ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

1 • 2012

ІНФОРМАТИКА ТА КІБЕРНЕТИКА

УДК 519.6

О. М. Литвин, Ю. І. Першина

Наближення розривних функцій кусково-лінійними інтерполяційними розривними сплайнами на трикутній сітці вузлів

(Представлено академіком НАН України І. В. Сергієнком)

Пропонується метод побудови розривного інтерполяційного лінійного сплайну для наближення функції з можливими розривами першого роду та область визначення яких розбита на прямокутні трикутники. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе як частинний випадок класичні неперервні сплайни першого степеня на трикутній сітці вузлів.

Результати теорії наближення функцій поліномами або сплайнами, неперервними або диференційовними до деякого порядку включно [1, 2], загальновідомі. В той же час практика вимагає уміння створювати математичні моделі внутрішньої структури 3D тіл в заданих площинах при умові, що функція $f(x, y)$, яка описує цю внутрішню структуру у точках площин, має розриви першого роду на деякій системі ліній.

Весь розвиток обчислювальної та прикладної математики говорить про те, що використання кожної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт може привести до більш точного і якісного відновлення цього об'єкта. Тобто актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

У роботі [3] авторами розроблений метод наближення розривних функцій однієї змінної розривними сплайнами, що використовує метод мінімакса. Робота [4] присвячена узагальненню результатів попередніх робіт на випадок наближення розривної функції двох змінних за допомогою розривних інтерлінаційних сплайнів двох змінних, коли розриви першого роду наближуваної функції та розриви першого роду наближуючих сплайнів розміщені в точках прямих, паралельних осям координат.

У даній роботі вперше пропонується загальний підхід до побудови кусково-лінійних сплайнів, які можуть мати розриви першого роду на границях між трикутними елементами (прямокутні трикутники) Ці результати пропонується використовувати для наближення

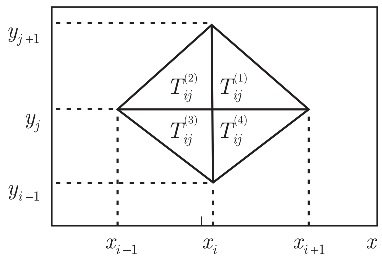

Рис. 1. Зображення можливих трикутних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j)

розривних функцій від двох змінних, які теж можуть мати (а можуть і не мати) розриви першого роду на вказаних лініях.

Постановка задачі. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x, y)$ в області D. Будемо вважати, що область D розбивається прямими $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_m = 1$, $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = 1$ на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається діагоналлю на два прямокутні трикутники. Трикутники не вкладаються один в одний, а сторони трикутників не перетинаються. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на границях між цими прямокутними трикутниками (не обов'язково між всіма). Метою роботи є побудува та дослідження операторів розривної кусково-поліноміальної інтерполяції таких, які в кожному трикутнику є операторами поліноміальної інтерполяції функції $f(x, y)$.

Метод побудови наближуючого розривного сплайн-інтерполянта. Якщо (x_i, y_j) — вузол, в якому знаходиться прямий кут прямокутного трикутника, то може зустрітися чотири типи трикутників (рис. 1)

$$\mathrm{T}_{ij}^{(1)} = \left\{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}\right\};$$

$$\mathrm{T}_{ij}^{(2)} = \left\{x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < y_j + \frac{(x - x_{i-1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i-1}}\right\};$$

$$\mathrm{T}_{ij}^{(3)} = \left\{x_{i-1} < x < x_i, y_{j-1} + \frac{(x - x_i)(y_j - y_{j-1})}{x_i - x_{i-1}} < y < y_j\right\};$$

$$\mathrm{T}_{ij}^{(4)} = \left\{x_i < x < x_{i+1}, y_j + \frac{(x - x_{i+1})(y_j - y_{j-1})}{x_{i+1} - x_i} < y < y_j\right\}.$$

