УДК 519.81

В. М. Михалевич

К проблеме неопределенности при многократном выборе решений

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины А. А. Чикрием)

Получено решение проблемы неопределенности в задаче многократного решения для достаточно широкого класса правил выбора предпочтений в системе принятия решений, основывающееся на принципе гарантированного результата, с критерием в виде предпочтений на решениях, определяемых заданной явно функцией полезности, которая параметрически зависит от выпуклой статистической закономерности на множестве состояний и функции полезности на последствиях, определенной с точностью до положительного линейного преобразования.

Рассмотрим многократный выбор решений для вводимой обобщенной необайесовской формы задачи решения (ЗР). Дадим необходимые определения, дополняющие определения при многократном выборе решения для необайесовской ЗР (см. [1]).

Для произвольного векторного пространства V введем отношение эквивалентности ($\overset{\mathrm{co}}{\approx}$) на 2^V следующим образом. Для любых X, $Y \subseteq V$

$$X \overset{\mathrm{co}}{\approx} Y \Leftrightarrow \operatorname{co} X = \operatorname{co} Y. \tag{1}$$

Далее для произвольного непустого множества A определим в функциональном пространстве $\mathbb{R}^A$ отношение эквивалентности ($\overset{\mathrm{m}}{\approx}$) следующим образом. Для любых f, $g \in \mathbb{R}^A$

$$f \overset{\mathrm{m}}{\approx} g \Leftrightarrow f = mg, \qquad m \in \mathbb{R}, \qquad m > 0. \tag{2}$$

Расширим необайесовскую форму параметрических задач принятия решений, дополнив множество случайных последствий Y до множества случайных в широком смысле последствий $P_0(X)$, представляющих собой множество статистических закономерностей на множестве последствий X следующего вида:

$$P_0(X) := \{P \in P(X)\colon \operatorname{Card} P < \infty,\ P \subseteq Y\}, \tag{3}$$

где Y — множество случайных последствий, для множества последствий X, т. е. множество простых веротностных мер на X вида

$$Y = \left\{ (y\colon X \to [0,1])\colon \operatorname{Card} y(X) < \infty, \sum_{\{x:x\in X, y(x)\neq 0\}} y(x) = 1 \right\}. \tag{4}$$

Ясно, что $Y \subseteq P_0(X)$, а ССЗР для ЗР в такой форме принадлежат классу $\mathbb{Z}(P_0(X))(\mathbf{Z}(P_0(X)))$.

Рассмотрим ЗМР в классе ССЗР $\mathbb{Z}(P_0(X), \Theta)$. При этом введем некоторые понятия и обозначения по аналогии с соответствующими им понятиями и обозначениями, используемыми в необайесовской форме ЗР.

Определение 1. ССЗР $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}(P_0(X), \Theta)$, где $P_0(X)$ — семейство всех простых статистических закономерностей на множестве X, будем называть определяющей, если

$$L_0(P_0(X), \Theta) \subseteq g(\cdot, U) = \mathrm{co}[g(\cdot, U)] \subseteq [P_0(X)]^{\Theta}. \tag{5}$$

Определение 2. Для произвольных непустых множеств X, Θ и нестрогого порядка $(X, \succcurlyeq)$, отображение $f \in [P_0(X)]^{\Theta}$, где $P_0(X)$ определяется согласно (3), будем называть ограниченным относительно $(X, \succcurlyeq)$, если отображения $\underline{f}$, $\overline{f} \in X^{\Theta}$, заданные на Θ так:

$$\underline{f}(\theta) := \min\Big\{x \in X \colon \min_{p \in f(\theta)} p(x) \neq 0\Big\} \qquad \forall\, \theta \in \Theta,$$
$$\overline{f}(\theta) := \max\Big\{x \in X \colon \max_{p \in f(\theta)} p(x) \neq 0\Big\} \qquad \forall\, \theta \in \Theta,$$

являются ограниченными относительно $(X, \succcurlyeq)$.

Через $L_{\succcurlyeq}(P_0(X), \Theta)$ будем обозначать множество всех ограниченных и Σ-измеримых относительно нестрогого порядка $(X, \succcurlyeq)$ отображений на множестве Θ со значениями в множестве $P_0(X)$.

