1+b\sin^2\xi_3},\\
&\xi_0 = (\xi_{10},\ldots,\xi_{60})^T = (w_{01}, w_{02}, \varphi_0, \dot w_{01}, \dot w_{02}, \dot\varphi_0)^T,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где обозначено

$$\xi_1 = q_1, \qquad \xi_2 = q_2, \qquad \xi_3 = \varphi, \qquad \xi_4 = \dot q_1, \qquad \xi_5 = \dot q_2, \qquad \xi_6 = \dot\varphi,$$

$$a_1 = -\frac{u_{10}\beta_1}{l}, \qquad a_2 = -\frac{u_{20}\beta_2}{l}, \qquad b = -m(u_{10}^2 + u_{20}^2).$$

Здесь q_1, q_2 и φ — независимые координаты, определяющие положение точек струны в их нормальном смещении и положение маятника, соответственно; $u_{10} = u_1(y_0)$ и $u_{20} = u_2(y_0)$ — значения первых двух собственных функций спектральной задачи для нагруженной струны в точке подвеса; l — длина стержня; m — колеблющаяся сосредоточенная масса; $\beta_s = mgu_s(y_0)\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\nu_s^2\sin((2n-1)\pi y_0/L)}{\pi(2n-1)(\omega_{2n-1}^2-\nu_s^2)}\right]$, $s = 1, 2$; g — ускорение свободного падения, L — длина струны; ω_{2n-1}^2 и ν_s^2 — собственные значения спектральных задач для ненагруженной и нагруженной струны, соответственно.

Одно из состояний равновесия (нижнее) системы (1) имеет вид

$$\xi_1 = \frac{\beta_1}{\nu_1^2}, \qquad \xi_2 = \frac{\beta_2}{\nu_2^2}, \qquad \xi_3 = \cdots = \xi_6 = 0, \tag{2}$$

поэтому в переменных возмущенного движения

$$x_1 = \xi_1 - \frac{\beta_1}{\nu_1^2}, \qquad x_2 = \xi_2 - \frac{\beta_2}{\nu_2^2}, \qquad x_3 = \xi_3, \qquad \ldots, \qquad x_6 = \xi_6$$

данная система представима в виде

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x + \widetilde{f}(x), \tag{3}$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\nu_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{g}{l} & 0 & 0 & -\dfrac{k}{ml^2} \end{bmatrix};$$

$$\widetilde{f}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_{10}(c_1x_3^2 + c_2x_3x_6 + c_3x_6^2 + c_4x_1x_3^2 + c_5x_2x_3^2) \\ u_{20}(c_1x_3^2 + c_2x_3x_6 + c_3x_6^2 + c_4x_1x_3^2 + c_5x_2x_3^2) \\ d_1x_1x_3 + d_2x_2x_3 + d_3x_3^3 + d_4x_3^2x_6 - bx_3x_6^2 \end{bmatrix};$$

$$x = (x_1, \ldots, x_6)^T; \qquad c_1 = -mg; \qquad c_2 = -\frac{k}{l}; \qquad c_3 = ml; \qquad c_4 = -m\nu_1^2u_{10};$$

$$c_5 = -m\nu_2^2u_{20}; \qquad d_1 = -\frac{\nu_1^2u_{10}}{l}; \qquad d_2 = -\frac{\nu_2^2u_{20}}{l}; \qquad d_3 = \frac{g(1/6+b)}{l}; \qquad d_4 = \frac{kb}{ml^2}.$$

Исследуя влияние малых колебаний струны на колебания математического маятника в окрестности нижнего положения равновесия, исключим из системы (3) переменные x_1,

x_2, x_4, x_5, проинтегрировав соответствующие линеаризованные уравнения. Вследствие этого получим нелинейную нестационарную систему дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами второго порядка

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_3 = x_6, \qquad x_3(t_0) = \varphi_0,\\
&\dot{x}_6 = \left[-\frac{g}{l} + \frac{d_1}{\nu_1}(c_{24}\sin\nu_1 t - c_{14}\cos\nu_1 t) + \frac{d_2}{\nu_2}(c_{25}\sin\nu_2 t - c_{15}\cos\nu_2 t)\right]x_3 -\\
&\qquad - \frac{k}{ml^2}x_6 + d_3x_3^3 + d_4x_3^2x_6 - bx_3x_6^2, \qquad x_6(t_0) = \dot{\varphi}_0,
\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$c_{14} = \dot{w}_{01}\sin\nu_1 t_0 - \nu_1\left(w_{01} - \frac{\beta_1}{\nu_1^2}\right)\cos\nu_1 t_0; \quad c_{24} = \nu_1\left(w_{01} - \frac{\beta_1}{\nu_1^2}\right)\sin\nu_1 t_0 + \dot{w}_{01}\cos\nu_1 t_0;$$

