УДК 539.3

Л. В. Назаренко

Эффективные свойства трансверсально-изотропных композитных материалов при физической нелинейности компонентов

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л. П. Хорошуном)

Изложен метод и построен алгоритм определения эффективных деформативных свойств дискретно-волокнистого композитного материала на основе физически нелинейной изотропной матрицы и сфероидальных линейно-упругих трансверсально-изотропных включений. Исходными являются стохастические дифференциальные уравнения физически нелинейной теории упругости. Преобразование их к интегральным уравнениям и применение метода условных моментов приводит задачу к нелинейной системе алгебраических уравнений, решение которой строится методом итераций. Исследованы диаграммы деформирования в зависимости от объемного содержания включений.

Проблема исследования деформативных свойств композитных материалов с учетом их физической нелинейности является актуальной. Особый интерес представляют композитные материалы на основе металлической матрицы, а также на основе полимерных материалов при повышенных температурах. С применением моделей и методов механики стохастически неоднородных сред в работах [1–3] были изучены эффективные деформативные свойства слоистых, зернистых и дискретно-волокнистых композитов с изотропными компонентами, которые следуют нелинейному закону связи между напряжениями и деформациями. В настоящей работе модель, предложенная Л. П. Хорошуном [1] для определения эффективных деформативных свойств композитных материалов, компоненты которого являются физически нелинейными, обобщается на случай, когда компоненты композитного материала имеют трансверсально-изотропную симметрию физико-механических свойств. В качестве численного примера рассматривается композит на основе физически нелинейной изотропной матрицы и трансверсально-изотропных сфероидальных линейно-упругих включений.

Исходными являются стохастические дифференциальные уравнения физически нелинейной теории упругости. Преобразование их к интегральным уравнениям и применение метода условных моментов [1] приводит задачу к системе нелинейных алгебраических уравнений, решение которой строится методом итераций. Построены алгоритмы вычисления эффективных деформативных свойств и исследованы диаграммы макродеформирования в зависимости от объемной концентрации компонентов и параметра, характеризующего форму включений.

1. Рассмотрим представительный объем композитного материала стохастической структуры, компоненты которого следуют физически нелинейному закону деформирования. Если макрообъем композита находится в условиях однородных макронапряжений $\langle\sigma_{ij}\rangle$ и макродеформаций $\langle\varepsilon_{kl}\rangle$, то напряжения $\sigma_{ij}(x)$ и деформации $\varepsilon_{ij}(x)$ будут статистически однородными случайными функциями, удовлетворяющими свойству эргодичности, т. е. осреднение случайных полей по объему совпадает со статистическим осреднением по ансамблю реализаций. В этом случае макронапряжения $\langle\sigma_{ij}\rangle$ и макродеформации $\langle\varepsilon_{kl}\rangle$ композита связаны соотношениями

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = \lambda^*_{ijkl}(\langle\varepsilon_{mn}\rangle)\langle\varepsilon_{kl}\rangle \qquad (i,j,k,l = 1,2). \tag{1}$$

Здесь $\lambda^*_{ijkl}(\langle\varepsilon_{mn}\rangle)$ — тензор эффективных упругих модулей, зависящий от макродеформаций. Для его определения необходимо решить задачу о напряженно-деформированном состоянии композитного материала в микроточке, которая сводится к уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j}(x) = 0, \tag{2}$$

зависимостям между напряжениями и деформациями

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl}(\varepsilon_{mn})\varepsilon_{kl} \tag{3}$$

и соотношениям Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{4}$$

где u_i — неизвестные перемещения, причем тензор модулей упругости $\lambda_{ijkl}(\varepsilon_{mn})$, детерминировано зависящий от деформаций ε_{mn}, является случайной статистически однородной функцией координат.

Подставляя зависимости между напряжениями и деформациями (3) в уравнение равновесия (2) и учитывая соотношение Коши (4), можно получить систему физически и статистически нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях [1]. Представив случайные поля напряжений, деформаций и перемещений в виде суммы математических ожиданий и флуктуаций, полученную систему можно преобразовать в систему дифференциальных уравнений относительно флуктуаций перемещений $u_i^0 = u_i - \langle u_i\rangle$ с нулевыми граничными условиями на бесконечно удаленной границе области

$$\lambda^c_{ijkl}u^0_{k,lj} + [(\lambda_{ijkl}(\varepsilon_{mn}) - \lambda^c_{ijkl})\varepsilon_{kl}]_{,j} = 0, \tag{5}$$

$$u^0_i|_s = 0, \tag{6}$$

где тензор λ^c_{ijmn} — некоторый тензор модулей упругости с независимыми от координат компонентами.

