УДК 513.88

Г. М. Качурівська, О. Г. Сторож

Умови додатної визначеності збурення абстрактного аналога оператора третьої крайової задачі та відповідні варіаційні задачі

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

У роботі роль вихідного об'єкта відіграє додатно визначений оператор L_0, що діє у гільбертовому просторі H. Основний об'єкт дослідження — оператор $\widetilde{L}_B$ — інтерпретується як збурення деякого власного розширення оператора L_0. Із застосуванням методів теорії розширень встановлено критерії максимальної акретивності та максимальної невід'ємності оператора $\widetilde{L}_B$. У випадку, коли цей оператор є додатно визначеним, побудовано його енергетичний простір і доведено розв'язність відповідної варіаційної задачі. Більше того, розглядається ситуація, коли L_0 є мінімальним оператором, породженим у просторі нескінченновимірних вектор-функцій диференціальним виразом Штурма–Ліувілля.

Систематичне дослідження невід'ємних самоспряжених розширень невід'ємного оператора у гільбертовому просторі почалося, мабуть, зі статті К. Фрідріхса [1] і знайшло свій розвиток у працях багатьох математиків. У праці авторів [2], було обгрунтовано важливість дослідження умов максимальної акретивності (зокрема, максимальної невід'ємності) різних класів лінійних операторів у гільбертовому просторі. Зазначимо, що самоспряжений максимально акретивний оператор є максимально невід'ємним, а тому індукується деякою невід'ємною квадратичною формою, задача про мінімізацію якої еквівалентна питанню про розв'язність вихідного оператора. Деякі з таких форм розглянуто нижче.

У цій роботі використовуємо такі позначення: $D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ — відповідно область визначення, область значень та многовид нулів оператора T; $\mathcal{B}(X,Y)$ — простір лінійних неперервних операторів $T\colon X \to Y$ таких, що $D(T) = X$; $\mathcal{B}(X) = \mathcal{B}(X,X)$; $\mathcal{C}(X)$ — сукупність замкнених щільно визначених лінійних операторів $T\colon X \to X$; $T|E$ — звуження оператора T на множину E; $\mathbf{I}_X$ — тотожне перетворення в просторі X; $\oplus$, $\dot{+}$ — символи ортогональної та прямої суми відповідно; якщо $A_i\colon X \to Y_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ — лінійні оператори, то запис $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ означає, що $\forall\, x \in X$ $Ax = (A_1x,\ldots,A_nx)$; $s-\lim$ — символ сильної операторної границі. Оператор, спряжений з оператором T, позначаємо (якщо не омовлено протилежного) через T^*.

Роль вихідного об'єкта відіграє додатно визначений оператор $L_0 \in \mathcal{C}(H)$, де H — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot|\cdot)$ та відповідною нормою $||.||$. Через L_F позначаємо розширення за Фрідріхсом оператора L_0, а через H_e та $(\cdot|\cdot)_e$ — його енергетичний простір та енергетичний скалярний добуток. Як і в [2], під $(\mathcal{H},\Gamma_1,\Gamma_2)$ розуміємо фіксований жорсткий простір граничних значень (ПГЗ), тобто позитивний ПГЗ, що відповідає розширенню L_F, оператора L_0 (деталі див. [3–5]), а під $\mathcal{P}$ — проектор $H_e \dot{+} \ker L \to H_e$ паралельно до $\ker L$ (тут і далі $L \overset{\text{def}}{=} L_0^*$).

