УДК 517.98

А. В. Чайковський

Задача Коші для лінійного диференціального рівняння з узагальненим G-секторіальним операторним коефіцієнтом

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Введено узагальнення класу G-секторіальних операторів на випадок, коли резольвента за межами заданого сектора, в якому розташований спектр, не є обмеженою. Наведено достатні умови розв'язності задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь в банаховому просторі з узагальненим G-секторіальним операторним коефіцієнтом.

Нехай $(B, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, I — одиничний оператор, O — нульовий оператор в B. Надалі $D(A)$, $\sigma(A)$, $R_\lambda(A)$ позначають відповідно область визначення, спектр і резольвенту лінійного оператора A.

Теорія секторіальних операторів та пов'язана з нею теорія аналітичних напівгруп добре відомі і мають численні застосування (див., наприклад, [1–3]). У роботах [4, 5] описані оператори, спектр яких лежить у відповідному секторі, але резольвента спадає на нескінченності повільніше, ніж у секторіальних операторів. У даній роботі розглядаються достатні умови розв'язності задачі Коші для лінійних рівнянь, які узагальнюють твердження з робіт [4, 5].

1. Означення узагальнених G-секторіальних операторів. Наведемо означення G-секторіальних операторів, запропоноване в роботі [4].

Означення 1. Будемо казати, що функція $G\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ належить класу Ψ, якщо вона задовольняє такі умови:

1) G — незростаюча на $[0,+\infty)$;

2) $G(t) \to 0$, $t \to +\infty$;

3) функція $1/G$ ліпшицева на $[0,+\infty)$.

Означення 2. Нехай $G \in \Psi$. Лінійний оператор $T\colon D(T) \subset B \to B$ називають *G-секторіальним*, якщо існують такі сталі $a \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in (0, \pi/2)$, що для множини $S_{a,\varphi}$ виконуються умови:

1) $\sigma(T) \subset S_{a,\varphi}$;

2) $\exists\, M > 0\ \forall\, \lambda \notin S_{a,\varphi}\colon \|R_\lambda(T)\| \leqslant MG(|\lambda - a|)$.

Узагальнимо поняття G-секторіального оператора, розширивши клас Ψ.

Означення 3. Будемо казати, що неперервна функція $G\colon [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ належить класу Ψ_0, якщо вона задовольняє такі умови:

1) $\exists\, L_1 > 0\ \forall\, u \geqslant 1,\ v \in [-1, 1]\colon G(u+v) \leqslant L_1 G(u)$;

2) $\exists\, L_2 > 0\ \forall\, u > 0,\ v \geqslant 1\colon G(uv) \leqslant L_2(1 + G(v))G(u)$.

Зауваження 1. З умови означення 3 випливає, що

$$\exists\, C_1, C_2 > 0 \qquad \exists\, \alpha > 0 \qquad \forall\, t > 0\colon \qquad G(t) \leqslant C_1 + C_2 t^\alpha. \tag{1}$$

Дійсно, покладемо

$$C_1 := \max_{v\in[0,2]} G(v), \qquad C_2 := G(1)L_2\Big(1 + \max_{v\in[1,2]} G(v)\Big), \qquad \alpha := \log_2(1 + L_2(1 + G(2))).$$

Тоді при $t \in [0,2]$ маємо $G(t) \leqslant C_1$, при $t = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, маємо

$$G(2^n) \leqslant 2^\alpha G(2^{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant 2^{n\alpha} G(1),$$

а при $t \in [2^n, 2^{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$:

$$G(t) = G((t \cdot 2^{-n}) \cdot 2^n) \leqslant L_2(1 + G(t \cdot 2^{-n}))G(2^n) \leqslant L_2(1 + G(t \cdot 2^{-n}))2^{n\alpha} G(1) \leqslant C_2 t^\alpha.$$

Зауваження 2. Справджується включення $\Psi \subset \Psi_0$. Дійсно, якщо $G \in \Psi$, то функція G неперервна і

$$\forall\, u \geqslant 1, \qquad v \in [-1,1]\colon \qquad G(u+v) \leqslant G(u) + L|v|G(u+v)G(u) \leqslant (1 + LG(0))G(u),$$

де L — стала з означення ліпшицевості в п. 3 означення 1. Крім того,

$$\forall\, u > 0, \qquad v \geqslant 1\colon \qquad G(uv) \leqslant G(u) \leqslant (1 + G(v))G(u).$$

Разом з кожною функцією $G \in \Psi$ будемо розглядати функцію $H(t) := \dfrac{1}{t} G\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $t > 0$. При цьому $G(t) = \dfrac{1}{t} H\left(\dfrac{1}{t}\right)$, $t > 0$.