$$c_{15} = \dot{w}_{02}\sin\nu_2 t_0 - \nu_2\left(w_{02} - \frac{\beta_2}{\nu_2^2}\right)\cos\nu_2 t_0; \quad c_{25} = \nu_2\left(w_{02} - \frac{\beta_2}{\nu_2^2}\right)\sin\nu_2 t_0 + \dot{w}_{02}\cos\nu_2 t_0.$$

Решение задачи об устойчивости в линейной постановке. Построим для линейного приближения системы (4) вначале матричнозначную вспомогательную функцию

$$U^{(2)}(t, x_3, x_6) = \begin{bmatrix} p_{20}x_3^2 & p_{11}(t)x_3x_6 \\ p_{11}(t)x_3x_6 & p_{02}x_6^2 \end{bmatrix},$$

а затем функцию Ляпунова

$$v^{(2)}(t, x_{36}) = \eta^T U^{(2)}(t, x_3, x_6)\eta, \tag{5}$$

где $x_{36} = (x_3, x_6)^T$; $\eta = (\eta_1, \eta_2)^T > 0$. Полная производная вспомогательной функции (5) вдоль решений линейного приближения системы (4) (обозначим его (4′)) может быть представлена в виде

$$\left.\frac{dv^{(2)}}{dt}\right|_{(2.4')} = s_3^{(2)}(t)x_3^2 + s_6^{(2)}(t)x_6^2,$$

где

$$s_3^{(2)}(t) = 2\eta_1\eta_2 p_{11}(t)\left[-\frac{g}{l} + \frac{d_1}{\nu_1}(c_{24}\sin\nu_1 t - c_{14}\cos\nu_1 t) + \frac{d_2}{\nu_2}(c_{25}\sin\nu_2 t - c_{15}\cos\nu_2 t)\right];$$

$$s_6^{(2)}(t) = 2\eta_1\eta_2 p_{11}(t) - 2\eta_2^2 p_{02}\frac{k}{ml^2}$$

и $p_{20} \equiv \mathrm{const} > 0$, $p_{02} \equiv \mathrm{const} > 0$, а непрерывно дифференцируемая функция $p_{11}(t)$ является ограниченным решением линейного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}
&\dot{p}_{11} - \frac{k}{ml^2}p_{11} =\\
&\qquad = -\frac{\eta_1}{\eta_2}p_{20} - \frac{\eta_2}{\eta_1}p_{02}\left[-\frac{g}{l} + \frac{d_1}{\nu_1}(c_{24}\sin\nu_1 t - c_{14}\cos\nu_1 t) + \frac{d_2}{\nu_2}(c_{25}\sin\nu_2 t - c_{15}\cos\nu_2 t)\right].
\end{aligned}$$

Одним из таких решений есть

$$p_{11}(t) = \frac{\dfrac{\eta_1}{\eta_2}p_{20} - \dfrac{\eta_2}{\eta_1}\dfrac{g}{l}p_{02}}{\dfrac{k}{ml^2}} -$$

$$- \frac{\eta_2}{\eta_1}p_{02}\left[\frac{d_1\left[\left(-\dfrac{k}{ml^2}\dfrac{c_{24}}{\nu_1} - c_{14}\right)\sin\nu_1 t + \left(-c_{24} + \dfrac{k}{ml^2}\dfrac{c_{14}}{\nu_1}\right)\cos\nu_1 t\right]}{\left(\dfrac{k}{ml^2}\right)^2 + \nu_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{d_2\left[\left(-\dfrac{k}{ml^2}\dfrac{c_{25}}{\nu_2} - c_{15}\right)\sin\nu_2 t + \left(-c_{25} + \dfrac{k}{ml^2}\dfrac{c_{15}}{\nu_2}\right)\cos\nu_2 t\right]}{\left(\dfrac{k}{ml^2}\right)^2 + \nu_2^2}\right].$$

Таким образом, достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (4) имеют вид

$$p_{20}p_{02} - p_{11}^2(t) > \mu > 0, \quad s_3^{(2)}(t) < -\mu, \quad s_6^{(2)}(t) < -\mu \quad \text{при всех} \quad t \in [t_0, \infty). \tag{6}$$