Якщо $\Psi \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H})$, то (спряжений) оператор $\Psi^\bullet \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, H_e)$ визначаємо виходячи з умови

$$\forall\, u \in H_e \qquad \forall\, h \in \mathcal{H} \qquad (\Psi u|h)_{\mathcal{H}} = (u|\Psi^\bullet h)_e.$$

Ми вважаємо даними оператори $\Phi \in \mathcal{B}(H, \mathcal{H})$, $\Psi \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H})$, який задовольняє умови

$$R(\Psi^\bullet) \bigcap D(L) = \{0\}, \tag{1}$$

$$R(\Psi) = R(\Psi|D(L_0)) \stackrel{\text{def}}{=} G \text{ замкнена в } \mathcal{H}, \tag{2}$$

$$\ker L \dotplus R(\Psi^\bullet) \text{ замкнена в } H. \tag{3}$$

Введемо позначення $\mathcal{X} = \Psi\mathcal{P} + \Phi$, $\mathcal{X}^\bullet = (\mathcal{X} \downarrow H_e)^\bullet$ $(= \Psi^\bullet + L_F^{-1}\Phi^*)$ і зазначимо, що під $W^{(\Psi)}$ ми розуміємо продовження за лінійністю нулем на $R(\Psi^\bullet)$ оператора $W\colon D(L) \to \mathcal{H}$, а під $\Gamma_3^{(\Psi)}$ — відображення $D_{\max} \stackrel{\text{def}}{=} D(L) \dotplus R(\Psi^\bullet) \to G$, яке визначається з умови

$$\Gamma_3^{(\Psi)} y = g \Leftrightarrow y + \Psi^\bullet g \in D(L).$$

Припустимо, що $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ і визначимо оператори L_B, $\widetilde{L}_B$, $\widetilde{L}_0$ таким чином:

$$\begin{aligned}
&D(L_B) = \{y \in D(L)\colon \Gamma_1^{(\Psi)} y - B\Gamma_2^{(\Psi)} y = \mathcal{X}y\}, \qquad L_B \subset L;\\
&D(\widetilde{L}_B) = \{y \in D_{\max}\colon y + \mathcal{X}^\bullet\Gamma_2^{(\Psi)} y \in D(L), \Gamma_1^{(\Psi)} y - B\Gamma_2^{(\Psi)} y = \mathcal{X}y\},\\
&\forall\, y \in D(\widetilde{L}_B) \qquad \widetilde{L}_B y = L(y + \mathcal{X}^\bullet\Gamma_2^{(\Psi)} y);\\
&D(\widetilde{L}_0) = \{y \in D(\widetilde{L}_B)\colon \Gamma_2^{(\Psi)} y = 0\}, \qquad \widetilde{L}_0 \subset \widetilde{L}_B.
\end{aligned} \tag{4}$$

Відзначимо, що $\widetilde{L}_B$ можна трактувати як збурення (із зміною області визначення) оператора L_B, який є абстрактним аналогом оператора задачі типу третьої крайової, розглянутої в [6].

Мета цієї роботи — встановлення умов максимальної акретивності та максимальної невід'ємності оператора $\widetilde{L}_B$, а у випадку, коли він є додатно визначеним ($\widetilde{L}_B \gg 0$), побудова його енергетичного простору та дослідження питання про мінімум квадратичного функціонала, який індукує оператор $\widetilde{L}_B$.

Окремо буде розглянуто випадок, коли L_0 — мінімальний оператор, породжений в $L_2(H_0; (a, b))$, де H_0 — допоміжний гільбертів простір, диференціальним виразом Штурма–Ліувілля.

Зазначимо, що весь час припускаємо, що

$$R((\Gamma_1 - \mathcal{X}) \oplus \Gamma_2) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}. \tag{5}$$

Критерій додатної визначеності оператора $\widetilde{L}_B$. Нагадаємо (див. [6]), що трійка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де $\mathcal{H}$ — гільбертів простір, а Γ_1, Γ_2 — лінійні оператори з $D(L)$ в $\mathcal{H}$, називається ПГЗ оператора L_0, якщо

$$R(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \qquad \ker \Gamma_1 \bigcap \ker \Gamma_2 = D(L_0),$$

$$\forall\, y, z \in D(L) \qquad (Ly|z) - (y|Lz) = (\Gamma_1 y|\Gamma_2 z)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_2 y|\Gamma_1 z)_{\mathcal{H}}.$$

