УДК 517.55

А. К. Бахтин

Аналитические функции векторного аргумента и частично конформные отображения в многомерных комплексных пространствах

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Ю. Ю. Трохимчуком)

Предложено векторное обобщение основных понятий теории функций комплексного переменного: понятие модуля и аргумента комплексного числа. Понятие голоморфного отображения распространено определенным образом на случай бесконечномерного пространства. В частности, обобщен ряд известных теорем о функциях класса S из теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства.

В данной работе результаты, полученные в [1], распространяются на бесконечномерный случай. В своих исследованиях мы придерживаемся терминологической архитектуры комплексного анализа, разработанной в [2–6]. Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — соответственно множества натуральных, вещественных и комплексных чисел. $R_+ = [0, +\infty)$. Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ — сфера Римана (расширенная комплексная плоскость), $r(B, a)$ — внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$, относительно точки $a \in B$ (см., например [7–15]). По аналогии с пространством $\mathbb{C}^n$ рассмотрим линейное векторное пространство $\mathbb{C}^\infty$, т. е. пространство упорядоченных, счетных последовательностей комплексных чисел. Таким образом, $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C} \times \cdots$. Аналогично, $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times \cdots$, $\mathbb{R}^\infty \subset \mathbb{C}^\infty$.

Перенесем на случай пространства $\mathbb{C}^\infty$ некоторые понятия работы [1].

1. Алгебра $\mathbb{C}^\infty$.

Определение 1. Бинарную операцию, действующую из $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty$ в $\mathbb{C}^\infty$ по правилу

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{W} = \{z_k w_k\}_{k=1}^\infty,$$

где $\mathbf{Z} = \{z_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty$, $\mathbf{W} = \{w_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty$, будем называть *векторным умножением элементов* $\mathbb{C}^\infty$. Данная операция превращает $\mathbb{C}^\infty$ в коммутативную, ассоциативную алгебру [11, 12] с единицей $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1, \ldots) \in \mathbb{C}^\infty$. Обратимыми относительно так определенной операции умножения являются те и только те элементы $\mathbf{Z} = \{z_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty$, у которых $z_k \neq 0$ для всех $k = \overline{1, \infty}$.

Обратными для таких элементов $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^\infty$ являются элементы $\mathbf{Z}^{-1} = \{z_k^{-1}\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty$, так как $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{1}$. Множество Θ всех элементов $\mathbf{A} = \{a_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty$, у которых хотя бы одна координата $a_k = 0$, назовем множеством необратимых элементов $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^\infty$. Множество Θ является объединением максимальных идеалов алгебры $\mathbb{C}^\infty$ [13].

2. Сопряжение.

Определение 2. Каждому элементу $\mathbf{W} = \{w_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty$ поставим в соответствие векторно-сопряженный элемент $\overline{\mathbf{W}} = \{\overline{w}_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{C}^\infty$, где $\overline{w}_k$ обозначает число, комплексно-сопряженное w_k в обычном смысле. Так определенное соответствие задает автоморфизм $\mathbb{C}^\infty$, оставляющий неподвижным подпространство $\mathbb{R}^\infty$.

3. Модуль (векторный). В алгебре $\mathbb{C}$ одним из важнейших является понятие модуля комплексного числа. Пусть $\mathbb{R}_+^\infty = R_+ \times R_+ \times \cdots \times R_+ \cdots$.

Определение 3. Векторным модулем произвольного элемента $\mathbf{Z} = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ будем называть вектор $|\mathbf{Z}| := \{|z_k|\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}_+^{\infty}$.

Важно, что для произвольного $\mathbf{Z} = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ справедливо равенство

$$\mathbf{Z} \cdot \overline{\mathbf{Z}} = |\overline{\mathbf{Z}}|^2 = |\mathbf{Z}|^2.$$

4. Векторная норма.