Решение задачи об устойчивости в нелинейной постановке. К нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{x}_3 + \frac{g}{l}x_3 = \left[\frac{d_1}{\nu_1}(c_{24}\sin\nu_1 t - c_{14}\cos\nu_1 t) + \frac{d_2}{\nu_2}(c_{25}\sin\nu_2 t - c_{15}\cos\nu_2 t)\right]x_3 -$$

$$- \frac{k}{ml^2}\dot{x}_3 + d_3 x_3^3 + d_4 x_3^2\dot{x}_3 - b x_3\dot{x}_3^2, \tag{7}$$

эквивалентному системе (4), применим асимптотический метод Крылова–Боголюбова. Для этого будем предполагать, что колебания маятника осуществляются при наличии малого трения в точке подвеса стержня к струне, совершающей, в свою очередь, малые колебания. Тогда в стандартной форме уравнение (7) запишется так:

$$\ddot{x}_3 + \frac{g}{l}x_3 = \varepsilon f(t, x_3, \dot{x}_3), \tag{8}$$

где $\varepsilon = ku_{10}$ — малый параметр;

$$f(t, x_3, \dot{x}_3) = \sum_{\substack{n=-2 \\ (n\neq 0)}}^{2} f_n(x_3, \dot{x}_3)e^{i\nu_n t} + f_0(x_3, \dot{x}_3); \qquad \nu_{-n} = -\nu_n; \qquad f_{-n} = \overline{f_n};$$

$$f_0(x_3, \dot{x}_3) = -\frac{1}{mu_{10}l^2}\dot{x}_3 + \frac{g(1/6 + b)}{klu_{10}}x_3^3 + \frac{b}{mu_{10}l^2}x_3^2\dot{x}_3 - \frac{b}{ku_{10}}x_3\dot{x}_3^2.$$

В нерезонансном случае

$$\omega^2 - [n\nu_1 + j\nu_2 + s\omega]^2 \neq 0 \tag{9}$$

(здесь $\omega = \sqrt{g/l}$), поэтому

$$n^2 + j^2 + (s^2 - 1)^2 \neq 0 \qquad (10)$$

при любых n, j, $s \in \mathbb{Z}$ и в первом приближении решение уравнения (8) ищем в виде

$$x_3 = a(t)\cos\psi(t), \qquad (11)$$

где амплитуда $a(t)$ и фаза $\psi(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a), \qquad \dot{\psi} = \omega + \varepsilon B_1(a), \qquad (12)$$

в которой

$$A_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega}\int\limits_0^{2\pi} f_0(x_3^0, \dot{x}_3^0)\sin\psi d\psi, \qquad B_1(a) = -\frac{1}{2\pi\omega a}\int\limits_0^{2\pi} f_0(x_3^0, \dot{x}_3^0)\cos\psi d\psi, \qquad (13)$$

причем $x_3^0 = a\cos\psi$, $\dot{x}_3^0 = -a\omega\sin\psi$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta_j = \nu_j t$, $j = 1, 2$. Таким образом,

$$A_1(a) = \frac{a}{2mu_{10}l^2}\left(\frac{ba^2}{4} - 1\right), \qquad B_1(a) = -\frac{1+4b}{16ku_{10}}\omega a^2 \qquad (14)$$

и из (12), (13) следует, что в первом приближении в нерезонансном случае колебания маятника под действием внешней нестационарной двухчастотной силы осуществляются по закону (11), где

$$a^2(t) = \frac{4}{b\left(1 - \left[1 - \dfrac{4}{ba_0^2}\right]e^{\frac{\varepsilon(t-t_0)}{mu_{10}l^2}}\right)}; \qquad (15)$$

$$\psi(t) = \omega\left\{t + \frac{ml^2(1+4b)}{4kb}\ln\left(1 + \frac{ba_0^2}{4}\left(e^{-\frac{\varepsilon(t-t_0)}{mu_{10}l^2}} - 1\right)\right)\right\} + \theta; \qquad (16)$$

$a_0 = \sqrt{\varphi_0^2 + \dot{\varphi}_0^2/\omega^2}$; $\theta = -\omega t_0 - \operatorname{arctg}(\dot{\varphi}_0/\omega\varphi_0)$. Квадрат мгновенной собственной частоты таких колебаний составляет

$$\omega_{\text{I}}^2 = \omega^2\left[1 - \frac{1+4b}{16}a^2(t)\right]^2, \qquad (17)$$

а единственными стационарными "колебаниями" является состояние $x_3 = \dot{x}_3 = 0$. Эквивалентный коэффициент затухания $\lambda_e^*(a) = -A_1(a) > 0$ при выполненном условии затухания колебаний

$$\lambda_e(a) = \frac{1}{2\pi\omega}\int\limits_0^{2\pi} f(0, x_3^0, \dot{x}_3^0)\sin\psi d\psi = -A_1(a) > 0$$

(всякое колебание в системе (4) приближается к $x_3 = x_6 = 0$ при любой амплитуде малых колебаний струны).