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трикутників функція $f(x, y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому у вершинах трикутника функція набуває значень

$$\begin{aligned}
C_1^{(1)} &= C_{i,j}^{(1)++} = f(x_i + 0, y_j + 0), & C_1^{(2)} &= C_{i,j}^{(2)-+} = f(x_i - 0, y_j + 0),\\
C_2^{(1)} &= C_{i,j+1}^{(1)+-} = f(x_i + 0, y_{j+1} - 0), & C_2^{(2)} &= C_{i,j+1}^{(2)--} = f(x_i - 0, y_{j+1} - 0),\\
C_3^{(1)} &= C_{i+1,j}^{(1)-+} = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0), & C_3^{(2)} &= C_{i-1,j}^{(2)-+} = f(x_{i-1} - 0, y_j + 0),\\
C_1^{(3)} &= C_{i,j}^{(3)--} = f(x_i - 0, y_j - 0), & C_1^{(4)} &= C_{i,j}^{(4)+-} = f(x_i + 0, y_j - 0),\\
C_2^{(3)} &= C_{i-1,j}^{(3)--} = f(x_{i-1} - 0, y_j - 0), & C_2^{(4)} &= C_{i+1,j}^{(4)--} = f(x_{i+1} - 0, y_j - 0),\\
C_3^{(3)} &= C_{i,j-1}^{(3)--} = f(x_i - 0, y_{j-1} - 0), & C_3^{(4)} &= C_{i,j-1}^{(4)+-} = f(x_i + 0, y_{j-1} - 0).
\end{aligned}$$

Означення. Називатимемо розривним інтерполяційним лінійним поліноміальним сплайном в області $\mathrm{T}_{ij}^{(k)} \subset D$ $(k = \{1, 2, 3, 4\})$ таку функцію:

$$S(x,y) = s_{ij}^{(k)}(x,y) = C_1^{(k)} \frac{\omega 3_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 3_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} + C_2^{(k)} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} + C_3^{(k)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x,y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})}, \tag{1}$$

$$(x,y) \in \mathrm{T}_{ij}^{(k)}, \qquad \omega 1_{ij}^{(k)}(x,y) = x - x_i, \qquad \omega 2_{ij}^{(k)}(x,y) = y - y_j,$$

$$\omega 3_{ij}^{(k)} x, y) = \begin{cases} -y + y_j + \dfrac{(x - x_{i+1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i+1}}, & k = 1, \\ -y + y_j + \dfrac{(x - x_{i-1})(y_{j+1} - y_j)}{x_i - x_{i-1}}, & k = 2, \\ -y + y_{j-1} + \dfrac{(x - x_i)(y_j - y_{j-1})}{x_i - x_{i-1}}, & k = 3, \\ -y + y_j + \dfrac{(x - x_{i+1})(y_j - y_{j-1})}{x_{i+1} - x_i}, & k = 4, \end{cases}$$

$$A_1^{(k)} = (x_i, y_j),$$

$$A_2^{(k)} = \begin{cases} (x_i + 0, y_{j+1} - 0), & k = 1, \\ (x_i - 0, y_{j+1} - 0), & k = 2, \\ (x_i - 0, y_{j-1} - 0), & k = 3, \\ (x_i + 0, y_{j-1} - 0), & k = 4, \end{cases} \qquad A_3^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, y_j + 0), & k = 1, \\ (x_{i-1} + 0, y_j + 0), & k = 2, \\ (x_{i-1} + 0, y_j - 0), & k = 3, \\ (x_{i+1} - 0, y_j - 0), & k = 4. \end{cases}$$

Теорема 1. *Функція* $S(x,y) = s_{ij}^{(k)}(x,y)$, $(x,y) \in \mathrm{T}_{ij}^{(k)} \subset D(k = 1, 2, 3, 4)$ *задовольняє такі властивості:*

$$\begin{aligned} &s_{ij}^{(1)}(x_i + 0, y_j + 0) = C_1^{(1)}, && s_{ij}^{(2)}(x_i - 0, y_j + 0) = C_1^{(2)}, \\ &s_{ij}^{(1)}(x_i + 0, y_{j+1} - 0) = C_2^{(1)}, && s_{ij}^{(2)}(x_i - 0, y_{j+1} - 0) = C_2^{(2)}, \\ &s_{ij}^{(1)}(x_{i+1} - 0, y_j + 0) = C_3^{(1)}, && s_{ij}^{(2)}(x_{i-1} - 0, y_j + 0) = C_3^{(2)}, \\ &s_{ij}^{(3)}(x_i - 0, y_j - 0) = C_1^{(3)}, && s_{ij}^{(4)}(x_i + 0, y_j - 0) = C_1^{(4)}, \\ &s_{ij}^{(3)}(x_i - 0, y_{j-1} - 0) = C_2^{(3)}, && s_{ij}^{(4)}(x_i + 0, y_{j-1} - 0) = C_2^{(4)}, \\ &s_{ij}^{(3)}(x_{i-1} - 0, y_j - 0) = C_3^{(3)}, && s_{ij}^{(4)}(x_{i+1} - 0, y_j - 0) = C_3^{(4)}. \end{aligned}$$

Наведемо оцінку похибки наближення функції лінійним інтерполяційним сплайном, згідно з роботою [5].

