Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

2 • 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

Е. С. Афанасьева, Р. Р. Салимов

О классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Я. Гутлянским)

Изучено граничное поведение гомеоморфизмов с конечным искажением класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ при условии типа Кальдерона для функции φ на гладких римановых многообразиях. Найдены условия непрерывного и гомеоморфного продолжения таких отображений на границы.

В 1854 г. Риман использовал новый способ определения метрики через положительно определенную квадратичную форму, которая впоследствии получила название римановой метрики. Понятие “многообразие” было впервые четко введено позже Пуанкаре. Систематическое изучение гладких многообразий началось после 1912 г. Параллельно этой теории длительное время развивалась и теория отображений в рамках конформных и квазиконформных отображений. Бельтрами, Каратеодори, Кристоффель, Гаусс, Гильберт, Лиувилль, Пуанкаре, Риман, Шварц и другие внесли свой вклад в развитие теории отображений. Отметим, что конформные отображения и их обобщения играют важную роль в развитии теории потенциала, математической физики, римановых поверхностей и топологии.

В конце 1920-х–в начале 1930-х гг. был введен более общий класс отображений, чем конформные, которые позже были названы квазиконформными. Вскоре квазиконформные отображения стали применяться к классическим проблемам покрытия римановых поверхностей (Альфорс), классификации односвязных римановых поверхностей (Волковыский), описанию модулей римановых поверхностей (Тейхмюллер). Затем произошел переход к исследованию более общих отображений, таких как отображения квазиконформные в среднем, с ограниченным интегралом Дирихле, с конечным искажением и др. В работе [1] для квазиконформных отображений было получено модульное неравенство, которое впоследствии легло в основу определения так называемых кольцевых Q-гомеоморфизмов. Теория нижних и кольцевых Q-гомеоморфизмов позволила исследовать граничное поведение на римановых многообразиях гомеоморфизмов с конечным искажением класса Орлича–Соболева при условии типа Кальдерона.

1. О римановых многообразиях. Напомним некоторые определения, которые можно найти, например, в [2, 3]. *n-мерное топологическое многообразие* $\mathbb{M}^n$ — это хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, в котором каждая точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$. *Картой на многообразии* $\mathbb{M}^n$ называется пара (U, φ), где U — открытое подмножество пространства $\mathbb{M}^n$, а φ — гомеоморфизм подмножества U на открытое подмножество координатного пространства $\mathbb{R}^n$: каждой точке $p \in U$ ставится во взаимно однозначное соответствие набор из n чисел, ее *локальных координат*. *Гладкое многообразие* — многообразие с картами $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, локальные координаты которых связаны гладким (C^∞) образом в областях пересечения. *Римановым многообразием* $(\mathbb{M}^n, g)$ называется гладкое многообразие вместе с заданным на нем метрическим тензором g или римановой метрикой. *Римановой метрикой* на многообразии называется положительно определенное (невырожденное) симметричное тензорное поле $g = g_{ij}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, которое определяется только в локальных координатах с правилом перехода:

$$'g_{ij}(x) = g_{kl}(y(x)) \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^l}{\partial x^j}, \tag{1}$$

где подразумевается суммирование по тем индексам, которые одновременно встречаются сверху и снизу. Тензорное метрическое поле $g_{ij}(x)$ в дальнейшем — гладкое.

Элемент длины на $(\mathbb{M}^n, g)$ задается инвариантной дифференциальной формой $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, где x^i — локальные координаты. В соответствии с этим, если $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{M}^n$ — кусочно-гладкая кривая и $x(t)$ — ее параметрическое задание в локальных координатах, то ее длина вычисляется по формуле

$$s_\gamma = \int\limits_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt. \tag{2}$$

Геодезическое расстояние $d(p_1, p_2)$ определяется как инфимум длин кусочно-гладких кривых, соединяющих точки p_1 и p_2 в $(\mathbb{M}^n, g)$ (см. [4, с. 94]).

Напомним также, что *элемент объема* на $(\mathbb{M}^n, g)$ определяется инвариантной формой $dv = \sqrt{|\det g_{ij}|} dx^1 \cdots dx^n$, а *элемент площади* гладкой поверхности H на $(\mathbb{M}^n, g)$ — инвариантной формой $d\mathcal{A} = \sqrt{|\det g^*_{\alpha\beta}|} du_1 \cdots du_{n-1}$, где $g^*_{\alpha\beta}$ — риманова метрика на H, порожденная исходной римановой метрикой g_{ij} по формуле

$$g^*_{\alpha\beta}(u) = g_{ij}(x(u)) \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta}. \tag{3}$$

Здесь $x(u)$ — гладкая параметризация поверхности H.

Для нас важны следующие фундаментальные факты (см., например, [4, лемма 5.10 и следствие 6.11; 5, с. 260–261]).

Предложение 1. *В каждой точке риманова многообразия существуют ее окрестности и соответствующие локальные координаты в них, в которых геодезическим сферам с центром в данной точке соответствуют евклидовы сферы с теми же радиусами и с центром в начале координат, а связкам геодезических, исходящих из данной точки, соответствуют связки лучей, исходящих из начала координат.*

Указанные окрестности и координаты принято называть *нормальными*.