Лема 1.
а) $\widetilde{L}_B,\ \widetilde{L}_0 \in \mathcal{C}(H)$*;*
б) $D(\widetilde{L}_0^*) = \{z \in D_{\max}\colon z + \mathcal{X}^\bullet\Gamma_2^{(\Psi)}z \in D(L)\}$*,*
$\forall\, z \in D(\widetilde{L}_0^*)\ \widetilde{L}_0^* z = L(z + \mathcal{X}^\bullet\Gamma_2^{(\Psi)}z)$*.*

Лема 2. *Якщо справджуються співвідношення* (1)–(3), (5), *то* $(\mathcal{H}, \Gamma_1^{(\Psi)} - \mathcal{X}, \Gamma_2^{(\Psi)})$ — *ПГЗ оператора* $\widetilde{L}_0$.

Нагадаємо (див. [5, 6]), що ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ оператора $L_0 \gg 0$ називається позитивним, якщо $\ker\Gamma_1 = D(L_0)\dot{+}\ker L$ і $\widehat{L} \overset{\text{def}}{=} L\downarrow\ker\Gamma_2 \gg 0$. Якщо $\widehat{L} = L_F$, то $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — жорсткий ПГЗ оператора L_0.

Кожному ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ оператора L_0 відповідає введена в [7] функція Вейля $M(\lambda)$, яку еквівалентним чином можна (див. [8]) визначити так.

Нехай $\widehat{L} \gg 0$, $\widehat{L}_\lambda \overset{\text{def}}{=} (\widehat{L} - \lambda\mathbf{I}_H)^{-1}$, $Z_\lambda \overset{\text{def}}{=} (\Gamma_1\widehat{L}_\lambda)^*$ $(\lambda \leqslant 0)$. Функцію Z_λ називатимемо фундаментальною функцією оператора L_0, яка відповідає розглядуваному ПГЗ. Відомо (див. [8] і цитовану там літературу), що $\forall\,\lambda \leqslant 0$ $y = Z_\lambda a \Leftrightarrow Ly = \lambda y,\ \Gamma_2 y = a$, а згадана функція Вейля має такий вигляд: $M(\lambda) = \Gamma_1 Z_\lambda$.

Використовуючи результати праці [9], неважко довести (див. [7, 8, 10]), що:

а) ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ оператора L_0 є позитивним тоді і тільки тоді, коли $M(0) = 0$;

б) позитивний ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ оператора L_0 є жорстким тоді і тільки тоді, коли $s-\lim\limits_{\lambda\to-\infty} M(\lambda)^{-1} = 0$.

Відомо (див. [5, 6]), що якщо $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — жорсткий ПГЗ оператора L_0, то оператор L_B, визначений згідно з (4), є максимально акретивним (максимально невід'ємним; коректно оборотним) тоді і тільки тоді, коли B є акретивним (невід'ємним; оборотним) в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Зокрема, L_B — самоспряжений додатно визначений оператор тоді і тільки тоді, коли $B \gg 0$.

Перш ніж формулювати основні результати, введемо такі позначення:

$$\begin{cases} B_0 = 2\,\mathrm{Re}(\mathcal{X}Z_0) - \mathcal{X}\mathcal{X}^\bullet, & \widetilde{\Gamma}_1 = (\Gamma_1^{(\Psi)} - \mathcal{X}) + B_0\Gamma_2^{(\Psi)}, \\ B(\lambda) = B_0 - 2\,\mathrm{Re}(\mathcal{X}Z_\lambda) + \mathcal{X}(\mathcal{X}L_\lambda)^*, & \widetilde{\Gamma}_2 = \Gamma_2^{(\Psi)}, \quad \widetilde{B} = B + B_0, \end{cases}$$

де $L_\lambda \overset{\text{def}}{=} (L_F - \lambda\mathbf{I}_H)^{-1}$, $\lambda \leqslant 0$.