Определим класс ПВП в ЗМР для $\mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta) \subseteq \mathbb{Z}(P_0(X), \Theta)$, который будем обозначать $\Pi_0^{\infty}(\mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta)$, как подклассе всех таких ПВП $\pi \in \Pi^{\infty}(\mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta)$, что для любой определяющей ССЗР $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'(P_0(X), \Theta)$ выполняются условия **Y1**–**Y5** (см. [1]), а также условия **P6**–**P9**, где каждое из перечисленных условий последней группы получается заменой множества Y на множество $P_0(X)$ в соответствующих им условиях **Y6**–**Y9** (см. [1]).

Через $\mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ будем обозначать любой подкласс ССЗР класса $\mathbb{Z}(P_0(X), \Theta)$, в котором для любой ССЗР $Z' = (P_0(X), \Theta, U', g') \in \mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ и любых $u_i' \in U'$, $i = \overline{1,2}$ найдется такая определяющая ССЗР $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ и $u_i \in U$, $i = \overline{1,2}$, что

$$g'(\theta, u_i') = g(\theta, u_i) \qquad \forall\, \theta \in \Theta, \qquad i = \overline{1,2}. \tag{6}$$

Через $\mathbb{Z}_0'(P_0(X), \Theta)$ будем обозначать любой такой класс $\mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$, что если $Z = (P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ — определяющая, фигурирующая в определении $\mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$, то для нее должно выполняться условие

$$g(\cdot, U) = L_0(P_0(X), \Theta).$$

А через $\mathbf{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ будем обозначать любой подкласс ССЗР класса $\mathbf{Z}(P_0(X), \Theta)$, элементы которого задают первую компоненту некоторого ПВП для $\mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$. При этом, если $((P_0(X), \succcurlyeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$, а $(P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ является определяющей, имеющим место в определении $\mathbb{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$, то для нее, наряду с условием, имеющим место в определении определяющей ССЗР (см. соотношение (2) в [1]), должно выполняться условие ограниченности и Σ-измеримости относительно сужения $(P_0(X), \succcurlyeq)$ на X для отображения $g(\cdot, u)$ при всех $u \in U$, т. е.

$$g(\cdot, U) \subseteq L_{\succcurlyeq}(P_0(X), \Theta).$$

Далее, для любого класса $\mathbf{Z}_1'(P_0(X), \Theta)$ определим класс $\mathbb{Z}_0'(P_0(X), \Theta)$, обозначая его при этом $\mathbb{Z}_{01}'(P_0(X), \Theta)$, следующим образом:

$$\mathbb{Z}_{01}'(P_0(X), \Theta) := \{(P_0(X), \Theta, U', g') \colon (P_0(X), \Theta, U, g) \in \mathrm{Пр}\, \mathbf{Z}_1'(P_0(X), \Theta),$$
$$U' = \{u \colon u \in U, g(\cdot, u) \in L_0(P_0(X), \Theta)\},\ g'(\theta, u) = g(\theta, u)\ \forall\, \theta \in \Theta\ \forall\, u \in U'\},$$

где отображение Пр вводится в определение 2 из [1].

