Доповіді
національної академії наук України

1 • 2012

ТЕПЛОФІЗИКА

УДК 536.24

А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович

Структурно-разностные модели, точно учитывающие осциллирующий во времени нестационарный теплообмен на поверхности конструктивных элементов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Г. Стояном)

Впервые построены структурно-разностные модели задач теплопроводности, точно удовлетворяющие нестационарным граничным условиям. Исследована устойчивость разностных схем. Приводятся результаты вычислительного эксперимента для задачи теплопроводности с нестационарными граничными условиями.

Задачи с нестационарными граничными условиями особо важны с научно-технической точки зрения, однако в случаях, когда поведение коэффициента теплообмена и окружающей среды имеет осциллирующий во времени характер, а температура в конструктивном элементе за очень малый промежуток времени изменяется на три и более порядка, существующие методы решения краевых задач моделируют процессы теплообмена с большой погрешностью.

Структурно-разностные модели краевых задач предлагается строить на базе совместного применения аналитических структур решения [1], PS-функций [2] и разностных схем повышенного порядка точности. Аналитические структуры решения с использованием PS-функций позволяют точно удовлетворять нестационарным граничным условиями при любых заданных зависимостях коэффициентов теплообмена и температуры окружающей среды. Использование разностных схем повышенного порядка точности позволяет строить модели нестационарного температурного процесса высокой степени адекватности.

Рассмотрим высокоскоростной температурный процесс с нестационарными граничными условиями:

$$c(t)\rho\frac{\partial T(x_1,y_1,t)}{\partial t} = \lambda(t)\left(\frac{\partial^2 T(x_1,y_1,t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T(x_1,y_1,t)}{\partial y_1^2}\right) + F_{\text{ист}}(x_1,y_1,t);$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\pm\frac{\partial T(x_1,y_1,t)}{\partial x_1}+h(t)T(x_1,y_1,t)\right)\bigg|_{x=\pm l}=h(t)T_{\text{ср}}(x_1,y_1,t);\\
&\left(\pm\frac{\partial T(x_1,y_1,t)}{\partial y_1}+h(t)T(x_1,y_1,t)\right)\bigg|_{y=\pm l}=h(t)T_{\text{ср}}(x_1,y_1,t);\\
&T(x_1,y_1,0)=\theta(x_1,y_1);\qquad x_1,y_1\in\Omega;\qquad 0<t<\infty,
\end{aligned}\tag{1}
$$

где функции $c(t)$, $\lambda(t)$, $h(t)$ характеризуют изменения во времени удельной теплоемкости материала конструктивного элемента, его коэффициента теплопроводности, относительного коэффициента теплоотдачи, соответственно; ρ — плотность материала конструктивного элемента.

Перейдем к безразмерным величинам координат и времени:

$$
\begin{aligned}
&c(t)=c_o\vartheta(t);\qquad \lambda(t)=\lambda_0\varsigma(t);\qquad h(t)=\alpha\lambda^{-1};\qquad a=c_0\rho\lambda_0^{-1};\qquad \mathrm{Bi}(t)=h(t)l;\\
&x_1=xl^{-1};\quad y_1=yl^{-1};\quad \mathrm{Fo}=atl^{-2};\quad T(x,y,0)=\theta(x,y);\quad x,y\in\Omega;\quad 0<\mathrm{Fo}<\infty;\\
&\vartheta(\mathrm{Fo})T(x,y,\mathrm{Fo})'_{\mathrm{Fo}}=\varsigma(\mathrm{Fo})(T(x,y,\mathrm{Fo})''_{xx}+T(x,y,\mathrm{Fo})''_{yy})+F_{\text{ист}}(x,y,\mathrm{Fo})l^2a^{-1};\\
&(\pm T(x,y,\mathrm{Fo})'_x+\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})T(x,y,\mathrm{Fo}))|_{x=\pm1}=\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})T_{\text{ср}}(x,y,\mathrm{Fo});\\
&(\pm T(x,y,\mathrm{Fo})'_y+\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})T(x,y,\mathrm{Fo}))|_{y=\pm1}=\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})T_{\text{ср}}(x,y,\mathrm{Fo}).
\end{aligned}\tag{2}
$$