З леми 2 випливає, що $(\mathcal{H}, \widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2)$ — ПГЗ оператора $\widetilde{L}_0$. Знайдемо відповідну фундаментальну функцію $\widetilde{Z}_\lambda$.

Лема 3. *Для будь-якого* $\lambda \leqslant 0$

$$\widetilde{Z}_\lambda = Z_\lambda - (\mathbf{I}_\mathcal{H} + \lambda L_\lambda)\mathcal{X}^\bullet.$$

Лема 4. $(\mathcal{H}, \widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2)$ — *позитивний ПГЗ оператора* $\widetilde{L}_0$*, якому відповідає функція Вейля*

$$\widetilde{M}(\lambda) = M(\lambda) + B(\lambda) \qquad (\lambda \leqslant 0).$$

Теорема 1. $(\mathcal{H}, \widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2)$ — *жорсткий ПГЗ оператора* $\widetilde{L}_0$*.*

Наслідок 1. *Оператор* $\widetilde{L}_B$ *є максимально акретивним (максимально невід'ємним; коректно оборотним) тоді і тільки тоді, коли* $\widetilde{B}$ *є акретивним (невід'ємним; коректно оборотним).*

Зокрема, $\widetilde{L}_B$ *є (максимально) додатно визначеним тоді і тільки тоді, коли*

$$\widetilde{B} = B + B_0 = B + 2\,\mathrm{Re}(\mathcal{X}Z_0) - \mathcal{X}\mathcal{X}^\bullet \gg 0.$$

Зауваження 1.

а) Оскільки енергетичний простір додатно визначеного оператора збігається з енергетичним простором його жорсткого розширення, а L_F є жорстким розширенням не тільки для L_0, але й для $\widetilde{L}_0$, то H_e є енергетичним простором не тільки для L_0, але й для $\widetilde{L}_0$.

$$\text{б) } H_e \dot{+} \ker L = H_e \dot{+} \ker \widetilde{L}_0^*. \tag{6}$$

Відомо (див. [8] і цитовану там літературу), що якщо $B \gg 0$, то оператори $\mathcal{P} \downarrow D(L)$ і Γ_2 допускають єдині неперервні продовження $\widehat{\mathcal{P}}(=\mathcal{P})$ і $\widehat{\Gamma}_2(\widehat{\Gamma}_2 \downarrow D_{\max} = \Gamma_2^{(\Psi)})$ до відображень $H_e \dot{+} \ker L \to H_e$, $H_e \dot{+} \ker L \to \mathcal{H}$ відповідно. При цьому

$$\forall\, u \in H_e \dot{+} \ker L \qquad \widehat{\mathcal{P}}u = u - Z_0 \widehat{\Gamma}_2 u, \tag{7}$$

а $H_e \dot{+} \ker L$ трактується як гільбертів простір зі скалярним добутком

$$\forall\, u, v \in H_e \dot{+} \ker L \qquad \pi_B(u, v) = (\widehat{\mathcal{P}}u|\widehat{\mathcal{P}}v)_e + (B\widehat{\Gamma}_2 u|\widehat{\Gamma}_2 v)_{\mathcal{H}}.$$

Більше того, $H_B \overset{\text{def}}{=} H_e \dot{+} \ker L$ є енергетичним простором оператора L_B, а $\mathcal{P}$ — оператором (ортогонального) проектування $H_B \to H_e$. Застосовуючи цей результат до оператора $\widetilde{L}_0$ (замість L_0) і беручи до уваги (6), (7), бачимо, що

$$\forall\, u \in H_e \dot{+} \ker L = H_e \dot{+} \ker \widetilde{L}_0^* \qquad \widetilde{\mathcal{P}}u = u - \widetilde{Z}_0 \widehat{\Gamma}_2 u,$$

де $\widetilde{\mathcal{P}}$ — проектор $H_e \dot{+} \ker \widetilde{L}_0^* \to H_e$ паралельно до $\ker \widetilde{L}_0^*$.

