ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

1 • 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 512.53

А. В. Жучок

Группа автоморфизмов полугруппы

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. В. Шарко)

Доказано, что группа автоморфизмов произвольной полугруппы изоморфна подгруппе полного прямого произведения полных сплетений групп.

1. Пусть J — некоторая полурешетка. Полугруппа S называется полурешеткой J подполугрупп S_α, $\alpha \in J$ (см. [1]), если:

а) $S = \bigcup\limits_{\alpha\in J} S_\alpha$;

б) $S_\alpha \bigcap S_\beta = \varnothing$ при любых α, $\beta \in J$, $\alpha \neq \beta$;

в) для любых α, $\beta \in J$ выполняется условие $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$.

Для произвольной полугруппы T через $\operatorname{Aut} T$ будем обозначать группу автоморфизмов полугруппы T. Если $\prod\limits_{i\in Y} G_i$ — полное прямое произведение групп G_i, $i \in Y$, $a \in \prod\limits_{i\in Y} G_i$, то через $[a]_i$ будем обозначать i-ю компоненту элемента a.

Пусть G — произвольная группа, X — произвольное непустое множество, $\Im[X]$ — симметрическая группа на множестве X. Через $\overline{G} = \prod\limits_{x\in X} G_x$ обозначим полное прямое произведение изоморфных копий G_x группы G, индексированных элементами множества X, и построим отображение

$$\rho\colon \Im[X] \to \operatorname{Aut}\overline{G}, \qquad \gamma \mapsto \gamma\rho = \rho_\gamma,$$

где $\rho_\gamma((a_x)) = (a_{\gamma(x)})$ для всех $(a_x) \in \overline{G}$. Непосредственно проверяется, что отображение ρ является гомоморфизмом. На множестве $\overline{G} \times \Im[X]$, определив операцию по правилу

$$((a_x), \gamma_1)((b_x), \gamma_2) = ((a_x)(b_{\gamma_1(x)}), \gamma_1\gamma_2),$$

получим группу [2], которую называют полным сплетением группы G с симметрической группой $\Im[X]$ и обозначают через $G \wr \Im[X]$ (или $G \operatorname{Wr} \Im[X]$).

Для каждой полугруппы S пусть

$$S^0 = \begin{cases} S, & \text{если } S \text{ имеет нуль и } |S| > 1,\\ S\bigcup\{0\} & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Полугруппу $S = S^0$ называют ортогональной суммой полугрупп S_i, $i \in \Omega$, если $S = \bigcup_{i\in\Omega} S_i$ и $S_\alpha \bigcap S_\beta = S_\alpha S_\beta = \{0\}$ для всех α, $\beta \in \Omega$, $\alpha \neq \beta$. Если $S = S^0$ — ортогональная сумма полугрупп S_i, $i \in \Omega$, то семейство $D = \{S_i \mid i \in \Omega\}$ называют ортогональной декомпозицией полугруппы S, а полугруппы S_i, $i \in \Omega$, — ортогональными компонентами полугруппы S. Полугруппу $S = S^0$ называют ортогонально неразложимой, если $D = \{S\}$ — единственная ортогональная декомпозиция полугруппы S.

2. Пусть S — произвольная полугруппа. Тогда S есть полурешетка I полурешеточно неразложимых подполугрупп S_i, $i \in I$ (см., например, [3]). Разобьем множество I на классы эквивалентности, относя i, $i' \in I$ к одному классу, если и только если полугруппы S_i и $S_{i'}$ изоморфны. Выберем в каждом классе эквивалентности по одному элементу и обозначим множество представителей через Y. Для $j \in Y$ пусть $A_j = \{i \in I \mid S_i \cong S_j\}$, а K_j — ортогональная сумма полугрупп $S_i^0 = S_i \bigcup \{0\}$, $i \in A_j$, где 0 — внешне присоединенный нуль для каждой полугруппы S_i.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Группа автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\, S$ *произвольной полугруппы* S *изоморфно вкладывается в полное прямое произведение*

$$\overline{\prod}_{j\in Y} \mathrm{Aut}\, S_j \overline{\wr} \Im[A_j]$$

полных сплетений групп автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, S_j$ *полугрупп* S_j *с симметрическими группами* $\Im[A_j]$ *на множествах* A_j, $j \in Y$, *где* $S = \bigcup_{i\in I} S_i$ *— разложение на полурешеточно неразложимые компоненты.*

Доказательство. Пусть φ — автоморфизм полугруппы $S = \bigcup_{i\in I} S_i$. Очевидно, для любого $k \in I$ мы имеем $S_k\varphi = \bigcup_{i\in I} S_i'$, где $S_i' \subseteq S_i$. Пусть $J = \{i \in I \mid S_i' \neq \{0\}\}$. Если для некоторого $k \in I$ будет $|J| > 1$, то получаем, что $S_k\varphi$ — полурешетка J подполугрупп S_i', $i \in J$, что невозможно, поскольку полугруппа S_k полурешеточно неразложима. Таким образом,

$$\forall\, k \in I\ \exists\, i \in I\colon S_k\varphi \subseteq S_i. \qquad (*)$$