Рассмотрим решение задачи (1) на примере задачи для бесконечной призмы прямоугольного поперечного сечения $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$:

$$
\begin{aligned}
&T(x,y,\mathrm{Fo})'_{\mathrm{Fo}}=\Delta T(x,y,\mathrm{Fo})+F(x,y,\mathrm{Fo});\\
&(\pm T(x,y,\mathrm{Fo})'_x+\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})T(x,y,\mathrm{Fo}))|_{x=\pm1}=\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})T_{\text{ср}}(x,y,\mathrm{Fo});\\
&(\pm T(x,y,\mathrm{Fo})'_y+\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})T(x,y,Fo))|_{y=\pm1}=\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})T_{\text{ср}}(x,y,\mathrm{Fo});\\
&T(x,y,0)=\theta(x,y);\qquad x,y\in\Omega;\qquad 0<\mathrm{Fo}<\infty.
\end{aligned}\tag{3}
$$

Структуру решения задачи (3) представим в виде:

$$
T(x,y,\mathrm{Fo})=\Phi_0(x,y,\mathrm{Fo})+\sum_{k,l}C_{k,l}\chi_{k,l}(x,y,\mathrm{Fo}),\tag{4}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\Phi_0(x,y,\mathrm{Fo})=T_{\text{ср}}(\mathrm{Fo});\qquad \theta(x,y)=T_m(x,y,0);\\
&F(x,y,\mathrm{Fo})=T_m(x,y,\mathrm{Fo})'_{\mathrm{Fo}}-(T_m(x,y,\mathrm{Fo})''_{xx}+T_m(x,y,\mathrm{Fo})''_{yy});\\
&\chi_{k,l}(x,y,\mathrm{Fo})=P_k(x)P_l(y)-\\
&\qquad -W_1(x,y)[(P_k(x)'_xP_l(y)DW_1(x,y)-\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})P_k(x)P_l(y))|_{x=\pm1}]-\\
&\qquad -W_2(x,y)[(P_l(y)'_yP_k(x)DW_2(x,y)-\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})P_k(x)P_l(y))|_{y=\pm1}];
\end{aligned}
$$

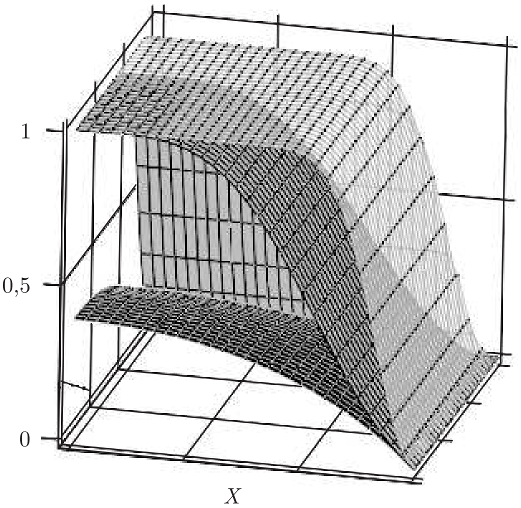

Рис. 1. Опорная функция $\omega_1(x)$ для $\beta = 2$ (нижний график), $\beta = 4$ (средний график); $\beta = 8$ (верхний график)

$C_{k,l}$ — неизвестные коэффициенты; $\Phi_0(x, y, \mathrm{Fo})$ — функция, точно удовлетворяющая нестационарным неоднородным граничным условиям; $\chi_{k,l}(x, y, \mathrm{Fo})$ — базисные функции, точно удовлетворяющие нестационарным однородным граничным условиям; $P_k(x)$, $P_l(y)$ — нормированные полиномы Чебышева; $W_l(x, y)$ и $W_2(x, y)$ — PS-функции для прямоугольной призмы; $DW_1(x, y)$ и $DW_2(x, y)$ — производные $W_l(x, y)$ и $W_2(x, y)$ по x и y соответственно с фиксированным значением $DW_l(x, y)$ и $DW_2(x, y)$ на границе.