Резонансный случай в системе (4) может представиться при

$$\omega \pm [n\nu_1 + j\nu_2 + s\omega] = 0, \tag{18}$$

или же

$$\omega = \frac{p_1}{p_1^*}\nu_1 + \frac{p_2}{p_2^*}\nu_2, \tag{19}$$

где p_1, p_1^* и p_2, p_2^* — взаимно простые числа. В связи с этим вместо (8) будем рассматривать уравнение

$$\ddot{x}_3 + \left[\frac{p_1}{p_1^*}\nu_1 + \frac{p_2}{p_2^*}\nu_2\right]^2 x_3 = \varepsilon[f(t, x_3, \dot{x}_3) - \Delta x_3], \tag{20}$$

где расстройка $\varepsilon\Delta$ собственной и внешней частот определяется соотношением

$$\omega^2 = \left[\frac{p_1}{p_1^*}\nu_1 + \frac{p_2}{p_2^*}\nu_2\right]^2 + \varepsilon\Delta. \tag{21}$$

Вводя в рассмотрение фазовый угол $\vartheta = \psi - \left[\frac{p_1}{p_1^*}\nu_1 + \frac{p_2}{p_2^*}\nu_2\right]t$, закон движения маятника в первом приближении получим в виде

$$x_3 = a(t)\cos\left(\left[\frac{p_1}{p_1^*}\nu_1 + \frac{p_2}{p_2^*}\nu_2\right]t + \vartheta(t)\right) \tag{22}$$

после решения системы дифференциальных уравнений

$$\dot{a} = \varepsilon A_1(a, \vartheta), \qquad \dot{\vartheta} = \varepsilon B_1(a, \vartheta), \tag{23}$$

где

$$A_1(a, \vartheta) = -\frac{1}{8\pi^3\left[\frac{p_1}{p_1^*}\nu_1 + \frac{p_2}{p_2^*}\nu_2\right]} \sum_{\sigma^*=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma^*\vartheta} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t, x_3^0, \dot{x}_3^0) e^{-i\sigma^*\vartheta'} \sin\psi d\theta_1 d\theta_2 d\psi;$$

$$B_1(a, \vartheta) = \frac{\Delta}{2\left[\frac{p_1}{p_1^*}\nu_1 + \frac{p_2}{p_2^*}\nu_2\right]} - \frac{1}{8\pi^3 a\left[\frac{p_1}{p_1^*}\nu_1 + \frac{p_2}{p_2^*}\nu_2\right]} \sum_{\sigma^*=-\infty}^{\infty} e^{i\sigma^*\vartheta} \times \tag{24}$$

$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t, x_3^0, \dot{x}_3^0) e^{-i\sigma^*\vartheta'} \cos\psi d\theta_1 d\theta_2 d\psi$$

и обозначено $\vartheta' = \psi - \frac{p_1}{p_1^*}\theta_1 - \frac{p_2}{p_2^*}\theta_2$.