С помощью тензорной функции Грина, удовлетворяющей уравнению

$$\lambda^c_{ijmn}G_{mk,jn}(x-y) + \delta(x-y)\delta_{ik} = 0, \qquad G_{mk}(x-y)|_\infty = 0, \tag{7}$$

краевую задачу (5), (6) можно привести к интегральному уравнению относительно деформаций

$$\varepsilon_{ij}(x) = \langle\varepsilon_{ij}\rangle + K_{ijkl}(x-y) * [(\lambda_{klmn}(\varepsilon_{pq}(y)) - \lambda^c_{klmn}(y))\varepsilon_{mn}(y)]. \tag{8}$$

В этом уравнении интегральный оператор $K_{ijkl}(x-y)$ действует в соответствии с правилом

$$K_{ijkl}(x-y)*\psi(y)=\int\limits_V G_{(ik,j)l}(x-y)(\psi(y)-\langle\psi\rangle)\,d^3y. \tag{9}$$

Нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями (3) относится к произвольной точке тела, которая может находиться в одном из компонентов. Если точка находится в k-компоненте, то

$$\sigma_{ij}^k=\lambda_{ijmn}^{[k]}(\varepsilon_{pq}^k)\varepsilon_{mn}^k \qquad (k=1,2). \tag{10}$$

Пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонента, нелинейный закон (10) можем записать в виде

$$\langle\sigma_{ij}^k\rangle=\lambda_{ijmn}^{[k]}(\langle\varepsilon_{pq}^k\rangle)\langle\varepsilon_{mn}^k\rangle. \tag{11}$$

Усредняя (11) по макрообъему, получим соотношение для макронапряжений

$$\langle\sigma_{ij}\rangle=\sum_{k=1}^{2}c_k\lambda_{ijmn}^{[k]}(\langle\varepsilon_{pq}^k\rangle)\langle\varepsilon_{mn}^k\rangle. \tag{12}$$

Применяя к уравнению (8), (9) аппарат условного усреднения и пренебрегая флуктуациями деформаций в пределах компонентов, получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно средних по компонентам деформаций

$$\langle\varepsilon_{ij}^\nu\rangle=\langle\varepsilon_{ij}\rangle+\sum_{k=1}^{N}K_{ijpq}^{\nu k}[\lambda_{pqmn}^{[k]}(\langle\varepsilon_{\alpha\beta}^k\rangle)-\lambda_{pqmn}^c]\langle\varepsilon_{mn}^k\rangle \qquad (k,\nu=1,2), \tag{13}$$

где матричный оператор $K_{ijpq}^{\nu k}$ определяется формулой

$$K_{ijpq}^{\nu k}=K_{ijpq}(x-y)p_{\nu k}(x-y), \tag{14}$$

причем $\lambda_{pqmn}^{[k]}(\langle\varepsilon_{\alpha\beta}^k\rangle)$ — значение тензора модулей упругости в k-компоненте; $p_{\nu k}(x-y)$ — вероятность перехода из ν-компонента в точке x в k-компонент в точке y.

Таким образом, для определения тензора эффективных упругих модулей $\lambda_{ijkl}^*(\langle\varepsilon_{mn}\rangle)$ необходимо решить систему нелинейных алгебраических уравнений (13) относительно средних деформаций в компонентах и, подставив их в (12), найти нелинейную связь между макронапряжениями и макродеформациями (1).

Рассмотрим композитный материал, представляющий собой матрицу, армированную случайно расположенными однонаправленными сфероидальными включениями. Условная плотность распределения $p_{\nu k}(x)$ рассматриваемого композитного материала имеет вид [5]

$$\begin{gathered}p_{\nu\kappa}(x)=c_\kappa+(\delta_{\nu\kappa}-c_\kappa)\varphi(x), \qquad \varphi(x)=\exp\left(-\sqrt{n_1^2(x_1^2+x_2^2)+n_3^2x_3^2}\right),\\ n_1=\frac{\beta}{t_1}, \qquad n_3=\frac{\beta}{t_3}, \qquad \beta=\frac{8}{\pi^2c_2},\end{gathered} \tag{15}$$

где t_1, t_3 — размеры полуосей сфероидальных включений в поперечном и продольном направлениях соответственно.