Теорема 2. *Нехай $\widetilde{B} = B + B_0 \gg 0$, а $\widetilde{H}_B$, $\widetilde{\pi}_B$ — відповідно енергетичний простір та енергетичний скалярний добуток оператора $\widetilde{L}_B$. Тоді $\widetilde{H}_B = H_B$ і*

$$\forall\, u, v \in \widetilde{H}_B \qquad \widetilde{\pi}_B(u, v) = \pi_B(u, v) + (\mathcal{X}u|\widehat{\Gamma}_2 v)_{\mathcal{H}} + (\widehat{\Gamma}_2 u|\mathcal{X}v)_{\mathcal{H}}.$$

Наслідок 2. *Якщо $\widetilde{B} = B + B_0 \gg 0$, то для будь-якого $f \in H$ варіаційна задача*

$$\widetilde{\pi}_B(u, u) - 2\,\mathrm{Re}(f|u) \to \min, \qquad u \in H_e \dot{+} \ker L$$

має єдиний розв'язок $u_0 = \widetilde{L}_B^{-1} f$.

Випадок диференціальних операторів. Нехай $-\infty < a < b < +\infty$, H_0 — сепарабельний гільбертів простір і для будь-якого $x \in [a, b]$ $p(x) = p(x)^* \in \mathcal{B}(H_0)$ — додатно визначений оператор, причому оператор-функція $x \mapsto p(x)$ сильно неперервна на $[a, b]$. Розглянемо диференціальний вираз

$$l[y] = -y''(x) + p(x)y \qquad (x \in [a, b]) \tag{8}$$

і позначимо через L та L_0 відповідно максимальний та мінімальний оператори, породжені в гільбертовому просторі $H \overset{\text{def}}{=} L_2(H_0; (a, b))$ зі скалярним добутком

$$\forall\, y, z \in H \qquad (y|z) = \int_a^b (y(x)|z(x))_{H_0}\, dx$$

цим виразом. Відомо (див. [11] і цитовану там літературу), що L, $L_0 \in \mathcal{C}(H)$, $L_0^* = L$, а трійка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, де

$$\mathcal{H} = H_0 \oplus H_0; \qquad \forall\, y \in D(L) \qquad \Gamma_1 y = (y'(a), -y'(b)), \qquad \Gamma_2 y = (y(a), y(b)),$$

є ПГЗ оператора L_0, а $(H_e, (.|.)_e)$, де

$$H_e = \{y \in H \colon y \text{ абсолютно неперервна на } [a,b],\ y' \in H,\ y(a) = y(b) = 0\},$$

$$\forall\, u, v \in H_e \qquad (u|v)_e = \int\limits_a^b [(u'(x)|v'(x))_{H_0} + (p(x)u(x)|v(x))_{H_0}]\, dx,$$

є енергетичним простором оператора L_0, а $L_F \overset{\text{def}}{=} L \downarrow \ker \Gamma_2$ — його жорстким, тобто фрідріхсівським розширенням (деталі — див. [3, 4, 6]).

Далі, нехай $a < c_1 < c_2 < b$. Визначимо оператори $L_{\min}$, $L_{\max}$ за допомогою співвідношень

$$D(L_{\min}) = \{y \in D(L_0) \colon y(c_1) = y(c_2) = 0\}, \qquad L_{\min} \subset L_0;$$

$$D(L_{\max}) = \{y \in H \colon y \text{ абсолютно неперервна на } [a,b],\ y' \text{ абсолютно неперервна}$$
$$\text{на } [a, c_1) \bigcup (c_1, c_2) \bigcup (c_2, b],\ l_{cl}[y] \in H\},$$

$$\forall\, y \in D(L_{\max}) \qquad L_{\max} y = l_{cl}[y].$$

Під $l_{cl}[y]$ ми маємо на увазі вираз (8), в якому усі похідні потрібно розуміти у класичному сенсі.