PS-функции для прямоугольной призмы:

$$\begin{aligned}
&W_1(x,y) = \omega_1(x) + (2\omega_2(y))^2 - \sqrt[\beta]{\omega_1(x)^\beta + (2\omega_2(y))^{2\beta}}; \quad n = 0{,}5\beta - 1; \quad \beta = 2N;\\
&W_2(x,y) = \omega_2(y) + (2\omega_1(x))^2 - \sqrt[\beta]{\omega_2(y)^\beta + (2\omega_1(x))^{2\beta}};\\
&\omega_1(x) = 0{,}5(1 - x^2)(1 + \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_1(x)^2 + \alpha_3 f_1(x)^3 + \dots + \alpha_n f_1(x)^n),\\
&\omega_2(y) = 0{,}5(1 - y^2)(1 + \alpha_1 f_2(y) + \alpha_2 f_2(y)^2 + \alpha_3 f_2(y)^3 + \dots + \alpha_n f_2(y)^n),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\alpha_1 = 0{,}25$ из условия нулевой кривизны опорных функций $\omega_1(x)$ и $\omega_2(y)$ на границе призмы; $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ обеспечивают наилучшие аппроксимационные свойства аналитических структур; $f_1(x) = 1 - x^2$, $f_2(y) = 1 - y^2$.

На рис. 1 показана опорная функция $\omega_1(x)$ для $\beta = 2$; 4; 8, удовлетворяющая условиям нулевой кривизны на границе призмы и обеспечивающая в качестве весовой функции наилучшие аппроксимационные свойства аналитических структур.

Дискретную математическую модель построим с помощью разностных схем повышенного порядка точности. Рассмотрим две разностные схемы трехслойные по времени и девятиточечные по координатам: "большой крест" и "ящик" [3]

$$(T'_{\mathrm{Fo}})^s_{3i,j} = (\Delta T)^s_{9\text{б.к.}i,j}, \tag{6}$$

$$(T'_{\mathrm{Fo}})^s_{3i,j} = (\Delta T)^s_{9\text{я.}i,j}, \tag{7}$$

где

$$(T'_{\text{Fo}})^s_{3i,j} = (T^s_{i,j} - T^{s-1}_{i,j})\text{Fo}^{-1}, \qquad s = 1, 2;$$

$$(T'_{\text{Fo}})^s_{i,j} = (T^{s-2}_{i,j} - 4T^{s-1}_{i,j} + 3T^s_{i,j})(2\text{Fo})^{-1}, \qquad s > 2;$$

$$(\Delta T)^s_{9\text{б.к.}i,j} = (12h^2)^{-1}(-T^s_{i-2,j} - T^s_{i,j-2} - T^s_{i+2,j} - T^s_{i,j+2} + \\ + 16(T^s_{i-1,j} + T^s_{i,j-1} + T^s_{i+1,j} + T^s_{i,j+1}) - 60T^s_{i,j});$$

$$(\Delta T)^s_{9\text{я.}i,j} = (6h^2)^{-1}(T^s_{i-1,j-1} + T^s_{i+1,j+1} + T^s_{i-1,j+1} + T^s_{i+1,j-1} + \\ + 4(T^s_{i-1,j} + T^s_{i,j-1} + T^s_{i+1,j} + T^s_{i,j+1}) - 20T^s_{i,j}).$$

Найдем необходимое спектральное условие устойчивости Неймана [4] для схем (6) и (7), задавая $(T)^0_{i,j} = e^{I(\mu i+\nu j)}$ в виде двумерной гармоники: $(T)^s_{i,j} = \lambda^s(\mu,\nu,r)e^{I(\mu\cdot i+\nu\cdot j)}$, где $r = \Delta\text{Fo}h^{-2}$; μ, ν — вещественные параметры.

Определим r, для которого выполняется необходимое условие устойчивости Неймана $|\lambda(\mu,\nu,r)| \leqslant 1$ для схем (6), (7) соответственно:

$$\lambda_{3-9\text{б.к.}}(\mu,\nu,r) = 6^{-1}\left[4 + 2rA(\mu,\nu) \pm \sqrt{(4 + 2rA(\mu,\nu))^2 - 12}\right]; \tag{8}$$

$$\lambda_{3-9\text{я.}}(\mu,\nu,r) = 6^{-1}\left[4 + 2rB(\mu,\nu) \pm \sqrt{(4 + 2rB(\mu,\nu))^2 - 12}\right], \tag{9}$$

где

$$A(\mu,\nu) = 12^{-1}[-\cos(2\mu) - \cos(2\nu) + 16(\cos(\mu) + \cos(\nu)) - 60];$$

$$B(\mu,\nu) = 6^{-1}[\cos(\mu)\cos(\nu) + 4(\cos(\mu) + \cos(\nu)) - 20].$$

Максимальные значения параметра r, при котором соблюдается необходимое условие устойчивости, следующие: $r = 0{,}511$ — для схемы (6), $r = 0{,}889$ — для схемы (7).