Предполагается, что включения имеют трансверсально-изотропную симметрию физико-механических свойств (пять независимых постоянных тензора модулей упругости — $\lambda_{11}^{[1]}$, $\lambda_{12}^{[1]}$, $\lambda_{13}^{[1]}$, $\lambda_{33}^{[1]}$, $\lambda_{44}^{[1]}$), а матрица является изотропной (два независимых постоянных тензора модулей упругости — λ_2 и μ_2). Также предполагается, что включения являются линейно-упругими (не зависят от деформаций), а матрица следует закону нелинейной связи между напряжениями и деформациями. Для матрицы принимаем, что объемные деформации и напряжения связаны линейно, т. е. модуль объемного сжатия $K_2 = \lambda_2(\langle\varepsilon_{ij}^2\rangle) + 2/3\mu_2(\langle\varepsilon_{ij}^2\rangle)$ не зависит от деформаций, а девиаторы напряжений $\langle\sigma_{ij}^2\rangle'$ и деформаций $\langle\varepsilon_{ij}^2\rangle'$ связаны нелинейным законом:

$$\langle\sigma_{ij}^2\rangle' = 2\mu_2(J_2)\langle\varepsilon_{ij}^2\rangle', \qquad J_2 = (\langle\varepsilon_{ij}^2\rangle', \langle\varepsilon_{ij}^2\rangle')^{1/2}. \tag{16}$$

Диаграмму деформирования матрицы будем описывать законом с линейным упрочнением, т. е.

$$\mu_2(J_2) = \begin{cases} \mu_2^0, & J_2 < \dfrac{k_2}{2\mu_2^0}, \\ \mu_2' + \left(1 - \dfrac{\mu_2'}{\mu_2^0}\right)\dfrac{k_2}{2J_2}, & J_2 \geqslant \dfrac{k_2}{2\mu_2^0}, \end{cases} \tag{17}$$

где μ_2^0, μ_2', $k_2 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\sigma_{2T}$ — постоянные материала (σ_{2T} — предел текучести материала матрицы).

В этом случае систему нелинейных алгебраических уравнений (13) можно представить в виде

$$\langle\varepsilon_{ij}^{\nu}\rangle = \langle\varepsilon_{ij}\rangle + (-1)^{\nu+1}c_{3-\nu}(I_{ijmn} - M_{ijpq}\lambda'_{pqmn}(J_2))^{-1}M_{mn\alpha\beta}\lambda_{\alpha\beta kl}^{[3]}(J_2)\langle\varepsilon_{kl}\rangle. \tag{18}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &M_{ijpq} = K_{ijpq}(x)\varphi(x), \\ &\lambda'_{pqmn}(J_2) = c_1\lambda_{ijmn}^{[2]}(J_2) + c_2\lambda_{ijmn}^{[1]} - \lambda_{ijmn}^{c}, \qquad \lambda_{pqmn}^{[3]}(J_2) = \lambda_{ijmn}^{[1]} - \lambda_{ijmn}^{[2]}(J_2). \end{aligned} \tag{19}$$

Решение нелинейной системы алгебраических уравнений (18) строится методом простых итераций, где в качестве нулевого приближения берется решение линейной задачи: $\lambda_2^{(0)} = \lambda_2(0)$, $\mu_2^{(0)} = \mu_2(0)$.

Для композитного материала стохастической структуры с трансверсально-изотропными компонентами и сфероидальными включениями решение линейной задачи получено в работе [4]. Если задан тензор макродеформаций $\langle\varepsilon_{kl}\rangle$, то можно определить средние деформации в компонентах в нулевом приближении на основе соотношений (18)

$$\langle\varepsilon_{ij}^{\nu}\rangle^{(0)} = \langle\varepsilon_{ij}\rangle + (-1)^{\nu+1}c_{3-\nu}(I_{ijmn} - M_{ijpq}\lambda_{pqmn}^{\prime(0)})^{-1}M_{mn\alpha\beta}\lambda_{\alpha\beta kl}^{[3](0)}\langle\varepsilon_{kl}\rangle. \tag{20}$$

Здесь $\lambda_{ijkl}^{[2](0)} = \lambda_2(0)\delta_{ij}\delta_{mn} + 2\mu_2(0)I_{ijmn}$.

