УДК 519.642

С. Г. Солодкий, Є. В. Семенова

Про апостеріорний вибір параметра дискретизації при розв'язуванні рівняння Сімма повністю дискретним методом колокації

(Представлено академіком НАН України В. Л. Макаровим)

Розглянуто задачу наближеного розв'язування інтегрального рівняння Сімма для нескінченно гладкої замкненої межі. У метриці соболівських просторів знайдено оцінки похибки повністю дискретного методу колокації при виборі параметра дискретизації згідно з принципом рівноваги. Встановлено, що обраний принцип дозволяє досягнути в межах вказаного методу того ж порядку точності, що і при апріорному виборі параметра дискретизації.

У роботі розглядається інтегральне рівняння першого роду з логарифмічною особливістю в ядрі, що отримало у спеціальній літературі назву рівняння Сімма (див., наприклад, [1, § 5.6]). Раніше це рівняння досліджувалося, зокрема, в роботах [2, 3], де було встановлено стійкість повністю дискретного проекційного методу на парах соболівських просторів, обраних належним чином. Аналогічні результати були отримані і для деяких варіантів методу колокації: в роботі [4] розглядався дискретний спектральний колокаційний метод, а в роботі [5] — повністю дискретний метод колокації (ПДМК).

Поряд з аналізом стійкості методу природним чином виникає питання про оцінку його точності у випадку збурених даних. Як відомо, досягнення заданої точності методу тісно пов'язане з вибором параметра регуляризації (у нашому випадку останній збігається з параметром дискретизації), що може бути здійснено в рамках двох підходів: по-перше, апріорно, тобто залежно від гладкості розв'язку, і, по-друге, апостеріорно, тобто без використання точної гладкості розв'язку. При апріорному виборі параметра регуляризації оцінка точності (у шкалах соболівських просторів) розв'язування рівняння Сімма для ПДМК була встановлена в [5], а для повністю дискретного проекційного методу — у [2, 3].

Зазначимо, що дослідження точності методів при апостеріорному виборі параметра дискретизації для рівняння Сімма раніше не проводилися. Наша мета — поширити дослідження [5] на випадок апостеріорного вибору параметра дискретизації. Для цього скористаємося принципом рівноваги, який для розв'язання некоректних задач вперше був запропонований у роботі [6]. Як буде показано нижче, застосування принципу рівноваги дозволяє зберегти порядок похибки ПДМК, відомий раніше лише в апріорному випадку(див. [5]), без використання жодної додаткової інформації про точну гладкість розв'язку.

Постановка задачі. Розглянемо рівняння Сімма

$$\int\limits_{\Gamma} \log|x-y| v(y)\, ds_y = g(x), \qquad x \in \Gamma, \tag{1}$$

де Γ — замкнена C^∞-гладка жорданова крива, яка є межею однозв'язної області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Нехай $\gamma(t)\colon [0,1] \to \Gamma$ є C^∞-гладкою 1-періодичною параметризацією межі Γ такою, що

$|\gamma'(t) \neq 0|$ для будь-якого $t \in [0,1]$. Відомо (див. [7]), що єдиність розв'язку рівняння (1) гарантована у випадку, коли діаметр Γ не перевищує 1, а виконання цієї умови легко досягається відповідним масштабуванням змінних.

Перепишемо (1) у стандартному вигляді (див., наприклад, [4]):

$$Au := A_0 u + Bu = f, \tag{2}$$

де

$$u(t) = v(\gamma(t))|\gamma'(t)|, \qquad f(t) = g(\gamma(t)),$$

$$(A_0)(t) = \int_0^1 \log|\sin\pi(t-s)|u(s)\,ds,$$

$$(Bu)(t) = \int_0^1 b(t,s)u(s)\,ds, \qquad b(t,s) = \begin{cases} \log\dfrac{|\gamma(t)-\gamma(s)|}{|\sin\pi(t-s)|}, & t \neq s, \\ \log(|\gamma'(t)/\pi|), & t = s. \end{cases}$$

Відомо (див. [4]), що власні функції оператора A_0 мають вигляд тригонометричних поліномів

$$A_0 e^{2\pi ikt} = \begin{cases} -(2|k|)^{-1}e^{2\pi ikt}, & k = \pm1, \pm2, \ldots, \\ -\log 2, & k = 0, \end{cases}$$

а ядро $b(t,s)$ оператора B є C^{∞}-гладкою і 1-біперіодичною функцією.