Замечание 1. В частности, в нормальных координатах геодезические сферы имеют естественную гладкую параметризацию через направляющие косинусы соответствующих лучей, исходящих из начала координат. Кроме того, метрический тензор в начале этих координат совпадает с единичной матрицей (см., например, [4, предложение 5.11]).

2. О слабо плоских и сильно достижимых границах. Пусть $\Gamma = \{\gamma\}$ — семейство кривых на n-мерном римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$. Измеримая по Борелю неотрицательная функция $\rho\colon \mathbb{M}^n \to \overline{\mathbb{R}^+}$, $n \geqslant 2$, называется *допустимой* для Γ, если условие

$$\int\limits_{\gamma} \rho ds \geqslant 1 \tag{4}$$

выполнено для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. Здесь длина кривой $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{M}^n$ есть супремум сумм геодезических расстояний $\inf \sum\limits_{i=1}^{k} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i-1}))$, который берется по всем разбиениям $a = t_o \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_k = b$ интервала $[a,b]$. Кривая γ называется *спрямляемой*, если ее длина конечна.

Конформным модулем семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) := \inf_{\rho \in adm\Gamma} \int\limits_{\mathbb{M}^n} \rho^n dv, \tag{5}$$

где нижняя грань берется по всем допустимым для Γ функциям.

Напомним некоторые определения, в соответствии с работой [6], где рассматривались произвольные метрические пространства с мерами.

Область D на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$, $n \geqslant 2$, называется *локально связной в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется другая ее окрестность $V \subseteq U$ такая, что $V \bigcap D$ связно. Отметим, что любая жорданова область D в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, локально связна в любой своей граничной точке (см. [7, с. 66]). Будем также говорить, что граница ∂D *слабо плоская в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любого числа $P > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant P \tag{6}$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Будем говорить, что граница области D *сильно достижима в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0, найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M(\Delta(E, F; D)) \geqslant \delta \tag{7}$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V. Граница ∂D называется *сильно достижимой* и *слабо плоской*, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке границы. Отметим, что области со слабо плоскими границами являются локально связными на границе (см., например, [6, лемма 3.1] или [8, лемма 13.1]. Кроме того, они имеют сильно достижимые границы.

3. О пространствах Орлича–Соболева. Пусть D — область на римановом многообразии $(\mathbb{M}^n, g)$. Следуя Орличу (см. напр., [9]), для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, обозначим символом L_φ пространство всех функций $f\colon D \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\int\limits_D \varphi\biggl(\frac{|f(x)|}{\lambda}\biggr) dv(x) < \infty \tag{8}$$

при некотором $\lambda > 0$ (см. [10, 11]), L_φ называется *пространством Орлича.* Другими словами, L_φ есть конус над классом всех функций $g\colon D \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\int\limits_D \varphi(|g(x)|)\, dv(x) < \infty, \tag{9}$$

который также принято называть *классом Орлича* (см. [12]).

Классом Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(D)$ называется семейство, состоящее из всех локально интегрируемых функций f, определенных в области D, обобщенный градиент ∇f которых принадлежит пространству Орлича L_φ в локальных координатах. Заметим, что определение инвариантно относительно замены локальных координат. Кроме того, по определению, $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}} \subset W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$. Как обычно, мы пишем $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, если $\varphi(t) = t^p$, $p \geqslant 1$.

Пусть теперь f — отображение области D одного риманова многообразия $(\mathbb{M}^n, g)$ в другое риманово многообразие $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$. Тогда пишем $f \in W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, если

$$\int\limits_D \varphi(|\nabla f(x)|)\, dv(x) < \infty, \tag{10}$$

где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$ посчитано в некоторых локальных координатах $x_1, \ldots, x_n$ многообразия $(\mathbb{M}^n, g)$ для координатных функций $f_1, \ldots, f_n$ отображения f в $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.

В дальнейшем полагаем

$$J(x, f) = \lim_{r\to 0} \frac{v(f(B(x, r)))}{v(B(x, r))} \quad \text{п. в.} \qquad \text{и} \qquad L(x, f) = \limsup_{y\to x} \frac{d_*(f(x), f(y))}{d(x, y)}.$$

Будем говорить, что гомеоморфизм f между областями D и D_* на $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$ соответственно, $n \geqslant 3$, называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ и

$$L^n(x, f) \leqslant K(x) \cdot J(x, f) \tag{11}$$

для некоторой почти всюду конечной функции K. В дальнейшем $K_f(x)$ обозначает наименьшую функцию $K(x) \geqslant 1$ в (11), т. е. полагаем $K_f(x) = L^n(x, f)/\ J_f(x)$ при $J_f(x) \neq 0$, $K_f(x) = 1$ при $f'(x) = 0$ и $K_f(x) = \infty$ в остальных точках.