Алгоритм простых итераций для решения системы нелинейных алгебраических уравнений можно представить следующим образом:

средние деформации в компонентах в n-м приближении связаны с девиатором средних деформаций в компонентах в $(n-1)$-м приближении

$$\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle^{(n)} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle + (-1)^{\nu+1} c_{3-\nu} (I_{ijmn} - M_{ijpq} \lambda_{pqmn}^{\prime(n-1)})^{-1} M_{mn\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta kl}^{[3](n-1)} \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \tag{21}$$

где

$$\lambda_{ijkl}^{[2](n-1)} = \lambda_2^{(n-1)}(J_2) \delta_{ij} \delta_{mn} + 2\mu_2^{(n-1)}(J_2) I_{ijmn}.$$

Здесь

$$\mu_2^{(n-1)}(J_2) = \begin{cases} \mu_2^0, & J_2^{(n-1)} < \dfrac{k_2}{2\mu_2^0}, \\ \mu_2' + \left(1 - \dfrac{\mu_2'}{\mu_2^0}\right) \dfrac{k_2}{2J_2^{(n-1)}}, & J_2^{(n-1)} \geqslant \dfrac{k_2}{2\mu_2^0}, \end{cases} \tag{22}$$

$$\lambda_2^{(n-1)}(J_2) = K_2 - \frac{2}{3}\mu_2^{(n-1)}(J_2), \qquad J_2^{(n-1)} = (\langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'^{(n-1)}, \langle \varepsilon_{ij}^2 \rangle'^{(n-1)})^{1/2}.$$

Таким образом, уравнения (18)–(22) позволяют определить средние деформации в компонентах трансверсально-изотропного композитного материала с учетом физической нелинейности матрицы как функцию макродеформаций:

$$\langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \varepsilon_{ij}^{\nu} \rangle^{(n)} (\langle \varepsilon_{mn} \rangle). \tag{23}$$

Определив средние деформации в компонентах и подставив их в (12), найдем тензор λ_{ijkl}^{*} эффективных модулей упругости рассматриваемого композита как функцию модулей упругости компонентов $\lambda_{11}^{[1]}, \lambda_{12}^{[1]}, \lambda_{13}^{[1]}, \lambda_{33}^{[1]}, \lambda_{44}^{[1]}, \lambda_2(J_2), \mu_2(J_2)$, объемного содержания включений c_1 в матрице и параметров формы включений t:

$$\lambda_{ijkl}^{*} = \lambda_{ijkl}^{*}\big(\lambda_{11}^{[1]}, \lambda_{12}^{[1]}, \lambda_{13}^{[1]}, \lambda_{33}^{[1]}, \lambda_{44}^{[1]}, \lambda_2(J_2), \mu_2(J_2), c_1, t\big), \qquad t = \frac{t_3}{t_1}. \tag{24}$$

2. На основе соотношений (2)–(4), (16)–(22) можно определить деформативные свойства дискретно-волокнистого композита с трансверсально-изотропными включениями и напряженно-деформированное состояние при заданных макродеформациях $\langle \varepsilon_{jk} \rangle$. Вычисления были проведены для композитного материала с угольными волокнами, для которых взяты следующие значения постоянных:

$$\lambda_{11}^{[1]} = 263\text{ГПа}, \qquad \lambda_{33}^{[1]} = 283\text{ГПа}, \qquad \lambda_{13}^{[1]} = 133\text{ГПа},$$
$$\lambda_{12}^{[1]} = 152 \text{ ГПа}, \qquad \lambda_{44}^{[1]} = 52 \text{ ГПа} \tag{25}$$

а параметр, характеризующий форму дискретных волокон $t = 2$ на основе алюминиевой матрицы, со следующими характеристиками:

$$K_2 = 70{,}3 \text{ ГПа}; \qquad \mu_2 = 26{,}095 \text{ ГПа};$$
$$\mu_2' = 10 \text{ ГПа}; \qquad k = \sigma_{2T}\sqrt{2/3}; \qquad \sigma_{2T} = 0{,}2 \text{ ГПа} \tag{26}$$