Позначимо через $\{H^{\lambda}\}$, $-\infty < \lambda < \infty$, шкалу гільбертових просторів 1-періодичних функцій з нормою

$$\|u\|_{\lambda} := \left(|\widehat{u}(0)|^2 + \sum_{n\neq 0, n\in\mathbb{Z}} |n|^{2\lambda}|\widehat{u}(n)|^2\right)^{1/2},$$

де $\widehat{u}(n) = \int_0^1 e^{-2\pi int}u(t)\,t$ — коефіцієнти Фур'є функції $u(t)$, а $H^0 = L_2(0,1)$.

Відомо (див., наприклад, [8]), що для будь-якого $\lambda \in \mathbb{R}$ знайдуться сталі b_1, $b_2 > 0$ такі, що оператор A задовольняє умову

$$b_1\|x\|_{\lambda-1} \leqslant \|Ax\|_{\lambda} \leqslant b_2\|x\|_{\lambda-1}. \tag{3}$$

Треба зазначити, що задача (2) нестійка до збурення вхідних даних у просторі H^{λ}, що пов'язано з компактністю оператора $A\colon H^{\lambda} \to H^{\lambda}$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Відомо, що у загальному випадку для розв'язання нестійких задач потрібно використовувати принципи тіхоновської регуляризації. З іншого боку, рівняння виду (2) мають таку важливу властивість: оператор A породжує ізоморфізм на парі просторів H^{λ} та $H^{\lambda+1}$ для всіх $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Вказана властивість випливає з ізоморфності оператора $A_0\colon H^{\lambda} \to H^{\lambda+1}$ для будь-якого λ та компактності оператора $B\colon H^{\lambda} \to H^{\lambda+1}$, що, у свою чергу, дозволяє при відповідному виборі параметра дискретизації n саморегуляризовувати розглядувану задачу без використання додаткових технік для її розв'язання (більш докладно про саморегуляризацію некоректних задач див. [9]). Викладений нижче метод побудовано з урахуванням зазначеної властивості досліджуваної задачі.

Для подальшого викладення матеріалу нам будуть потрібні такі позначення. Введемо n-мірний простір тригонометричних поліномів

$$\mathcal{T}_n = \left\{ u_n \colon u_n = \sum_{k \in Z_n} c_k e^{2\pi i k t} \right\}, \qquad Z_n = \left\{ k \colon -\frac{n}{2} < k \leqslant \frac{n}{2},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}.$$

Позначимо через P_n ортогональний проектор виду

$$P_n u = \sum_{k \in Z_n} \widehat{u}(k) e^{2\pi i k t} \in \mathcal{T}_n,$$

а через Q_n — інтерполяційний проектор такий, що $Q_n u \in \mathcal{T}_n$ та на рівномірній сітці $(1/n, 2/n, \ldots, 1) \in [0,1]$ справедливо

$$(Q_n u)(jn^{-1}) = u(jn^{-1}), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

У роботі [5] для розв'язування (2) було запропоновано ПДМК, суть якого полягає у наближенні (2) рівнянням

$$A_n u_n := A_0 u_n + Q_n B_n u_n = Q_n f, \qquad u_n \in \mathcal{T}_n, \tag{4}$$

де $(B_n u)(t) = n^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} b(t, jn^{-1}) u(jn^{-1})$.

Нагадаємо далі деякі результати про стійкість і збіжність ПДМК (4) (див., наприклад, [1, § 10]).