Нехай $\xi = \{\xi_1, \xi_2\} \in R^2$, $\|\xi\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} = 1$, $D_\xi f(x,y) = \xi_1 \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \xi_2 \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ — похідна за напрямком ξ.

Теорема 2. *Нехай функція* $f(x,y) \in M_2$, $M_2 = \{f(x,y)\colon D_\xi f(x,y)$ *— неперервні в* D *та* $|D_\xi f(u) - D_\xi f(v)| \leqslant M\|u - v\|$, $\forall\, u = \{u_1, u_2\} \in D$, $\forall\, v = \{v_1, v_2\} \in D$, $\forall\, \xi\}$ *наближується* *оператором* $S(x,y) = s_{ij}^{(k)}(x,y)$, $(x,y) \in \mathrm{T}_{ij}^{(k)} \subset D(k = 1,2,3,4)$, *тоді для оцінки похибки наближення в кожному трикутному елементі розбиття справедлива нерівність*

$$|f(x,y) - S(x,y)| \leqslant \frac{1}{6}Mh^2,$$

де h *— довжина гіпотенузи.*

Теорема 3. *Якщо* $C_\mu^{(k)} = f(A_\mu^{(k)})$, $k = \overline{1,4}$, $\mu = \overline{1,3}$, *то в кожному трикутнику* $\mathrm{T}_{ij}^{(k)}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, *оператор* (1) *точно відновлює всі лінійні функції.*

З а у в а ж е н н я. Якщо значення функції у вузлах трикутної сітки невідомі, то для знаходження невідомих коефіцієнтів $C_p^{(k)}$, $p = 1,2,3$, $k = 1,2,3,4$, в даній роботі пропонується використовувати метод найменших квадратів, згідно з яким всі невідомі знаходяться з умови

$$J^{(k)} = \sum_{\mathrm{T}_{ij}^{(k)} \subset D} \iint_{\mathrm{T}_{ij}^{(k)}} [f(x,y) - s_{ij}^{(k)}(x,y)]^2 dxdy \longrightarrow \min_C.$$

П р и к л а д. Нехай задані вузли трикутної сітки: $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}5$, $x_3 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0{,}5$, $y_3 = 1$ та функція $f(x,y)$ визначена в області $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \bigcup \mathrm{T}_2 \bigcup \mathrm{T}_3 \bigcup \mathrm{T}_4$, де

$$\mathrm{T}_1 = \{x - 0{,}5 > 0,\ y - 0{,}5 > 0,\ 1{,}5 - x - y > 0\},$$
$$\mathrm{T}_2 = \{-x + 0{,}5 > 0,\ y - 0{,}5 > 0,\ 0{,}5 + x - y > 0\},$$
$$\mathrm{T}_3 = \{-x + 0{,}5 > 0,\ -y + 0{,}5 > 0,\ -0{,}5 + x + y > 0\},$$
$$\mathrm{T}_4 = \{x - 0{,}5 > 0,\ -y + 0{,}5 > 0,\ 0{,}5 - x + y > 0\}.$$

Задамо функцію $f(x,y)$ з розривами першого роду у вузлах заданої трикутної сітки

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x,y) \in \mathrm{T}_1, \\ x^2 - y^2, & (x,y) \in \mathrm{T}_2, \\ -x^2 + y^2, & (x,y) \in \mathrm{T}_3, \\ -x^2 - y^2, & (x,y) \in \mathrm{T}_4. \end{cases}$$