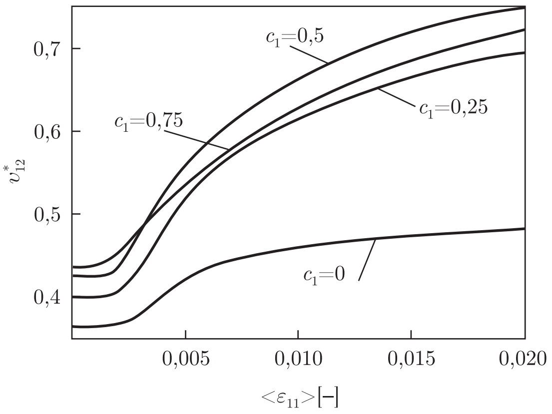

Рис. 1

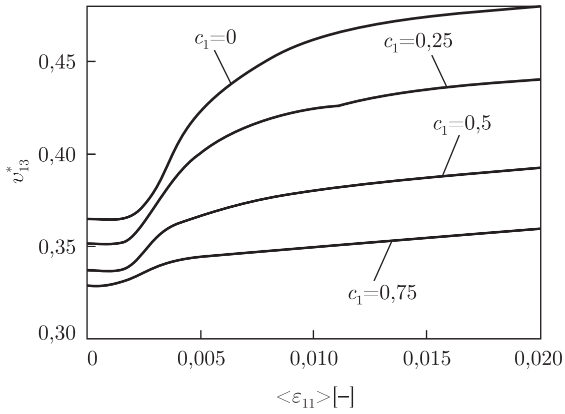

Рис. 2

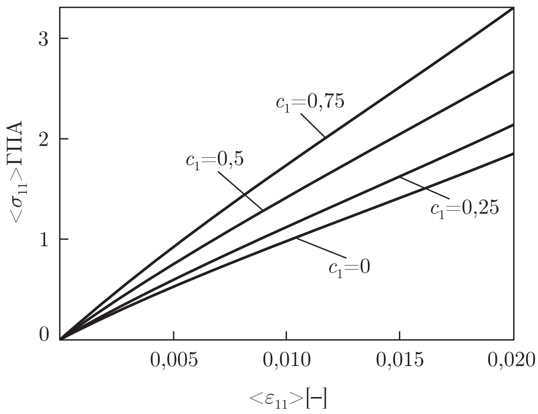

Рис. 3

для различной объемной концентрации включений:

$$c_1 = 0;\ 0{,}25;\ 0{,}5;\ 0{,}75. \tag{27}$$

На рис. 1, 2 представлены зависимости коэффициентов Пуассона ν^*_{13} и ν^*_{12} от макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ для различного объемного содержания включений c_1. На рис. 3 показаны кривые зависимостей макронапряжения $\langle\sigma_{11}\rangle$ от макродеформации $\langle\varepsilon_{11}\rangle$ для объемных содержаний включений c_1. Из приведенных графиков виден характер влияния объемного содержания волкон на эффективные деформативные свойства композита. Увеличение объемного содержания волокон приводит к увеличению жесткости и предела текучести композита, а также уменьшению коэффициента Пуассона ν^*_{13}. Коэффициент Пуассона ν^*_{12} увеличивается с увеличением объемного содержания волокон. А при высоком объемном содержании волокон наблюдается более сложная зависимость, что обусловлено влиянием анизотропии волокон.

1. *Хорошун Л. П., Шикула Е. Н.* Нелинейные деформативные свойства дисперсно-упрочненных материалов // Механика композит. материалов. – 2002. – **38**, № 4. – С. 473–486.
2. *Хорошун Л. П., Шикула Е. Н.* Деформирование физически нелинейных стохастических композитных материалов // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 12. – С. 7–38.
3. *Хорошун Л. П., Шикула Е. Н.* Деформирование и кратковременная повреждаемость физически нелинейных стохастических композитных материалов // Там же. – 2009. – **45**, № 12. – С. 42–70.

4. *Хорошун Л. П., Маслов Б. П., Шикула Е. Н., Назаренко Л. В.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с. – (Механика композитов: В 12-ти т. Т. 3.).
5. *Khoroshun L. P., Leshchenko P. V., Nazarenko L. V.* Effective thermoelastic constants of discretely-fibrous composites with anisotropic components // Int. Appl. Mech. – 1988. – **24**, No 10. – C. 955–961.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 27.04.2011

Л. В. Назаренко

Ефективні властивості трансверсально-ізотропних композитних матеріалів при фізичній нелінійності компонентів

Викладено методику і побудовано алгоритм визначення ефективних деформівних властивостей дискретно-волокнистого композитного матеріалу на основі фізично нелінійної ізотропної матриці та сфероїдальних лінійно-пружних трансверсально-ізотропних включень. Вихідними є стохастичні диференціальні рівняння фізично нелінійної теорії пружності. Перетворення їх до системи інтегральних рівнянь і застосування методу умовних моментів приводить задачу до нелінійної системи алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої будується методом ітерацій. Досліджено діаграми деформування залежно від об'ємного вмісту включень.

L. V. Nazarenko

Effective properties of transversally isotropic composites at a physical nonlinearity of components

A method and an algorithm for determining the effective deformative properties of discrete-fiber composite materials with a physically nonlinear isotropic matrix and spheroidal transversally isotropic linearly elastic inclusions are elaborated with the use of the system of stochastic differential equations of the physically nonlinear theory of elasticity. Its transformation to a system of integral equations and the application of the method of conditional moments reduce the problem to a system of nonlinear algebraic equations, whose solution is constructed by the iteration method. The deformation diagrams for various values of the volume content of inclusions are investigated.