Теорема 1 [1]. *Нехай діаметр межі Γ відрізняється від 1, а $f \in H^{\nu+1}$, де $\nu > 1/2$. Тоді знайдуться такі n_0 і c_0, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ і $n \geqslant n_0$ виконується нерівність стійкості*

$$\|v_n\|_\lambda \leqslant c_0 \|A_n v_n\|_{\lambda+1}. \tag{5}$$

При цьому справедлива оцінка похибки методу (4)

$$\|u_n - u\|_\lambda \leqslant c_{\lambda,\nu} n^{\lambda-\nu} \|u\|_\nu, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant \nu, \tag{6}$$

де $c_{\lambda,\nu} = 2^{\nu-\lambda}\Big(1 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{j^{2\nu}}\Big)^{1/2}$, $u = A^{-1} f \in H^\nu$ *є точним розв'язком рівняння* (2) *та* $u_n = A_n^{-1} Q_n f$ *є розв'язком* (4).

Наслідуючи [5], припустимо, що замість точних функцій $f(t)$ та $\gamma(t)$ нам відомі лише деякі їх збурення $f_\delta(t)$ та $\gamma_\varepsilon(t)$ такі, що у вузлах рівномірної сітки справедливі оцінки похибки

$$\left(n^{-1} \sum_{j=1}^{n} |f_\delta(jn^{-1}) - f(jn^{-1})|^2 \right)^{1/2} \leqslant \delta \|f\|_{\nu+1}, \tag{7}$$

$$|\gamma_\varepsilon(in^{-1}) - \gamma(in^{-1})| \leqslant \varepsilon, \qquad |\gamma'_\varepsilon(in^{-1}) - \gamma'(in^{-1})| \leqslant n\varepsilon, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Тоді ядро $b_\varepsilon(t,s)$ збуреного оператора B_ε може бути записане таким чином:

$$b_\varepsilon(t,s) = \begin{cases} \log \dfrac{|\gamma_\varepsilon(t) - \gamma_\varepsilon(s)|}{|\sin \pi(t-s)|}, & t \neq s, \\ \log(|\gamma'_\varepsilon(t)/\pi|), & t = s, \end{cases}$$

а метод колокації набуде вигляду

$$A_{n,\varepsilon} u_{n,\delta,\varepsilon} := A_0 u_{n,\delta,\varepsilon} + Q_n B_{n,\varepsilon} u_{n,\delta,\varepsilon} = Q_n f_\delta, \qquad u_{n,\delta,\varepsilon} \in \mathcal{T}_n, \tag{9}$$

де $(B_{n,\varepsilon}u)(t) = n^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} b_\varepsilon(t, jn^{-1}) u(jn^{-1})$.

У поданому нижче твердженні наведені оцінки, що характеризують стійкість процесу дискретизації у відношенні до збурення вхідних даних.

Лема 1 [5]. *За умов* (7) *та* (8) *виконується*

$$\|Q_n f_\delta - Q_n f\|_0 \leqslant \delta \|f\|_{\nu+1},$$

$$\|(A_{n,\varepsilon} - A_n) v_n\|_0 \leqslant d\varepsilon \log n \|v_n\|_\nu, \qquad v_n \in \mathcal{T}_n,$$

де d є стала, яка не залежить від n, δ та ε.

Тепер сформулюємо результат, який встановлює оцінку похибки наближених розв'язків u_n та $u_{n,\delta,\varepsilon}$, які отримані у межах методів (4) та (9) відповідно.

Теорема 2 [5]. *Нехай виконуються нерівність* (5) *і умови леми 1. Тоді для $n \geqslant n_0$, що задовольняють умову*

$$d\varepsilon \log n \leqslant q c_0^{-1}, \qquad q \in (0,1),$$

оператор $A_{n,\varepsilon}$ має обернений та для будь-якого $0 \leqslant \lambda \leqslant \nu$ виконується

$$\|u_n - u_{n,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant c_\xi n^{\lambda+1} (\delta \|f\|_{\nu+1} + d\varepsilon \log n \|u\|_\nu) \leqslant c_\xi n^{\lambda+1} \|u\|_\nu (b_2 \delta + d\varepsilon \log n), \tag{10}$$

де $c_\xi = 2^{-\lambda-1} c_0/(1-q)$.