Зафиксируем произвольный элемент $t \in I$. Если теперь предположить, что $S_t = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda\varphi$, где $\Lambda \subseteq I$, $|\Lambda| > 1$, то для $y \in S_n\varphi$, $y' \in S_m\varphi$ $(n, m \in \Lambda, n \neq m)$ получаем $y\varphi^{-1} \in S_n$, $y'\varphi^{-1} \in S_m$, что противоречит условию $(*)$. Следовательно, $|\Lambda| = 1$ и $S_t = S_\lambda\varphi$. Таким образом, каждый автоморфизм φ полугруппы S однозначно определяется некоторыми изоморфизмами $\varphi_i^\delta\colon S_i \to S_{i\delta}$, $i \in I$, где δ — подходящее биективное преобразование множества I. При этом если $x \in S_i$, $y \in S_{i'}$, i, $i' \in I$, то

$$(xy)\varphi_{ii'}^\delta = (xy)\varphi = x\varphi y\varphi = x\varphi_i^\delta y\varphi_{i'}^\delta \in S_{i\delta}S_{i'\delta} \subseteq S_{i\delta i'\delta},$$

откуда

$$(ii')\delta = i\delta i'\delta,$$

т. е. δ — автоморфизм полугруппы I.

Обратно, пусть δ — автоморфизм полугруппы I, $\{\varphi_i^\delta\}_{i\in I}$ — семейство изоморфизмов $\varphi_i^\delta\colon S_i \to S_{i\delta}$, $i \in I$ и выполняется условие $(xy)\varphi_{ii'}^\delta = x\varphi_i^\delta y\varphi_{i'}^\delta$ для любых $x \in S_i$, $y \in S_{i'}$, $i, i' \in I$. Полагая

$$x\varphi = x\varphi_i^\delta \Leftrightarrow x \in S_i, \qquad i \in I$$

для всех $x \in S$, получаем, что φ — автоморфизм полугруппы S.

Пусть φ — автоморфизм полугруппы S. Для каждого $j \in Y$ через $\varphi|_j$ обозначим ограничение φ на множестве $K_j \setminus \{0\}$ и рассмотрим преобразование $\varphi|_j^*$ множества K_j, заданное по правилу

$$x\varphi|_j^* = \begin{cases} x\varphi|_j, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

для всех $x \in K_j$. Легко проверить, что $\varphi|_j^*$ — автоморфизм полугруппы K_j, $j \in Y$.

Определим отображение $\omega\colon \operatorname{Aut} S \to \overline{\prod\limits_{j\in Y}} \operatorname{Aut} K_j\colon \varphi \mapsto \varphi\omega = \vec{\varphi}$, полагая $[\vec{\varphi}]_j = \varphi|_j^*$ (см. п. 1) для всех $j \in Y$. Это отображение инъективно по построению и является гомоморфизмом, так как $[\overrightarrow{\varphi\xi}]_j = [\vec{\varphi}]_j[\vec{\xi}]_j$ для всех φ, $\xi \in \operatorname{Aut} S$, $j \in Y$.

Очевидно, что каждая ортогональная компонента полугруппы K_j, $j \in Y$, ортогонально неразложима. Тогда согласно теореме п. 2.3 работы [4]

$$\operatorname{Aut} K_j \cong \operatorname{Aut} S_j^0 \bar{\wr} \Im[A_j], \qquad j \in Y.$$

Так как $\operatorname{Aut} S_j^0 \cong \operatorname{Aut} S_j$, $j \in Y$, то $\operatorname{Aut} K_j \cong \operatorname{Aut} S_j \bar{\wr} \Im[A_j]$. Таким образом, группа $\operatorname{Aut} S$ изоморфно вкладывается в группу $\overline{\prod\limits_{j\in Y}} \operatorname{Aut} S_j \bar{\wr} \Im[A_j]$.

Теорема доказана.

3. При изучении групп автоморфизмов тех или иных математических структур естественным является вопрос об определяемости этих структур их группами автоморфизмов.

Пусть H — класс математических структур. Говорят, что структура $T \in H$ определяется (с точностью до изоморфизма) группой автоморфизмов, если для любой структуры $T' \in H$ из того, что $\operatorname{Aut} T' \cong \operatorname{Aut} T$ следует, что $T' \cong T$.

Полугруппа не определяется группой автоморфизмов. Действительно, пусть T — полугруппа с нулевым умножением, $|T| > 1$, а T' — полугруппа левых нулей, определенная на множестве $T \setminus \{0\}$. Тогда группы автоморфизмов полугрупп T и T' изоморфны, в то время как сами полугруппы таковыми не являются.

1. *Ляпин Е. С.* Полугруппы. – Москва: Физматгиз, 1960. – 592 с.
2. *Курош А. Г.* Теория групп. – 3-е изд. – Москва: Наука, 1967. – 648 с.
3. *Putcha M. S.* Semilattice decompositions of semigroups // Semigroup Forum. – 1973. – **6**. – P. 12–34.
4. *Жучок А. В.* Групи автоморфізмів ортогональних сум напівгруп // Доп. НАН України. – 2011. – № 6. – С. 12–16.

Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко

Поступило в редакцию 30.06.2011

А. В. Жучок

Група автоморфізмів напівгрупи

Доведено, що група автоморфізмів довільної напівгрупи є ізоморфною підгрупі повного прямого добутку повних вінцевих добутків груп.

A. V. Zhuchok

The automorphism group of a semigroup

We prove that the automorphism group of an arbitrary semigroup is isomorphic to the subgroup of a complete direct product of complete wreath products of groups.