Означення 4. Нехай $G \in \Psi_0$. Лінійний оператор $T\colon D(T) \subset B \to B$ назвемо *узагальненим G-секторіальним*, якщо існують такі сталі $a \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in (0, \pi/2)$, що для множини $S_{a,\varphi}$ виконуються умови:

1) $\sigma(T) \subset S_{a,\varphi}$;

2) $\exists\, M > 0\ \forall\, \lambda \notin S_{a,\varphi}\colon \|R_\lambda(T)\| \leqslant MG(|\lambda - a|)$.

Лема 1. *Якщо T — G-секторіальний оператор, то для кожного $b \in \mathbb{R}$, $b < c := \min\limits_{\lambda \in \sigma(T)} \operatorname{Re} \lambda$ існує $\theta \in (0, \pi/2)$ таке, що означення 4 справджується для сектора $S_{b,\theta}$.*

Доведення. Твердження леми випливає з означення, якщо покласти $\theta = \varphi$ при $b \leqslant a$, і

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{c-a}{c-b} \operatorname{tg} \varphi\right),$$

при $a < b < c$. Дійсно, при $\lambda \notin S_{a,\varphi}$ за умовою 1 означення 3 маємо:

$$\|R_\lambda(T)\| \leqslant MG(|\lambda - a|) \leqslant MC_G G(|\lambda - b|).$$

Теорема 1. *Нехай $T\colon D(T) \subset B \to B$ — лінійний оператор, для деякого сектора $S_{a,\varphi}$ виконується умова 1 означення 4 і*

$$\exists\, C > 0 \qquad \exists\, \alpha > 0 \qquad \forall\, \lambda \notin S_{a,\varphi}\colon \|R_\lambda(T)\| \leqslant C(|\lambda - a|^\alpha + 1).$$

Покладемо

$$G(t) := (t^\alpha + 1) \sup\{(|\lambda - a|^\alpha + 1)^{-1} \|R_\lambda(T)\| \mid \lambda \in \mathbb{C} \backslash S_{a,\varphi}\}, \qquad t \geqslant 0.$$

Тоді $G \in \Psi_0$ і T — узагальнений G-секторіальний оператор.

Доведення. Задана степенева функція задовольняє обидві умови означення 3. Крім того, справджується оцінка $\|R_\lambda(T)\| \leqslant G(|\lambda - a|)$, $\lambda \in \mathbb{C} \backslash S_{a,\varphi}$.

2. Операторна експонента для узагальнених G-секторіальних операторів. Для чисел $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in (0, \pi/2)$, $r \in (0, +\infty)$ позначимо

$$\Gamma^1_{a,\varphi,r} := \{a - se^{i\varphi} \mid s \in (-\infty, -r]\}; \qquad \Gamma^2_{a,\varphi,r} := \{a + se^{-i\varphi} \mid s \in [r, +\infty)\};$$

$$\Gamma^3_{a,\varphi,r} := \{a + re^{is} \mid s \in [\varphi, 2\pi - \varphi]\}; \qquad \Gamma_{a,\varphi,r} := \Gamma^1_{a,\varphi,r} \bigcup \Gamma^2_{a,\varphi,r} \bigcup \Gamma^3_{a,\varphi,r}.$$

Означення 5. Нехай $r \in (0, +\infty)$, $G \in \Psi_0$, T — узагальнений G-секторіальний оператор, причому означення 4 виконується для сектора $S_{a,\varphi}$. *Операторною експонентою* для оператора T будемо називати $\mathcal{L}(B)$-значну функцію

$$e^{-Tt} := -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{a,\varphi,r}} e^{-tz} R_z(T)\, dz, \qquad t > 0.$$

Зауваження. 1. Тут і далі всі інтеграли є інтегралами Рімана (власними чи невласними).

2. Збіжність інтеграла в означенні 5 випливає з оцінки (1), а його незалежність від r — з аналітичності підінтегральної функції.

3. Так само, як для обмеженого оператора, можна показати, що введена операторна експонента має такі елементарні властивості:

1) $\forall \tau \in \mathbb{R}\ \forall t > 0$: $e^{-(T+\tau I)t} = e^{-\tau t} \cdot e^{-Tt}$;

2) $\forall t_1,\ t_2 > 0$: $e^{-(t_1+t_2)T} = e^{-Tt_1} \cdot e^{-Tt_2}$.