На рис. 2 показан больший из двух комплексных спектров $\lambda(\mu;\nu;r)$ для схем (6) и (7), удовлетворяющий необходимому условию устойчивости Неймана.

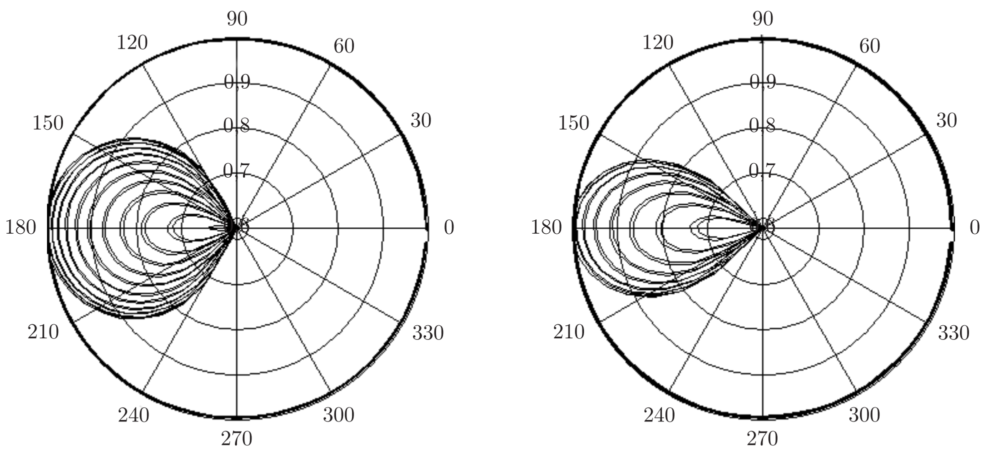

Рис. 2. Спектр $\lambda(\mu;\nu;r)$: *а* — схема (7), $r = 0{,}889$; *б* — схема (6), $r = 0{,}511$

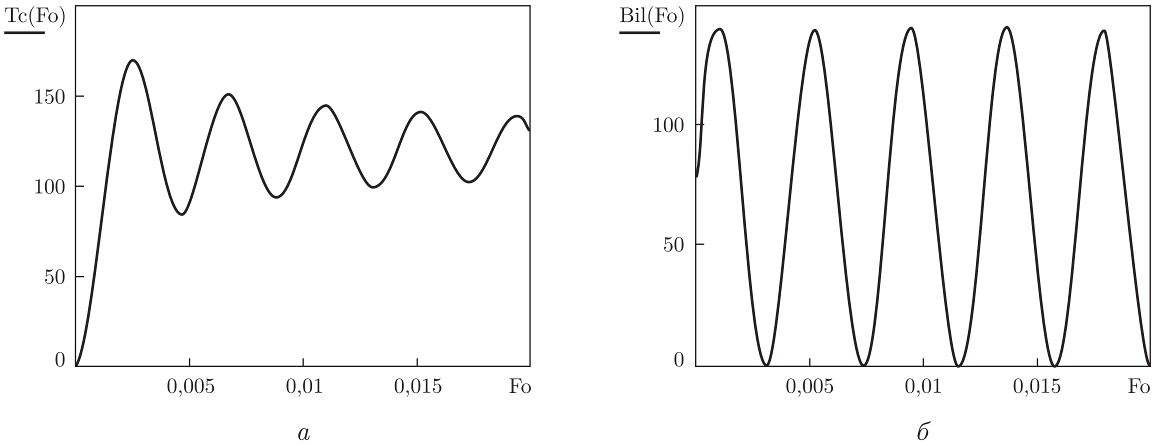

Рис. 3. Температура среды, осциллирующая как функция Бесселя (*а*) и критерий Био, осциллирующий по синусоиде (*б*)

Проведен вычислительный эксперимент на интервале от 0,001Fo до 0,02Fo. В качестве модельной выбрана задача, точное решение которой имеет вид:

$$T_m(x,y,\mathrm{Fo}) = T_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) + (\varphi(x,\mathrm{Fo}) - g_1(x)\phi(x,\mathrm{Fo})'_x g_1(x)'_x + g_1(x)\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})\phi(x,\mathrm{Fo})) \times$$
$$\times (\psi(y,\mathrm{Fo}) - g_2(y)\psi(y,\mathrm{Fo})'_y g_2(y)'_y + g_2(y)\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo})\psi(y,\mathrm{Fo})), \tag{10}$$

где $\varphi(x,\mathrm{Fo}) = 50\mathrm{Fo}(\cos(x)+2)^{-1}$; $\psi(y,\mathrm{Fo}) = 10\mathrm{Fo}(\cos(x)+2)^{-1}$; $g_1(x) = 0{,}5(1-x^2)$; $g_2(y) = 0{,}5(1-y^2)$; $x, y \in \Omega$; $0 < \mathrm{Fo} < 0{,}02$.