Повна оцінка похибки ПДМК (9) встановлена в [5]:

$$\|u - u_{n,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant c'[n^{\lambda-\nu} + n^{\lambda+1}(\delta + \varepsilon \log n)] \|u\|_\nu, \tag{11}$$

де c' — стала, яка не залежить від n, δ, ε. Крім того, там же було показано, що при виборі параметра дискретизації за правилом $n = O((\delta+\varepsilon)^{-1/(\nu+1)})$ оцінка (11) набуває вигляду

$$\|u - u_{n,\delta,\varepsilon}\|_\lambda = O\left(\delta^{\frac{\nu-\lambda}{\nu+1}} + \varepsilon^{\frac{\nu-\lambda}{\nu+1}} \log \frac{1}{\delta+\varepsilon}\right), \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant \nu. \tag{12}$$

Ставиться задача знайти для методу (9) оцінку похибки, аналогічну (12), на випадок невідомого параметра гладкості ν. Для цього в процесі обчислень необхідно узгодити рівні похибки δ, ε з рівнем дискретизації n. З цією метою нижче буде використано апостеріорне правило зупинки у вигляді принципу рівноваги [6]. Суть названого правила полягає в тому, щоб знайти таке значення параметра дискретизації, яке мінімізує суму правих частин співвідношень (6) та (10), яку можна розглядати як повну оцінку похибки ПДМК (пор. (11)). Очевидно, що у разі $\lambda < \nu$ функція $c_{\lambda,\nu} n^{\lambda-\nu}$ буде ввігнутою і спадною до 0 при $n \to 0$, а $c_\xi n^{\lambda+1}(b_2\delta + d\varepsilon\log n)$ — ввігнутою та зростаючою до ∞ при $n \to \infty$. Отже, значення параметра $n_{\rm opt}$, яке теоретично забезпечує найменшу похибку розв'язку, знаходиться в точці перетину (з точністю до найближчого цілого) зазначених вище функцій:

$$c_{\lambda,\nu}n_{\rm opt}^{\lambda-\nu} = c_\xi n_{\rm opt}^{\lambda+1}(\delta + d\varepsilon\log n_{\rm opt}). \tag{13}$$

Зауваження 1. З останньої рівності легко отримати оцінку похибки для методу (9) у разі вибору параметра дискретизації згідно з (13), а саме:

$$\|u - u_{n_{\rm opt},\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant 2c_\xi\|u\|_\nu n_{\rm opt}^{\lambda+1}(d\varepsilon\log n_{\rm opt} + b_2\delta). \tag{14}$$

На жаль апріорне правило (13) не може бути використано в нашій ситуації, коли величина ν невідома. Проте, як буде встановлено нижче, принцип рівноваги дозволяє наблизитися до ідеального рівня $n_{\rm opt}$ без точної інформації про гладкісні властивості розв'язку. Будемо розглядати задачу (2) на множині розв'язків $u \in H^\nu$, $\|u\|_\nu \leqslant \eta$.

Наведемо опис принципу рівноваги. Через D_N позначимо множину можливих значень параметра дискретизації n

$$D_N = \{n\colon n = 1, \ldots, N, N = [(\delta+\varepsilon)^{-1/(\lambda+1)}]\}.$$

Принцип рівноваги полягає у виборі номера n_+, який апроксимує оптимальне можливе значення $n_{\rm opt}$ за правилом

$$n_+ = \min\{n\colon n \in D_N^+\}, \tag{15}$$

де

$$D_N^+ = \{n \in D_N\colon \|u_{n,\delta,\varepsilon} - u_{j,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant 4c_\xi\eta j^{\lambda+1}(d\varepsilon\log j + b_2\delta),\ j > n\}.$$

Крім того, нам знадобиться такий допоміжний параметр:

$$n_\star := \min\{n\colon c_{\lambda,\nu}n^{\lambda-\nu} \leqslant c_\xi n^{\lambda+1}(d\varepsilon\log n + b_2\delta)\}. \tag{16}$$

Сформулюємо основні результати, які встановлюють оцінки похибки ПДМК, використовуючи принцип рівноваги.