Теперь введем в рассмотрение соответствие $\chi^{\infty}_{\mathbb{Z}'_0(P_0(X),\Theta)}$ из $\mathbb{R}^X/\overset{m}{\approx}\times P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}$ в $\Pi^{\infty}(\mathbb{Z}'(P_0(X),\Theta))$, где $P(\Theta)$ — семейство всех статистических закономерностей на Θ, а $(\overset{m}{\approx})$, $(\overset{\text{co}}{\approx})$ — эквивалентности, введенные согласно соотношениям (2) и (1) соответственно. Это соответствие определяется следующим образом. Если $\omega\in\widetilde{\omega}\in\mathbb{R}^X/\overset{m}{\approx}$, $P\in\in\widetilde{P}\in P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}$, $Z=(Y,\Theta,U,g)\in\mathbb{Z}'(P_0(X),\Theta)\subseteq\mathbb{Z}(P_0(X),\Theta)$, то $\chi^{\infty}_{\mathbb{Z}'(P_0(X),\Theta)}(\omega,P)==(\chi^{\infty}_{1\mathbb{Z}'(P_0(X),\Theta)}(\omega,P),\chi^{\infty}_{2\mathbb{Z}'(P_0(X),\Theta)}(\omega,P))$, а $[\chi^{\infty}_{1\mathbb{Z}'(P_0(X),\Theta)}(\omega,P)](Z):=(P_0(X)^{\infty},\succcurlyeq_Z)$, $[\chi^{\infty}_{2\mathbb{Z}'(P_0(X),\Theta)}(\omega,P)](Z):=(U^{\infty},\succcurlyeq^*_Z)$. При этом для любых $\theta\in\Theta$ и для любых m', n'_{ir}, $s'_i\in N$, $x'_{irj}\in X$, $\alpha'_{irj}\in[0,1]$, $u'_i\in U$, если $j=\overline{1,n'_{ir}}$, $\sum\limits_{j=1}^{n'_{ir}}\alpha'_{irj}=1$, $r=\overline{1,s'_i}$, $g(\theta,u'_i)==\Big\{g_t(\theta,u'_i)\colon g_t(\theta,u'_i)=\sum\limits_{k=1}^{l_t(\theta,u'_i)}\beta_{tk}(\theta,u'_i)g_{tk}(\theta,u'_i),\ \sum\limits_{k=1}^{l_t(\theta,u'_i)}\beta_{tk}(\theta,u'_i)=1$, где $\beta_{tk}(\theta,u'_i)\in[0,1]$, $g_{tk}(\theta,u'_i)\in X$, $k=\overline{1,l_t(\theta,u'_i)}$, $l_t(\theta,u'_i)\in N$, $t=\overline{1,h(\theta,u'_i)}$, $h(\theta,u'_i)\in N\Big\}$, $i=\overline{1,m'}$, а также для любых m'', n''_{ir}, $s''_i\in N$, $x''_{irj}\in X$, $\alpha''_{irj}\in[0,1]$, $u''_i\in U$, если $j=\overline{1,n''_{ir}}$, $\sum\limits_{j=1}^{n''_{ir}}\alpha''_{irj}=1$, $r=\overline{1,s''_i}$, $g(\theta,u''_i)=\Big\{g_t(\theta,u''_i)\colon g_t(\theta,u''_i)=\sum\limits_{k=1}^{l_t(\theta,u''_i)}\beta_{tk}(\theta,u''_i)g_{tk}(\theta,u''_i),\ \sum\limits_{k=1}^{l_t(\theta,u''_i)}\beta_{tk}(\theta,u''_i)=1$, где $\beta_{tk}(\theta,u''_i)\in[0,1]$, $g_{tk}(\theta,u''_i)\in X$, $k=\overline{1,l_t(\theta,u''_i)}$, $l_t(\theta,u''_i)\in N$, $t=\overline{1,h(\theta,u''_i)}$, $h(\theta,u''_i)\in N\Big\}$, $i=\overline{1,m''}$, имеют место соотношения:

$$\bigoplus_{i=1}^{m'}\min_{r=\overline{1,s'_i}}\left\{\sum_{j=1}^{n'_{ir}}\alpha'_{irj}x'_{irj}:r=\overline{1,s'_i}\right\}\succcurlyeq_Z\bigoplus_{i=1}^{m''}\min_{r=\overline{1,s''_i}}\left\{\sum_{j=1}^{n''_{ir}}\alpha''_{irj}x''_{irj}:r=\overline{1,s''_i}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{m'}\min_{r=\overline{1,s'_i}}\sum_{j=1}^{n'_{ir}}\alpha'_{irj}\omega(x'_{irj})\geqslant\sum_{i=1}^{m''}\min_{r=\overline{1,s''_i}}\sum_{j=1}^{n''_{ir}}\alpha''_{irj}\omega(x''_{irj}),\tag{7}$$

$$\bigoplus_{i=1}^{m'}u'_i\succcurlyeq^*_Z\bigoplus_{i=1}^{m''}u''_i\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{m'}\min_{p\in P}\int\limits_{\Theta}\min_{t=\overline{1,h(\theta,u'_i)}}\sum_{k=1}^{l_t(\theta,u'_i)}\beta_{tk}(\theta,u'_i)\omega(g_{tk}(\theta,u'_i))p(d\theta)\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{m''}\min_{p\in P}\int\limits_{\Theta}\min_{t=\overline{1,h(\theta,u''_i)}}\sum_{k=1}^{l_t(\theta,u''_i)}\beta_{tk}(\theta,u''_i)\omega(g_{tk}(\theta,u''_i))p(d\theta).\tag{8}$$

Теорема 1. *Для любого класса ССЗР* $\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta)$

$$\Pi^{\infty}_0(\mathbb{Z}'_{01}(P_0(X),\Theta))=\chi^{\infty}_{\mathbb{Z}'_{01}(P_0(X),\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{m}{\approx},P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx})$$