Температура среды и критерий Био осциллируют:

$$\mathrm{Bi}(\mathrm{Fo}) = 70(\sin(1500\mathrm{Fo})+1), \qquad T_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) = 120(1 - J_0(1500\mathrm{Fo})).$$

Графики температуры среды и критерия Био представлены на рис. 3.

Структурно-разностную модель теплового процесса построим с использованием уравнений теплопроводности, разностной схемы (7) и структуры решения (4) задачи теплопроводности:

$$\sum_{k,l} C^s_{k,l}[\chi^s_{k,li,j} - \mathrm{Fo}(6h^2)^{-1}(\chi^s_{k,li-1,j-1} + \chi^s_{k,li+1,j+1} + \chi^s_{k,li-1,j+1} + \chi^s_{k,li+1,j-1} +$$
$$+ 4(\chi^s_{k,li-1,j} + \chi^s_{k,li,j-1} + \chi^s_{k,li+1,j} + \chi^s_{k,li,j+1}) - 20\chi^s_{k,li,j})] =$$
$$= \sum_{k,l} C^{s-1}_{k,l}\chi^{s-1}_{k,li,j} + \mathrm{Fo}(6h^2)^{-1}(\Phi^s_{0i-1,j-1} + \Phi^s_{0i+1,j+1} + \Phi^s_{0i-1,j+1} + \Phi^s_{0i+1,j-1} +$$
$$+ 4(\Phi^s_{0i-1,j} + \Phi^s_{0i,j-1} + \Phi^s_{0i+1,j} + \Phi^s_{0i,j+1}) - 20\Phi^s_{0i,j}) - (\Phi^s_{0i,j} - \Phi^{s-1}_{0i,j}) +$$
$$+ \mathrm{Fo}(6h^2)^{-1}F^s_{mi,j}, \qquad s = 1,2;$$
$$\sum_{k,l} C^s_{k,l}[3\chi^s_{k,li,j} - \mathrm{Fo}(3h^2)^{-1}(\chi^s_{k,li-1,j-1} + \chi^s_{k,li+1,j+1} + \chi^s_{k,li-1,j+1} + \chi^s_{k,li+1,j-1} + \tag{11}$$
$$+ 4(\chi^s_{k,li-1,j} + \chi^s_{k,li,j-1} + \chi^s_{k,li+1,j} + \chi^s_{k,li,j+1}) - 20\chi^s_{k,li,j})] =$$

$$= 4\sum_{k,l} C_{k,l}^{s-1}\chi_{k,li,j}^{s-1} - \sum_{k,l} C_{k,l}^{s-1}\chi_{k,li,j}^{s-1} + \mathrm{Fo}(3h^2)^{-1}(\Phi_{0i-1,j-1}^s + \Phi_{0i+1,j+1}^s +$$

$$+\Phi_{0i-1,j+1}^s + \Phi_{0i+1,j-1}^s + 4(\Phi_{0i-1,j}^s + \Phi_{0i,j-1}^s + \Phi_{0i+1,j}^s + \Phi_{0i,j+1}^s) - 20\Phi_{0i,j}^s) -$$

$$-(\Phi_{0i,j}^{s-2} - 4\Phi_{0i,j}^{s-1} + 3\Phi_{0i,j}^s) + \mathrm{Fo}(3h^2)^{-1}F_{mi,j}^s, \qquad s > 2.$$

В матричной форме система уравнений (11) примет вид:

$$B\overline{C} = \overline{G}. \tag{12}$$

Умножим обе части уравнения на транспонированную матрицу B^T системы (12), получим:

$$B^T B\overline{C} = B^T\overline{G}. \tag{13}$$

Из линейной системы уравнений (13) определяется вектор неизвестных коэффициентов.