Опишемо основний у цьому пункті об'єкт нашого дослідження. Припустимо, що Φ_1, $\Phi_2 \in \mathcal{B}(H, H_0)$ $\beta_{ij} \in \mathcal{B}(H_0)$ $(i, j = 1, 2)$, $B \overset{\text{def}}{=} (\beta_{ij})_{i,j=1}^2$ і введемо у розгляд оператор T_B, область визначення якого $D(T_B)$ складається з усіх тих $y \in D(L_{\max})$, які задовольняють умови

$$y'(c_1 + 0) - y'(c_1 - 0) = y(a), \qquad y'(c_2 + 0) - y'(c_2 - 0) = y(b),$$

$$\begin{cases} y'(a) - (\beta_{11} y(a) + \beta_{12} y(b)) = \Phi_1 y + y(c_1), \\ -y'(b) - (\beta_{21} y(a) + \beta_{22} y(b)) = \Phi_2 y + y(c_2), \end{cases}$$

а закон дії такий:

$$\forall\, y \in D(T_B) \qquad T_B y = l_{cl}[y] + \Phi_1^* y(a) + \Phi_2^* y(b).$$

Введемо такі позначення:

$$\forall\, u \in H^1 \overset{\text{def}}{=} H_e \dot{+} \ker L (= H_0^1(H_0; (a,b))) \qquad \Psi u = (u(c_1), u(c_2)),$$

$$\Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2, \qquad \mathcal{X} = \Phi + \Psi.$$

$$\forall\, y \in D(L_{\max}) \qquad \Gamma_1^{[\Psi]} y = (y'(a), -y'(b)), \qquad \Gamma_2^{[\Psi]} y = (y(a), y(b)).$$

Нехай $\{\omega_1(x), \omega_2(x)\}$ — фундаментальна система розв'язків рівняння $-Y'' + p(x)Y = 0$, яка задовольняє співвідношення $\omega_1(a) = \omega_2(b) = \mathbf{I}_{H_0}$, $\omega_1(b) = \omega_2(a) = \mathbf{0}$.

Приймемо

$$\forall\, a=(a_1,a_2)\in\mathcal{H} \qquad Za=\omega_1 a_1+\omega_2 a_2,$$

$$\Omega=\begin{pmatrix}\omega_1'(a) & \omega_2'(a)\\ -\omega_1'(b) & \omega_2'(b)\end{pmatrix}.$$

Безпосередньо з результатів праці [12] випливає, що T_B є самоспряженим додатно визначеним оператором тоді і тільки тоді, коли

$$\widehat{B}\overset{\text{def}}{=}B-\Omega+2\,\mathrm{Re}(\mathcal{X}Z)-\mathcal{X}\mathcal{X}^{\bullet}\gg 0. \tag{9}$$

Далі, нехай

$$\begin{aligned}\pi(u,v)\overset{\text{def}}{=}&\int\limits_a^b[(u'(x)|v'(x))_{H_0}+(p(x)u(x)|v(x))_{H_0}]\,dx+(\beta_{11}u(a)|v(a))_{H_0}+\\ &+(\beta_{12}u(b)|v(a))_{H_0}+(\beta_{21}u(a)|v(b))_{H_0}+(\beta_{22}u(b)|v(b))_{H_0}+\\ &+(\Phi_1u+u(c_1)|v(a))_{H_0}+(\Phi_2u+u(c_2)|v(b))_{H_0}+(u(a)|\Phi_1v+v(c_1))_{H_0}+\\ &+(u(b)|\Phi_2v+v(c_2))_{H_0}\qquad\forall\,u,v\in H^1,\end{aligned} \tag{10}$$

$$J[u]\overset{\text{def}}{=}\pi(u,u)-2\,\mathrm{Re}\int\limits_a^b(u(x)|f(x))_{H_0}dx\qquad\forall u\in H^1, \tag{11}$$

де f — фіксований елемент простору $H=L_2(H_0;(a,b))$.