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми 1 і параметр дискретизації обрано згідно з* (15), *тоді*

$$\|u - u_{n_+,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant 6c''c_\xi\eta\left(\frac{n_\star}{n_\star - 1}\right)^{\lambda+1} n_{\rm opt}^{\lambda+1}(d\varepsilon\log n_{\rm opt} + b_2\delta), \tag{17}$$

де c'' не залежить від δ, ε, n.

Доведення. Для оцінки шуканої величини скористаємося нерівністю трикутника

$$\|u - u_{n,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant \|u_n - u\|_\lambda + \|u_n - u_{n,\delta,\varepsilon}\|_\lambda.$$

Тоді з урахуванням оцінок (6), (10) та умови $\|u\|_\nu \leqslant \eta$ маємо

$$\|u - u_{n,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant c_{\lambda,\nu}n^{\lambda-\nu}\eta + c_\xi n^{\lambda+1}(d\varepsilon\log n + b_2\delta)\eta. \tag{18}$$

Згідно з (18) отримуємо

$$\|u_{j,\delta,\varepsilon} - u_{n_\star,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant \|u_{j,\delta,\varepsilon} - u\|_\lambda + \|u - u_{n_\star,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant$$
$$\leqslant c_{\lambda,\nu} j^{\lambda-\nu}\eta + c_\xi j^{\lambda+1}(d\varepsilon \log j + b_2\delta)\eta + c_{\lambda,\nu} n_\star^{\lambda-\nu}\eta + c_\xi n_\star^{\lambda+1}(d\varepsilon \log n_\star + b_2\delta)\eta.$$

Звідси за допомогою (16) знаходимо для всіх $j > n_\star$

$$\|u_{j,\delta,\varepsilon} - u_{n_\star,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant 2c_\xi j^{\lambda+1}(d\varepsilon \log j + b_2\delta)\eta + 2c_\xi n_\star^{\lambda+1}(d\varepsilon \log n_\star + b_2\delta)\eta,$$

а внаслідок зростання функції $n^{\lambda+1}(d\varepsilon \log n + b_2\delta)$ отримуємо

$$\|u_{j,\delta,\varepsilon} - u_{n_\star,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant 4c_\xi j^{\lambda+1}(d\varepsilon \log j + b_2\delta)\eta. \tag{19}$$

Враховуючи (15) та (19), знаходимо, що $n_+ \leqslant n_\star$ та $n_\star \in D_N^+$.

Із (15), (16), (18), а також на підставі означення множини D_N^+ маємо

$$\|u - u_{n_+,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant \|u - u_{n_\star,\delta,\varepsilon}\|_\lambda + \|u_{n_\star,\delta,\varepsilon} - u_{n_+,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant 2c_\xi n_\star^{\lambda+1}(d\varepsilon \log n_\star + b_2\delta)\eta +$$
$$+ 4c_\xi n_\star^{\lambda+1}(d\varepsilon \log n_\star + b_2\delta)\eta = 6c_\xi n_\star^{\lambda+1}(d\varepsilon \log n_\star + b_2\delta)\eta. \tag{20}$$

Крім того, з урахуванням (16) виконується

$$c_{\lambda,\nu}(n_\star - 1)^{\lambda-\nu} > c_\xi(d\varepsilon \log(n_\star - 1) + b_2\delta)(n_\star - 1)^{\lambda+1},$$
$$c_{\lambda,\nu}(n_\star - 1)^{-\nu-1} > c_\xi(d\varepsilon \log(n_\star - 1) + b_2\delta).$$