Возможные резонансные соотношения

$$\omega = \frac{\nu_j}{2}, \qquad j = 1, 2, \tag{25}$$

в исследуемой системе определим из условия “неисчезания” средней мощности внешней нестационарной малой силы $\varepsilon \sum\limits_{\substack{n=-2\\(n\neq 0)}}^{2} f_n(x_3, \dot{x}_3)e^{i\nu_n t}$ за большой промежуток времени T. Для определенности остановимся на анализе случая параметрического резонанса $\omega = \nu_1/2$. В связи с этим в формулах (24) положим $p_1 = 1$, $p^*{}_1 = 2$, $p_2 = 0$, $\sigma^* = 2\sigma$, $\sigma \in \mathbb{Z}$, заменив также $\frac{1}{8\pi^3}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t, x_3^0, \dot{x}_3^0)\cdots d\theta_1 d\theta_2 d\psi$ на $\frac{1}{4\pi^2}3\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_{\theta_2}(t, x_3^0, \dot{x}^0)\cdots d\theta_1 d\psi$, где $f_{\theta_2}(t, x_3^0, \dot{x}_3^0)$ — соответствующее среднее значение. Непосредственные вычисления показывают, что система уравнений (23) имеет тогда следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\varepsilon\frac{a(4 - ba^2)}{8mu_{10}l^2} + \varepsilon\frac{a(c_{24}\cos 2\vartheta - c_{14}\sin 2\vartheta)}{2kl}, \\ \dot{\vartheta} &= \frac{\varepsilon\Delta}{\nu_1} + \varepsilon\frac{(b\nu_1^2 - 2\omega^2(1 + 6b))a^2}{16k\nu_1 u_{10}} - \varepsilon\frac{c_{14}\cos 2\vartheta + c_{24}\sin 2\vartheta}{2kl}. \end{aligned} \tag{26}$$

Соответствующее тривиальному стационарному решению

$$a = 0, \qquad \vartheta = \vartheta_0 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2kl\Delta}{\nu_1\gamma} - \frac{\delta}{2} \tag{27}$$

$\left(\gamma = \sqrt{c_{14}^2 + c_{24}^2},\ \operatorname{tg}\delta = c_{14}/c_{24}\right)$ системы (26) линейное приближение системы уравнений возмущенного движения ($\widetilde{a} = a$, $\widetilde{\vartheta} = \vartheta - \vartheta_0$) представляется в виде

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{a}} &= \varepsilon\left(-\frac{1}{2mu_{10}l^2} + \frac{c_{24}\cos 2\vartheta_0 - c_{14}\sin 2\vartheta_0}{2kl}\right)\widetilde{a}, \\ \dot{\widetilde{\vartheta}} &= \varepsilon\frac{c_{14}\sin 2\vartheta_0 - c_{24}\cos 2\vartheta_0}{kl}\widetilde{\vartheta}. \end{aligned} \tag{28}$$

Отсюда условие асимптотической устойчивости стационарного синхронного режима, отвечающего тривиальному состоянию равновесия (27), получаем в виде двойного неравенства

$$-\frac{k}{mu_{10}l} < c_{14}\sin 2\vartheta_0 - c_{24}\cos 2\vartheta_0 < 0. \tag{29}$$

Заметим, что стационарное решение (27) системы (26) соответствует положению равновесия исследуемой механической системы. Выполнение условия (29) гарантирует асимптотическую устойчивость этого положения равновесия.

Другое (нетривиальное) стационарное решение $a = a^*$, $\vartheta = \vartheta^*$ системы дифференциальных уравнений (26) существует при выполнении условий

$$c_{14}\sin 2\vartheta^* - c_{24}\cos 2\vartheta^* \leqslant -\frac{k}{mu_{10}l}, \qquad \Gamma = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \leqslant |\gamma_3|, \tag{30}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{ml(b\nu_1^2 - 2\omega^2(1 + 6b))c_{14}}{4k^2\nu_1 b} - \frac{c_{24}}{2kl}, \qquad \gamma_2 = \frac{ml(b\nu_1^2 - 2\omega^2(1 + 6b))c_{24}}{4k^2\nu_1 b} + \frac{c_{14}}{2kl},$$

$$\gamma_3 = -\frac{\Delta}{\nu_1} - \frac{b\nu_1^2 - 2\omega^2(1+6b)}{4kb\nu_1 u_{10}},$$

и определяется как

$$\vartheta^* = \frac{1}{2}\arcsin\frac{\gamma_3}{\Gamma} + \frac{\delta^*}{2}, \qquad a^* = 2\sqrt{\frac{1}{b} + \frac{mu_{10}l(c_{14}\sin 2\vartheta^* - c_{24}\cos 2\vartheta^*)}{kb}}, \tag{31}$$

где $\operatorname{tg}\delta^* = \gamma_2/\gamma_1$. Линейное приближение соответствующей системы уравнений возмущенного движения ($\widetilde{a} = a - a^*$, $\widetilde{\vartheta} = \vartheta - \vartheta^*$) имеет вид

$$\dot{\widetilde{a}} = \varepsilon(a_{11}\widetilde{a} + a_{12}\widetilde{\vartheta}), \qquad \dot{\widetilde{\vartheta}} = \varepsilon(a_{21}\widetilde{a} + a_{22}\widetilde{\vartheta}), \tag{32}$$