Теорема 3. *Якщо T_B — додатно визначений оператор (тобто якщо справджується умова* (9)*), то $H^1=H^1(H_0;(a,b))$ є його енергетичним простором, а форма $\pi(u,v)$, визначена згідно з* (10)*, — відповідним енергетичним скалярним добутком.*

Наслідок 3. *В умовах теореми 3 варіаційна задача*

$$J[u]\to\min,\qquad u\in H^1,$$

де J визначено згідно з (11)*, для будь-якого $f\in H$ має единий розв'язок $u_0=T_B^{-1}f$. При цьому*

$$J[u_0]=-(T_Bu_0|u_0)=-(f|u_0).$$

1. *Friedrichs K.* Spektral theorie nalbbeschraanter Operatoren und Anwendung auf die Spektral-zerlegung von Differential Operatoren // Math. Ann. – 1934. – **109**. – S. 465–487.
2. *Піпа Г. М., Сторож О. Г.* Акретивні збурення власних розширень додатно визначеного оператора // Мат. студії. – 2006. – **25**, № 2. – С. 181–190.
3. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I, II // Мат. сб. – 1947. – **20**, № 3. – С. 431–495; **21**, № 3. – С. 365–404.
4. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. – Москва: Наука, 1968. – 576 с.
5. *Кочубей А. Н.* Про розширення додатно визначеного симетричного оператора // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – № 3. – С. 168–171.
6. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.

7. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией. – Донецк, 1985. – 52 с. – (Препр. / АН УССР. Дон. физ.-тех. ин-т; 85–9).
8. *Сторож О. Г.* Методи теорії розширень та диференціально-граничні оператори: Дис. … д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 1995. – 277 с.
9. *Штраус А. В.* О расширениях полуограниченного оператора // Докл. АН СССР. – 1973. – **231**, № 3. – С. 543–546.
10. *Арлінський Ю. М.* Максимальні акретивні розширення секторіальних операторів: Автореф. дис. … д-ра фіз.-мат. наук. – Київ, 2000. – 36 с.
11. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Докл. АН СССР. – 1969. – **184**, № 5. – С. 1034–1037.
12. *Піпа Г. М.* Невід'ємні та акретивні збурення оператора третьої крайової задачі для диференціального виразу Штурма–Ліувілля з обмеженим операторним потенціалом // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 207–214.

Львівський національний університет ім. Івана Франка
Надійшло до редакції 01.02.2011

Г. М. Качуривская, О. Г. Сторож

Условия положительной определенности возмущения абстрактного аналога оператора третьей краевой задачи и соответствующие вариационные задачи

В работе роль исходного объекта играет положительно определенный оператор L_0, действующий в гильбертовом пространстве H. Основной объект исследования — оператор $\widetilde{L}_B$ — интерпретируется как возмущение некоторого собственного расширения оператора L_0. С применением методов теории расширений установлены критерии максимальной аккретивности и максимальной неотрицательности оператора $\widetilde{L}_B$. В случае, когда этот оператор является положительно определенным, построено его энергетическое пространство и доказана разрешимость соответствующей вариационной задачи. Более того, рассматривается ситуация, когда L_0 является минимальным оператором, порожденным в пространстве бесконечномерных вектор-функций дифференциальным выражением Штурма–Лиувилля.

H. M. Kachurivska, O. G. Storozh

The criteria of positive definiteness of the perturbation of an abstract analog for the operator of the third boundary-value problem and corresponding variational problems

The role of initial object is played by the positive definite operator L_0 acting in a Hilbert space H. The main object of the investigation — operator $\widetilde{L}_B$ — is interpreted as a perturbation of some proper extension of L_0. Using methods of the extension theory, the criteria of maximal accretivity and maximal nonnegativity for $\widetilde{L}_B$ are established. In the case where $\widetilde{L}_B$ is a positive definite operator, its energetic space is constructed, and the solvability of the corresponding variational problem is proved. Moreover, the situation when L_0 is a minimal differential operator generated in the space of infinite-dimensional vector-functions by the Sturm–Liouville differential expression is considered.