4. Основные результаты. Далее D и D_* — области на римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$, $n \geqslant 3$. Ранее в работе [13] исследовалось граничное поведение гомеоморфизмов с конечным искажением класса Орлича–Соболева в $\mathbb{R}^n$. Ниже приведены критерии о непрерывном и гомеоморфном продолжении на границы отображений между областям на римановых многообразиях.

Теорема 1. *Пусть D и D_* — области на римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$ соответственно, $n \geqslant 3$, $x_0 \in \partial D$ и $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ — возрастающая функция такая, что $\varphi(0) = 0$, и*

$$\int\limits_1^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{1/(n-2)} dt < \infty. \tag{12}$$

Предположим, что область D локально связна в точке $x_0 \in \partial D$, а область D_* имеет сильно достижимую границу и компактное замыкание. Пусть $f\colon D \to D_*$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$. Если выполнено условие

$$\int\limits_0^{\delta(x_0)} \frac{dr}{|K_f|_{n-1}(r)} = \infty, \tag{13}$$

где $r = d(x, x_0)$, $0 < \delta(x_0) < d(x_0) := \sup\limits_{x \in D} d(x, x_0)$, и

$$|K_f|_{n-1}(r) = |K_f|_{n-1}(x_0, r) = \left(\int\limits_{D \cap S(x_0,r)} K_f^{n-1}(x) d\mathcal{A}\right)^{1/(n-1)}, \tag{14}$$

то отображение f продолжается по непрерывности в точку x_0 на $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$.

Теорема 2. *Пусть D и D_* — области на римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$ соответственно, $n \geqslant 3$, D локально связна на границе и имеет компактное замыкание, а граница области D_* является слабо плоской. Если $f\colon D \to D_*$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ с условием (12), $K_f \in L^{n-1}(D)$, то отображение f^{-1} имеет непрерывное продолжение на $\overline{D_*}$.*

Теорема 3. *Пусть D и D_* — области на римановых многообразиях $(\mathbb{M}^n, g)$ и $(\mathbb{M}^n_*, g^*)$ соответственно, $n \geqslant 3$, с компактными замыканиями, область D локально связна на границе, а D_* имеет слабо плоскую границу. Если $f\colon D \to D_*$ — гомеоморфизм с конечным искажением класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, $K_f \in L^{n-1}(D)$ с условиями (12) и (13) для всех $x_0 \in \partial D$, то f допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f}\colon \overline{D} \to \overline{D_*}$.*

Замечание 2. В частности, все эти теоремы имеют место для отображений класса Соболева $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$. Условие (13) выполняется, например, если $K_f(x) = O\left(\log \dfrac{1}{d(x, x_0)}\right)$ при $x \to x_0$.

1. *Bishop C. J., Gutlyanskii V. Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2003. – No 22. – P. 1397–1420.
2. *Choquet-Bruhat Y., DeWitt-Morette C., Dillard-Bleick M.* Analysis, manifolds and physics. – Amsterdam: Elsevier Science B. V., 1977. – 649 p.
3. *Позняк Э. Г., Шикин Е. В.* Дифференциальная геометрия. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 384 с.
4. *Lee J. M.* Riemannian manifolds: an introduction to curvature. – New York: Springer, 1997. – 224 p.
5. *Картан Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1960. – 307 с.
6. *Ryazanov V., Salimov R.* Weakly flat spaces and boundaries in the mapping theory // Ukr. Math. Bull. – 2007. – **4**, No 2. – P. 199–234.
7. *Wilder R. L.* Topology of manifolds. – New York: AMS, 1949. – 404 p.

8. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
9. *Orlicz W.* Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B // Bull. Intern. Acad. Pol. Ser. A, Cracovie. – 1932. – P. 207–220.
10. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – Москва: Физматгиз, 1958. – 270 p.
11. *Zaanen A. C.* Linear analysis. – Noordhoff, 1953. – 600 p.
12. *Birnbaum Z., Orlicz W.* Über die Verallgemeinerungen des Begriffes der zueinauder konjugierten Potenzen // Stud. Math. – 1931. – **3**. – P. 1–67.
13. *Kovtonyuk D., Ryazanov V., Salimov R., Sevost'yanov E.* On mappings in the Orlicz–Sobolev classes. – arXiv:1012.5010v4[math.CV]. – 69 p.

Институт прикладной математики
и механики НАН Украины, Донецк

Поступило в редакцию 04.05.2011

О. С. Афанасьєва, Р. Р. Салімов

Про класи Орліча–Соболєва на ріманових многовидах

Вивчено граничну поведінку гомеоморфізмів зі скінченним спотворенням класу Орліча–Соболєва $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ *за умовою типу Кальдерона для функції* φ *на гладких ріманових многовидах. Знайдено умови неперервного та гомеоморфного продовження таких відображень на межі.*

O. S. Afanas'eva, R. R. Salimov

About Orlicz–Sobolev classes on Riemannian manifolds

The boundary behavior of homeomophisms with finite distortions of Orlicz–Sobolev classes $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ *with Calderon's type condition for the function* φ *on smooth Riemannian manifolds is studied. Conditions for a continuous and homeomorphic extension of these mappings to the boundaries are found.*