4. Якщо T — узагальнений G-секторіальний оператор і означення 4 виконується для сектора $S_{a,\varphi}$, то оператор $T - bI$, де $b \in \mathbb{R}$, також є G-секторіальним, причому означення 4 виконується для сектора $S_{a-b,\varphi}$. Враховуючи попереднє зауваження, операторні експоненти для операторів T і $T - bI$ мають простий зв'язок. Тому надалі, не обмежуючи загальності, розглядатимемо випадок $a = 0$.

Лема 2. *Якщо $G \in \Psi$ і T — узагальнений G-секторіальний оператор, то*

1) $\forall t > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$: $R(e^{-Tt}) \subset D(T^n)$;

2) $\forall t > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}\ \forall r > 0\ \forall \lambda \notin (S_{0,\varphi} \bigcup \Gamma_{0,\varphi,r})$:

$$(T - \lambda I)^n e^{-Tt} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{0,\varphi,r}} (z - \lambda)^n e^{-zt} R_z(T)\, dz + F_n(\lambda, t),$$

де

$$F_n(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{-n-1} (R_\lambda(T))^{-n-k} \frac{(-t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

якщо λ і $S_{0,\varphi}$ лежать по один бік від кривої $\Gamma_{0,\varphi,r}$ і $n < 0$, та $F_n(\lambda, t) = O$ в інших випадках.

Доведення аналогічне доведенню леми 5 в [4].

Лема 3. *Нехай $G \in \Psi_0$, T — узагальнений G-секторіальний оператор, $\gamma > -1$, $k > 0$. Тоді існує така стала $C > 0$, що для довільного $t > 0$ і для довільної визначеної та неперервної на $\Gamma_{0,\varphi,t^{-1}}$ комплекснозначної функції f такої, що $|f(z)| \leqslant |z|^\gamma e^{-k|z|}$, $z \in \Gamma_{0,\varphi,1}$, виконується нерівність*

$$\left\| \int\limits_{\Gamma_{0,\varphi,t^{-1}}} f(tz) R_z(T)\, dz \right\| \leqslant C H(t).$$

Доведення. Оцінимо інтеграли по частинах кривої $\Gamma_{0,\varphi,t^{-1}}$.

$$\int\limits_{\Gamma^1_{0,\varphi,t^{-1}}} |f(tz)|\cdot\|R_z(T)\|\cdot|dz| \leqslant M\int\limits_{t^{-1}}^{+\infty} t^{\gamma}s^{\gamma}e^{-kst}G(s)ds = |ts=u| =$$

$$= Mt^{-1}\int\limits_{1}^{+\infty} u^{\gamma}e^{-ku}G\left(\frac{u}{t}\right)du \leqslant Mt^{-1}L_2G(t^{-1})\int\limits_{1}^{+\infty}(1+G(u))u^{\gamma}e^{-ku}du = C_1H(t).$$

Оцінка для $\Gamma^2_{0,\varphi,t^{-1}}$ аналогічна.

$$\int\limits_{\Gamma^3_{0,\varphi,t^{-1}}} |f(tz)|\cdot\|R_z(T)\|\cdot|dz| \leqslant \int\limits_{\varphi}^{2\pi-\varphi} e^{-k}MG(t^{-1})\cdot t^{-1}ds = C_3H(t).$$

Теорема 2. *Нехай $G\in\Psi_0$, T — узагальнений G-секторіальний оператор. Тоді справджуються такі оцінки:*

1) $\forall\, n\geqslant 0\ \exists\, C_n>0\ \forall\, t>0$: $\|T^ne^{-Tt}\|\leqslant C_nH(t)t^{-n}$;

2) $\|e^{-Tt}\|\to 0,\ t\to+\infty$;

3) $\forall\, n\geqslant 0\ \forall\, t_2>t_1>0$: $\|T^{n-1}(e^{-Tt_1}-e^{-Tt_2})\|\leqslant C_n\int\limits_{t_1}^{t_2}H(t)t^{-n}dt$;

4) $\forall\, n\geqslant 0\ \forall\, t_2>t_1>0$: $\|T^{n-2}(e^{-Tt_2}-e^{-Tt_1}+T(t_2-t_1)e^{-Tt_1})\|\leqslant C_n\int\limits_{t_1}^{t_2}H(t)(t_2-t)t^{-n}dt$.

Доведення. Твердження п. *1* та п. *2* отримуються з леми 3 тими ж міркуваннями, що використані при доведенні теореми 2 в роботі [4].