где

$$a_{11} = \frac{3ba^{*2} - 4}{8mu_{10}l^2} - \frac{c_{14}\sin 2\vartheta^* - c_{24}\cos 2\vartheta^*}{2kl}, \qquad a_{12} = -\frac{a^*(c_{24}\sin 2\vartheta^* + c_{14}\cos 2\vartheta^*)}{kl},$$

$$a_{21} = \frac{(b\nu_1^2 - 2\omega^2(1+6b))a^*}{8k\nu_1 u_{10}}, \qquad a_{22} = \frac{c_{14}\sin 2\vartheta^* - c_{24}\cos 2\vartheta^*}{kl}.$$

Согласно критерию Рауса–Гурвица, асимптотическая устойчивость данного синхронного режима колебаний имеет место при выполнении условий

$$a_{11} + a_{22} < 0, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0. \tag{33}$$

Появление и устойчивость предельных циклов в фазовой плоскости $(x_3; \dot{x}_3)$ системы (4) с установившимися амплитудами a^* (см. (31)) в резонансном случае имеют место не только при "больших" возмущениях точки подвеса маятника, но и при "малых" в области значительных расстроек. Смещение этой области относительно максимума амплитудной характеристики и малость самих амплитуд автоколебаний во втором случае свидетельствуют о "дрожащем" характере колебаний маятника, равноценном с практической точки зрения устойчивому положению равновесия в нерезонансном случае.

Амплитудная характеристика $a^2(\Delta)$, полученная из условия $\dot{a} = 0$, $\dot{\vartheta} = 0$, имеет вид

$$a^2(\Delta) = \frac{-\alpha_2(\Delta) \pm \sqrt{D(\Delta)}}{2\alpha_1},$$

где

$$D(\Delta) = \alpha_2^2(\Delta) - 4\alpha_1\alpha_3(\Delta), \qquad \alpha_1 = \left[\frac{l(b\nu_1^2 - 2\omega^2(1+6b))}{8\nu_1 u_{10}}\right]^2 + \left[\frac{kb}{4mu_{10}l}\right]^2,$$

$$\alpha_2(\Delta) = \frac{kl^2(b\nu_1^2 - 2\omega^2(1+6b))\Delta}{2\nu_1^2 u_{10}} - \frac{k^2 b}{2m^2u_{10}^2l^2}, \quad \alpha_3(\Delta) = \frac{4k^2l^2\Delta^2}{\nu_1^2} + \frac{k^2}{m^2u_{10}^2l^2} - c_{14}^2 - c_{24}^2.$$

1. *Лила Д. М.* Достаточные условия устойчивости крупномасштабных нестационарных механических систем: Дис. ... канд. физ.-мат. наук; 01.02.01. – Киев, 2009. – 150 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва: Гостехиздат, 1955. – 408 с.
3. *Бутиков Е. И.* Маятник с осциллирующим подвесом (к 60-летию маятника Капицы). – http://faculty.ifmo.ru/butikov/Russian/ParamPendulum.pdf.

4. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперим. и теор. физики. – 1951. – **21**, вып. 5. – С. 588–597.
5. *Капица П. Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // Усп. физ. наук. – 1951. – **44**, вып. 1. – С. 7–20.
6. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. – Москва: Гостехиздат, 1951. – 476 с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 1. – Москва: Физматлит, 2004. – 224 с.
8. *Штокало И. З.* Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квази-периодическими коэффициентами // Матем. сб. – 1946. – **19 (61)**, № 2. – С. 263–286.
9. *Stephenson A.* On induced stability // Philosoph. Magazine. – 1908. – **15**. – P. 233–236.
10. *Лила Д. М.* Об уравнениях движения одной механической системы // Доп. НАН України. – 2011. – № 5. – С. 65–71.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 26.08.2010

Д. М. Лила

Про стійкість руху математичного маятника, що взаємодіє зі струною

У лінійній і нелінійній постановках розв'язано задачу про стійкість стаціонарних рухів одноланкового маятника в гібридній моделі механічної системи, яка складається з горизонтально розміщеної струни, навантаженої коливною зосередженою масою.

D. M. Lila

About the stability of motion of a mathematical pendulum interacting with a string

The problem of stability of the stationary motions of a single-mass pendulum in the hybrid model of one mechanical system is solved in the linear and nonlinear statements. The mechanical system consists of a string which is horizontally disposed and loaded by an oscillating localized mass.