Тоді з (13) випливає, що $n_\star - 1 \leqslant n_{\text{opt}}$. З урахуванням останньої нерівності з (20) остаточно отримуємо

$$\|u - u_{n_+,\delta,\varepsilon}\|_\lambda \leqslant 6c_\xi \eta n_\star^{\lambda+1}(d\varepsilon \log n_\star + b_2\delta) =$$
$$= 6c_\xi\eta\left(\frac{n_\star}{n_\star - 1}\right)^{\lambda+1}(n_\star - 1)^{\lambda+1}\left(d\varepsilon \log\left((n_\star - 1)\frac{n_\star}{n_\star - 1}\right) + b_2\delta\right) \leqslant$$
$$\leqslant 6c_\xi\eta\left(\frac{n_\star}{n_\star - 1}\right)^{\lambda+1}(n_{\text{opt}})^{\lambda+1}(d\varepsilon(\log n_{\text{opt}} + \log 2) + b_2\delta),$$

що й потрібно було довести.

Зауваження 2. Очевидно, що оцінки (14) та (17), отримані для апріорного правила (13) та апостеріорного (15) відповідно, збігаються за порядком.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3, тоді*

$$\|u - u_{n_+,\delta,\varepsilon}\|_\lambda = O(\delta^{(\nu-\lambda)/(\nu+1)} + \varepsilon^{(\nu-\lambda)/(\nu+1)} \log(\varepsilon + \delta)^{-1}).$$

1. *Saranen J., Vainikko G.* Periodic integral and pseudodifferential equations with numerical approximation. – Berlin: Springer, 2002. – 452 p.
2. *Pereverzev S. V., Prossdorf S.* On the characterization of self-regularization properties of a fully discrete projection method for Symm's integral equation // J. Integral Equations Appl. – 2000. – **12**, No 2. – P. 113–130.
3. *Solodky S. G., Lebedeva E. V.* Error bounds of a fully discrete projection method for Symm's integral equation // Comp. Method Appl. Math. – 2007. – **7**, No 3. – P. 255–263.

4. *Saranen J.* A modified discrete spectral collocation method for first kind integral equations with logarithmic kernel // J. Integral Equations Appl. – 1993. – **5**, No 4. – P. 547–567.
5. *Bruckner G., Prossdorf S., Vainikko G.* Error bounds of discretization methods for boundary integral equations with noisy data // Appl. Anal. – 1996. – **63**, No 1–2. – P. 25–37.
6. *Pereverzev S., Schock E.* On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems // SIAM J. Numer. Anal. – 2005. – **43**, No 5. – P. 2060. – 2076.
7. *Hsiao G. C., Wendland W. L.* A finite element method for some integral equations of the first kind // J. Math. Anal. Appl. – 1977. – **58**. – P. 449–481.
8. *Mathe P., Pereverzev S. V.* Optimal discretization of inverse problems in Hilbert scales. Regularization and self-regularization of projection methods // SIAM J. Numer. Anal. – 2001. – **38**, No 6. – P. 1999. – 2021.
9. *Вайникко Г. М., Хаамярик У. А.* Проекционные методы и саморегуляризация некорректных задач // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1985. – **29**. – С. 1–17.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 24.03.2011

С. Г. Солодкий, Е. В. Семенова

Про апостериорный выбор параматра дискретизации для решения уравнения Симма полностью дискретным методом коллокации

Рассмотрена задача приближенного решения интегрального уравнения Симма для бесконечно гладкой замкнутой границы. В метрике соболевских пространств найдены оценки погрешности полностью дискретного метода коллокации при выборе параметра дискретизации согласно принципу равновесия. Установлено, что выбранный принцип позволяет достичь в рамках указанного метода тот же порядок точности, что и при априорном выборе параметра дискретизации.

S. G. Solodky, E. V. Semenova

A posteriori selection of a discretization parameter for solving Symm's equation by the fully discretized collocation method

The problem of solving Symm's integral equation for an infinitely smooth closed boundary is considered. The error bounds of the fully discretized collocation method on the scale of Sobolev spaces are established with selection of the discretization parameter by a balancing principle. The principle provides the achievement of the same accuracy that can be achieved with a priori selection of the discretization parameter.