Враховуючи, що інтеграли в лемі 2 рівномірно збіжні за t на довільному відрізку, що не містить нуля, маємо

$$\forall\, n\geqslant 0 \qquad \forall\, t_2>t_1>0:\quad \int\limits_{t_1}^{t_2} T^ne^{-Tt}dt = T^{n-1}(e^{-Tt_1}-e^{-Tt_2}),$$

$$\forall\, n\geqslant 0 \qquad \forall\, t_2>t_1>0:\quad \int\limits_{t_1}^{t_2} T^n(t_2-t)e^{-Tt}dt = T^{n-2}(e^{-Tt_2}-e^{-Tt_1}+T(t_2-t_1)e^{-Tt_1}).$$

Тоді з оцінок п. *1* випливають твердження п. *3* та п. *4*.

Наслідок. *За умов теореми 2*

$$\forall\, n\in\mathbb{N} \qquad \forall\, t>0:\quad (e^{-Tt})^{(n)} = (-T)^ne^{-Tt}.$$

Теорема 3. *Нехай $G\in\Psi_0$, T — узагальнений G-секторіальний оператор. Тоді:*

1) $\forall\, n\in\mathbb{N}$: $\|(e^{-Tt}-I)T^{-n}\| = O(t+t^nH(t)),\ t\to 0+$;

2) $\forall\, n\in\mathbb{N}$: $\|((e^{-Tt}-I)/t+T)T^{-n-1}\| = O(t+t^nH(t)),\ t\to 0+$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 5 в роботі [4].

Теорема 4. *Нехай $G \in \Psi_0$, T — узагальнений G-секторіальний оператор. Тоді:*
1) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists C_n > 0\ \forall t \in (0,1]\colon \|e^{-Tt}T^{-n}\| \leqslant C_n(1 + t^n H(t))$;
2) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t_1,\ t_2 \in (0,1]\colon \|(e^{-Tt_1} - e^{-Tt_2})T^{-n-1}\| \leqslant C_n \int\limits_{t_1}^{t_2} (1 + t^n H(t))\, dt$.

Доведення. *1.* Використовуючи зображення з леми 2 і лему 3 для $f(z) = t^{-n}z^{-n}$, $K(s) = 1$, отримуємо

$$\|e^{-Tt}T^{-n}\| = \left\| -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{0,\varphi,t^{-1}}} z^{-n}e^{-zt}R_z(T)dz \right\| + \sum_{k=0}^{n} \frac{\|T^{-k-1}\|}{k!} \leqslant C_n(1 + t^n H(t)), \quad t \in (0,1].$$

2. Внаслідок оцінки п. *1* маємо:

$$\|(e^{-Tt_1} - e^{-Tt_2})T^{-n-1}\| = \left\| \int\limits_{t_1}^{t_2} e^{-Tt}T^{-n}dt \right\| \leqslant C_n \int\limits_{t_1}^{t_2} (1 + t^n H(t))\, dt.$$

Наслідок. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ таке, що $\int\limits_0^1 t^n H(t)\, dt < +\infty$. Тоді:*
1) $e^{-Tt}T^{-n-1} \to T^{-n-1}$, $t \to 0+$;
2) $((e^{-Tt} - I)/t + T)T^{-n-2} \to O$, $t \to 0+$.

Доведення. *1.* З п. *2* теореми 4 випливає фундаментальність функції $e^{-Tt}T^{-n-1}$ при $t \to 0+$. Отже, існує границя $\lim\limits_{t\to 0+} e^{-Tt}T^{-n-1} = J$. Крім того, з оцінки (1) випливає, що при досить великих $m \in \mathbb{N}$: $H(t)t^m = G(t^{-1})t^{m-1} \to 0$, $t \to 0+$. Тому за п. *1* теореми 3 $e^{-Tt}T^{-m} \to T^{-m}$, $t \to 0+$. З іншого боку, при $m \geqslant n+1$: $e^{-Tt}T^{-m} \to T^{-m+n+1}J$, $t \to 0+$. Тому $J = T^{-n-1}$.

2. Випливає з п. *1* та рівності

$$t^{-1}\int\limits_0^t (I - e^{-Ts})T^{-n-1}ds = \lim_{\varepsilon\to 0+} t^{-1}\int\limits_\varepsilon^t (I - e^{-Ts})T^{-n-1}ds =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} t^{-1}(T^{-n-1}(t-\varepsilon) - e^{-T\varepsilon}T^{-n-2} + e^{-Tt}T^{-n-2}) = \left(\frac{e^{-Tt} - I}{t} + T\right)T^{-n-2}.$$

3. Дробові степені узагальнених G-секторіальних операторів.