В кожному розглянутому трикутному елементі побудуємо інтерполяційний сплайн $S(x,y,C)$ у вигляді формули (1), де матриця коефіцієнтів C в нашому прикладі має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} C_1^{(1)} & C_2^{(1)} & C_3^{(1)} \\ C_1^{(2)} & C_2^{(2)} & C_3^{(2)} \\ C_1^{(3)} & C_2^{(3)} & C_3^{(3)} \\ C_1^{(4)} & C_2^{(4)} & C_3^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1{,}25 & 1{,}25 \\ 0 & -0{,}5 & -0{,}25 \\ 0 & -0{,}25 & 0{,}25 \\ -0{,}5 & -0{,}25 & -1{,}25 \end{pmatrix}.$$

Після підстановки отримаємо такий інтерполяційний сплайн:

$$S(x,y) = \begin{cases} 1{,}5x + 1{,}5y - 1{,}0, & (x,y) \in \mathrm{T}_1; \\ 0{,}5x - 1{,}5y + 0{,}5, & (x,y) \in \mathrm{T}_2; \\ 0{,}5x - 0{,}5y, & (x,y) \in \mathrm{T}_3; \\ -1{,}5x - 0{,}5y + 0{,}5, & (x,y) \in \mathrm{T}_4. \end{cases}$$

Максимальне відхилення наближуваної функції $f(x,y)$ від побудованого інтерполяційного сплайну $S(x,y)$ таке:

$$\max|f(x,y) - S(x,y)| \approx 0{,}12.$$

Тепер побудуємо апроксимаційний сплайн у вигляді формули (1). Коефіцієнти матриці C знаходимо, застосовуючи метод найменших квадратів, тобто розв'язуємо мінімізаційну задачу

$$F(C) = \iint\limits_D (f(x,y) - S(x,y))^2 dxdy \to \min.$$

Одержуємо апроксимаційний сплайн:

$$S(x,y) = \begin{cases} 1{,}4x + 1{,}4y - 0{,}95, & (x,y) \in \mathrm{T}_1, \\ 0{,}6x - 1{,}4y + 0{,}4, & (x,y) \in \mathrm{T}_2, \\ 0{,}6x - 0{,}6y, & (x,y) \in \mathrm{T}_3, \\ -2{,}8x - 1{,}2y + 2{,}55, & (x,y) \in \mathrm{T}_4. \end{cases}$$

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x,y)$ від побудованого апроксимаційного сплайну

$$\max|f(x,y) - S(x,y)| \approx 0{,}088.$$

Таким чином, у роботі пропонується метод побудови розривного інтерполяційного лінійного сплайну для наближення функції з можливими розривами першого роду та область визначення яких розбита на прямокутні трикутники. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе як частинний випадок класичні неперервні сплайни першого степеня на триангульованій сітці вузлів.

1. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – Москва: Наука, 1984. – 352 с.
2. *De Vore R. A.* A method of grid optimization for finite element methods // Computer Meth. Appl. Mech. Engineering. – 1983. – **41**. – P. 29–45.
3. *Литвин О. М., Першина Ю. І.* Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів // Математ. та комп'ют. моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки: Зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Поділ. нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2010. – Вип. 3. – С. 122–131.
4. *Литвин О. М., Першина Ю. І.* Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайнами (прямокутні елементи). Теорія прийняття рішень. – Праці V міжнар. школи-семінару, 27 вересня – 1 жовтня 2010 р. – Ужгород, 2010. – С. 141–142.
5. *Субботин Ю. Н.* Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. Математ. ин-та АН СССР, 1989. – **189**. – С. 117–137.

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків

Надійшло до редакції 11.05.2011

О. Н. Литвин, Ю. И. Першина

Приближение разрывных функций кусочно-линейными интерполяционными разрывными сплайнами на треугольной сетке узлов

Предлагается метод построения разрывного интерполяционного линейного сплайна для приближения функции с возможными разрывами первого рода и область определения которых разбита на прямоугольные треугольники. Причем построенные разрывные сплайны включают в себя как частный случай классические непрерывные сплайны первой степени на треугольной сетке узлов.

O. M. Lytvyn, Y. I. Pershina

The approximation of discontinuous functions by piecewise-linear interpolational discontinuous splines on a triangular grid of nodes

A method of construction of a discontinuous interpolational linear spline for the approximation of a function with possible breaks of the first kind, whose range of definition is broken into rectangular triangles, is offered. The constructed splines include, as a special case, classical continuous splines of the first degree on a triangular grid of nodes.