и всякое ПВП $\pi\in\Pi^{\infty}_0(\mathbb{Z}'_{01}(P_0(X),\Theta))$ *можно, и притом единственным образом, продолжить до ПВП* $\overline{\pi}\in\Pi^{\infty}_0(\text{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta))$, *при этом* $\chi^{\infty}_{\text{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta)}$ *инъективно и*

$$\Pi^{\infty}_0(\text{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta))=\chi^{\infty}_{\text{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta)}(\mathbb{R}^X/\overset{m}{\approx},P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}).$$

Следствие 1. *Для любого класса* $\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta)$ *условия* **Y1–Y5, P6–P9** *на ПВП для ЗМР в классе* $\text{Пр}\,\mathbf{Z}'_1(P_0(X),\Theta)$ *представляют собой* $\mathbb{R}^X/\overset{m}{\approx}\times P(\Theta)/\overset{\text{co}}{\approx}$ *— МПВП для ЗМР* *в классе* $\Pr \mathbf{Z}_1'(P_0(X),\Theta)$, *т. е.* **[Y1–Y5, P6–P9]** *для ЗМР в* $\mathbb{Z}_{01}'(P_0(X),\Theta)$ *с параметрами* $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X / \overset{m}{\approx}$ *и* $P \in P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx}$, *при этом разным значениям параметров* $\widetilde{\omega}$ *и* P *соответствуют несовпадающие ПВП.*

Следствие 2. *МСЗР* $M = (P_0(X),\Theta,U,g,P)$, *где* $Z = (P_0(X),\Theta,U,g) \in \mathbf{Z}_1'(P_0(X),\Theta)$ *а закономерность* $P \in P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx}$, *является полным математическим описанием ситуации с* **[Y1–Y5, P6–P9]** *для ЗМР в* $\mathbf{Z}_{01}'(P_0(X),\Theta)$ *с параметрами* $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X / \overset{m}{\approx}$ *и* $P \in P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx}$.

Другими словами ТПР-ы с ПВП из класса $\Pi_0^\infty(\mathbb{Z}_{01}'(P_0(X),\Theta))$ в ситуации с совпадающими моделями имеют одинаковые отношения предпочтений на решениях, при условии совпадающих отношений их предпочтений на последствиях ЗМР.

В частности, при $\mathbf{Z}_1'(P_0(X),\Theta) \in \mathbf{Z}((P_0(X),\cdot),\Theta)$ имеем.

Следствие 3. *МСЗР* $M = (P_0(X),\Theta,U,g,P)$, *где* $Z = (P_0(X),\Theta,U,g) \in \Pr \mathbf{Z}((P_0(X),\cdot),\Theta)$ *а закономерность* $P \in P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx}$, *является полным математическим описанием ситуации для* **[Y1–Y5, P6–P9]** *для ЗМР в* $\mathbf{Z}_{01}'(P_0(X),\Theta)$ *с параметрами* $\widetilde{\omega} \in \mathbb{R}^X / \overset{m}{\approx}$ *и* $P \in P(\Theta) / \overset{\text{co}}{\approx}$.

Другими словами, ТПР с ПВП из класса $\Pi_0^\infty(\mathbb{Z}_{01}'(P_0(X),\Theta))$ в ситуации с совпадающими моделями имеют одинаковые отношения предпочтений на решениях.

1. *Михалевич В. М.* К критерию при многократном выборе решения // Доп. НАН України. – 2011. – № 11. – С. 44–48.
2. *Михалевич В. М.* Многократный выбор при наличии одной из форм прицпа гарантированного результата // Там само. – 2011. – № 8. – С. 43–47.

Национальный университет
"Киево-Могилянская академия", Киев

Поступило в редакцию 24.03.2011

В. М. Михалевич

До проблеми невизначеності при багатократному виборі рішень

Отримано рішення проблеми невизначеності в задачі багатократного розв'язання для досить широкого класу правил вибору переваг у системі прийняття рішень, яке грунтується на принципі гарантованого результату, з критерієм у вигляді переваг на рішеннях, що визначаються заданою явно функцією корисності, яка параметрично залежить від опуклої статистичної закономірності на множині станів і функції корисності на наслідках, що визначається з точністю до додатного лінійного перетворення.

V. M. Mykhalevich

The problem of uncertainty at a multiple choice of solutions

A solution of the uncertainty problem under multiple decision for a sufficiently broad class of selection rules preferences in a decision-making system which are based respectively on the basis of a guaranteed result which depends on the parametric convex statistical regularity on the set of states and the utility function on the consequences, which is determined to within a positive linear transformation, is obtained.