Означення 6. Нехай $G \in \Psi$, T – G-секторіальний оператор. Позначимо

$$\Omega_0 := \left\{ \alpha > 0 \mid \int\limits_0^1 t^{\alpha-1}H(t)dt < +\infty \right\},$$

і для кожного $\alpha \in \Omega_0$ покладемо

$$T^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-Tt}dt,$$

де Γ — гамма-функція Ейлера.

Зауваження. З урахуванням оцінки (1) для кожного узагальненого G-секторіального оператора множина Ω_0 непорожня.

Теорема 5. *Нехай $G \in \Psi_0$, T — узагальнений G-секторіальний оператор. Тоді:*
1) $\forall\, \alpha \in \Omega_0\colon T^{-\alpha} \in \mathcal{L}(B)$;
2) $\forall\, \alpha,\ \beta \in \Omega_0\colon T^{-\alpha}T^{-\beta} = T^{-(\alpha+\beta)}$;
3) $\forall\, n \in \mathbb{N}\bigcap\Omega_0\colon T^{-n}$ збігається зі звичайним від'ємним степенем оператора;
4) $\forall\, \alpha \in \Omega_0\colon T^{-\alpha}$ — ін'єкція.

Доведення аналогічне доведенню теореми 6 в роботі [4].

Зауваження. Внаслідок твердження *4* теореми 5 існує лінійний оператор

$$T^{\alpha} := (T^{-\alpha})^{-1}, \qquad \alpha \in \Omega_0.$$

Теорема 6. *Нехай $G \in \Psi_0$, T — узагальнений G-секторіальний оператор, $\alpha \in \Omega_0$. Тоді:*
1) $\exists\, C_\alpha > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\},\ n \leqslant \alpha\ \forall\, t > 0\colon \|T^n e^{-Tt}T^{-\alpha}\| \leqslant C_\alpha t^{-n}$;
2) $(e^{-Tt} - I)T^{-\alpha} \to O,\ t \to 0+$;
3) $((Tt)^{-1}(I - e^{-Tt}) - I)T^{-\alpha} \to O,\ t \to 0+$.

Доведення. В п. *1* при $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\|T^n e^{-Tt}T^{-\alpha}\| \leqslant C \int\limits_0^{+\infty} (t+s)^{-n}H(t+s)s^{\alpha-1}ds \leqslant C \int\limits_0^{+\infty} t^{-n}(t+s)^{-\alpha+1}H(t+s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant Ct^{-n}\int\limits_0^{+\infty} H(s)s^{\alpha-1}ds.$$

Доведення інших тверджень аналогічне доведенню теореми 7 в роботі [4].

4. Задача Коші для лінійного рівняння.

Означення 7. Нехай $f\colon (0,R) \to B$, $x_0 \in B$. *Розв'язком задачі Коші*

$$x'(t) + Tx(t) = f(t), \qquad t \in (0,R); \qquad x(0) = x_0,$$

назвемо функцію $x \in C([0,R),B)$ таку, що $\forall\, t \in (0,R)\colon x(t) \in D(T)$, x диференційовна на $(0,R)$ і задовольняє рівняння та початкову умову.

Теорема 7. *Нехай $G \in \Psi_0$, T — узагальнений G-секторіальний оператор, $\alpha > 0$, $\alpha - 1 \in \Omega_0$, $f(t) = T^{-\alpha}f_1(t)$, $t \in (0,R)$, де функція $f_1\colon (0,R) \to B$ задовольняє такі умови:*
1) $\forall\, t \in (0,R)\ \exists\, \varepsilon_t > 0\ \exists\, L_t > 0\ \exists\, \beta_t \in (0,1]\ \forall\, s_1, s_2 \in (t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t)\bigcap(0,R)$:

$$\|f_1(s_1) - f_1(s_2)\| \leqslant L_t|s_1 - s_2|^{\beta_t};$$

2) $f_1 \in L_1([0,R/2],B)$.
Тоді функція

$$F(t) := \int\limits_0^t e^{-T(t-s)}f(s)\, ds, \qquad t \in (0,R), \qquad F(0) = \overline{0},$$