В табл. 1 представлены значения температуры призмы для трех моментов времени в трех точках и максимальная относительная погрешность вычисления. Расчет проводился на сетке 900 узлов, шаг по времени — 0,001Fo, опорные функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(y)$ при $\beta = 8$, использовалась 21 координатная функция, коэффициенты опорной функции: $\alpha_1 = 0{,}25$; $\alpha_2 = 56{,}733$; $\alpha_3 = -258{,}512$; $\alpha_4 = 483{,}275$; $\alpha_5 - 462{,}85$; $\alpha_6 = 225{,}76$; $\alpha_7 = -44{,}655$.

На рис. 4 показан график температуры прямоугольной призмы для трех моментов времени: нижний график — для 0,001Fo, средний — для 0,02Fo, верхний — для 0,01Fo.

Таблица 1. Температура и максимальная относительная погрешность вычисления температуры призмы

Fo	Значение	(0; 0)	(0,5; 0,5)	(1; 1)	$\varepsilon_{\max}$, 10^{-3}%
0,001	Приближенное	86,51711	75,84149	58,58843	0,016274
	Точное	86,51711	75,84150	58,58843	—
0,01	Приближенное	2039,89899	1309,46173	122,48174	0,588083
	Точное	2039,89900	1309,46200	122,48175	—
0,02	Приближенное	134,83800	134,73611	133,46265	0,582389
	Точное	134,83806	134,73619	133,46343	—

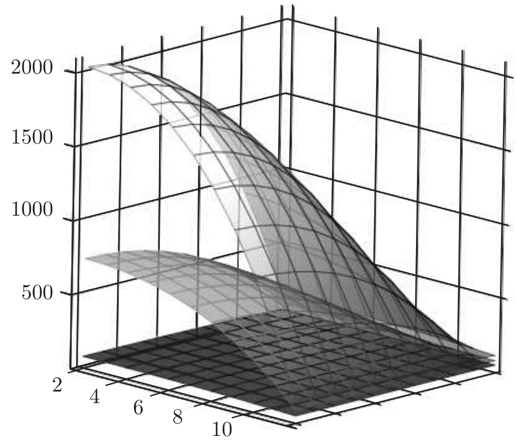

Рис. 4. Температура бесконечной прямоугольной призмы для 0,001Fo (нижний график), 0,01Fo (верхний график) и 0,02Fo (средний график)

Структурно-разностные модели позволяют проводить оценку температуры во всей области допустимых значений теплофизических параметров с любой зависимостью от времени, не перестраивая структур решения. Это делает возможным качественный анализ тонкой структуры динамических процессов, включая процессы теплопроводности с нестационарными граничными условиями, процессы с большими градиентами температур по времени и по координатам и процессы с осциллирующими коэффициентом теплопроводности и температурой среды. Геометрическая и аналитическая информация в граничных условиях учитывается точно. Интерполяция коэффициентов при базисных функциях позволяет представлять приближенные решения тепловых процессов в аналитической форме, что открывает новые возможности для создания баз данных температурных режимов конструктивных элементов разнообразных форм и разного назначения.

1. *Слесаренко А. П., Сафонов Н. А.* Идентификация нелинейной нестационарной зависимости мощности источника энергии от температуры на базе вариационно-структурного и проекционного методов // Пробл. машиностроения. – 2010. – **13**, № 6. – С. 58–63.
2. *Слесаренко А. П.* Математическое моделирование тепловых процессов в телах сложной формы при нестационарных граничных условиях // Там же. – 2002. – **5**, № 4. – С. 72–80.
3. *Ильин В. П.* Численные методы решения задач электрооптики. – Москва: Наука, 1974. – 202 с.
4. *Годунов С. К., Рябенький В. С.* Разностные схемы. Введение в теорию. – Москва: Наука, 1973. – 400 с.

Институт проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 29.06.2011

А. П. Слесаренко, Ю. О. Кобринович

Структурно-різницеві моделі, що точно враховують осцилюючий у часі нестаціонарний теплообмін на поверхні конструктивних елементів

Вперше побудовано структурно-різницеві моделі задач теплопровідності, що точно задовольняють нестаціонарні граничні умови. Досліджено стійкість різницевих схем. Наводяться результати обчислювального експерименту для задачі теплопровідності з нестаціонарними граничними умовами.

A. P. Slesarenko, J. O. Kobrinovich

Structural difference models that exactly account for the time-dependent oscillating nonstationary heat exchange on the surface of structural elements

A structure-difference model of heat conduction problems, which exactly satisfies the time-dependent boundary conditions, is first built. Stability of difference schemes is investigated. The results of computational experiments for the heat conduction problem with nonstationary boundary conditions are given.