є розв'язком задачі Коші

$$F'(t) = -TF(t) + f(t), \qquad t \in (0,R); \qquad F(0) = \overline{0}.$$

Доведення. Оскільки

$$F(t) = T^{-1}\left(\int\limits_0^t Te^{-T(t-s)}T^{-\alpha}(f_1(s) - f_1(t))\,ds + (I - e^{-Tt})T^{-\alpha}f_1(t)\right) =$$

$$= T^{-1}\left(\int\limits_0^1 Te^{-T(t-ts)}T^{-\alpha}(f_1(ts) - f_1(t))tds + (I - e^{-Tt})T^{-\alpha}f_1(t)\right), \qquad t \in (0, R),$$

де, враховуючи п. *1* теореми 6, останній інтеграл збіжний абсолютно і рівномірно за t на будь-якому відрізку, що міститься всередині інтервалу $(0, R)$, то $TF \in C((0, R))$. Крім того,

$$\|F(t)\| \leqslant \int\limits_0^t \|T^{-\alpha}e^{-T(t-s)}\| \cdot \|f_1(s)\|\,ds \to 0, \qquad t \to 0+.$$

Нехай $t \in [t_1, t_2] \subset (0, R)$, n — досить велике натуральне число. Тоді

$$T^{-n-1}\int\limits_{t_1}^t TF(s)ds = \int\limits_{t_1}^t \left(\int\limits_0^s T^{-n}e^{-T(s-\tau)}f(\tau)\,d\tau\right)ds =$$

$$= \int\limits_0^{t_1}\left(\int\limits_{t_1}^t T^{-n}e^{-T(s-\tau)}f(\tau)\,ds\right)d\tau + \int\limits_{t_1}^t\left(\int\limits_\tau^t T^{-n}e^{-T(s-\tau)}f(\tau)\,ds\right)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{t_1}(T^{-n-1}(e^{-T(t_1-\tau)} - e^{-T(t-\tau)})f(\tau)\,d\tau + \int\limits_{t_1}^t(T^{-n-1}(I - e^{-T(t-\tau)})f(\tau)d\tau =$$

$$= T^{-n-1}F(t_1) - T^{-n-1}F(t) + T^{-n-1}\int\limits_{t_1}^t f(\tau)\,d\tau.$$

Діючи на обидві частини рівності оператором T^{n+1} та диференціюючи, отримуємо, що функція F задовольняє потрібне диференціальне рівняння.

Зауваження. 1. Наведена теорема узагальнює та доповнює теорему 8 з роботи [4]. Звернемо увагу на те, що безпосереднє перенесення цієї теореми на випадок узагальненого G-секторіального операторного коефіцієнта не є можливим, бо показник гельдеровості не може перевищувати одиниці.

2. Якщо функція f не допускає поточкової дії оператором T^α, проте є достатньо гладкою, то розв'язок задачі Коші можна отримати, формально проінтегрувавши частинами інтеграл в означенні функції F.

Теорема 8. *Нехай виконуються умови теореми 7. Тоді для кожного* $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha\in\Omega_0} D(T^\alpha)$ *існує єдиний розв'язок задачі Коші*

$$x'(t) + Tx(t) = f(t), \qquad t \in (0, R); \qquad x(0) = x_0,$$

причому

$$x(t) = e^{-Tt}x_0 + \int\limits_0^t e^{-T(t-s)}f(s)\,ds.$$

Доведення повністю аналогічне доведенню теореми 9 в роботі [4].

1. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – Москва: Мир, 1985. – 376 с.
2. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York: Springer, 1983. – 279 p.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – Москва: Мир, 1972. – 740 с.
4. *Городний М. Ф., Чайковский А. В.* Об одном обобщении понятия секториального оператора // Мат. сб. – 2006. – **197**, № 7. – С. 29–46.
5. *Чайковський А. В.* Зображення розв'язку абстрактної задачі Коші // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. математика і механіка. – 2010. – Вип. 23. – С. 28–32.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 02.03.2011

А. В. Чайковский

Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с обобщенным *G*-секториальным операторным коэффициентом

Введено обобщение класса G-секториальных операторов на случай, когда резольвента за пределами заданного сектора, в котором расположен спектр, не является ограниченной. Приведены достаточные условия разрешимости задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с обобщенным G-секториальным операторным коэффициентом.

A. V. Chaikovskiy

Cauchy problem for a linear differential equation with generalized *G*-sectorial operator coefficient

A generalization of the class of G-sectorial operators is introduced in the case of a resolvent, which is unbounded outside the sector, in which the spectrum of an operator is located. Sufficient conditions for the solvability of the Cauchy problem for linear differential equations in a Banach space with generalized G-sectorial operator coefficient in the linear part are given.