Определение 4. Вектор $\mathbf{X} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$ будем называть неотрицательным (строго положительным) и писать $\mathbf{X} \geqslant \mathbf{0}$ ($\mathbf{X} > \mathbf{0}$), если $x_k \geqslant 0$ для всех $k = \overline{1, \infty}$ ($x_k > 0$ хотя бы для одного $k = \overline{1, \infty}$), $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Определение 5. Будем говорить, что вектор $\mathbf{X} = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$ больше либо равен (строго больше) вектора $\mathbf{Y} = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$, если $\mathbf{X} - \mathbf{Y} \geqslant \mathbf{0}$ ($\mathbf{X} - \mathbf{Y} > \mathbf{0}$). В многомерных пространствах ситуация существенно отличается от случая вещественной прямой, например, вектор $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots 0, \ldots)$ больше либо равен всех векторов, координаты которых неположительны, и меньше либо равен всех векторов из $\mathbb{R}_+^{\infty}$. Остальные векторы $\mathbb{R}^{\infty}$, у которых координаты разных знаков с вектором $\mathbf{0}$, не сравнимы в смысле определений 4 и 5.

Определение 6. Векторное пространство $\mathbf{Y}$ будем называть векторно нормированным, если каждому $y \in \mathbf{Y}$ сопоставлен неотрицательный вектор $\|y\| \in \mathbb{R}_+^{\infty}$, удовлетворяющий условиям:

1) $\|y\| \geqslant \mathbf{0}$, причем $\|y\| = \mathbf{0} \Longleftrightarrow y = 0_{\mathbf{Y}}$ ($0_{\mathbf{Y}}$ — нуль пространства $\mathbf{Y}$);

2) $\|\gamma y\| = |\gamma| \|y\|$, $\forall\, y \in \mathbf{Y}$, $\forall\, \gamma \in \mathbb{C}$;

3) $\|y_1 + y_2\| \leqslant \|y_1\| + \|y_2\|$, $\forall\, y_1, y_2 \in \mathbf{Y}$.

Аналогично можно ввести понятие векторной метрики. Введенное определение 3 удовлетворяет определению 6. Таким образом, векторный модуль является векторной нормой в алгебре $\mathbb{C}^{\infty} : \|\cdot\| = |\cdot|$. Тогда открытым единичным шаром в алгебре $\mathbb{C}^{\infty}$ является единичный открытый поликруг $\|z\| < \mathbf{1}$, ($\mathbf{1}$) $= (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, а единичной сферой — $\mathbb{T}^{\infty} = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{\infty} \colon \|\mathbf{Z}\| = \mathbf{1}\}$. Важно, что

а) $|\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2| = \|\mathbf{Z}_1 \cdot \mathbf{Z}_2\| = \|\mathbf{Z}_1\| \|\mathbf{Z}_2\| = |\mathbf{Z}_1| |\mathbf{Z}_2|$, $\forall\, \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2 \in \mathbb{C}^{\infty}$;

б) $|\mathbf{1}| = \|\mathbf{1}\| = \mathbf{1}$, ($\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$).

5. Векторный аргумент $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{\infty}$. В дальнейшем вектор (произвольный) пространства (алгебры) $\mathbb{C}^{\infty}$ будем называть бесконечномерным комплексным числом, а алгебру $\mathbb{C}^{\infty}$ будем называть алгеброй бесконечномерных комплексных чисел.

Определение 7. Векторным аргументом бесконечномерного комплексного числа $\mathbf{A} = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty} \backslash \Theta$ является бесконечномерный вещественный вектор, определяемый формулой

$$\operatorname{Arg} \mathbf{A} = \{\operatorname{Arg} a_k\}_{k=1}^{\infty},$$

где $\operatorname{Arg} a_k$ есть главное значение аргумента либо то, которое вытекает из конкретного смысла задачи, в которой фигурирует бесконечномерное комплексное число $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{\infty}$.

6. Пополнение $\mathbb{C}^{\infty}$. В качестве пополнения $\mathbb{C}^{\infty} = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C} \times \cdots$ возьмем пространство $\overline{\mathbb{C}}^{\infty} = \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \times \cdots \times \overline{\mathbb{C}} \times \cdots$, которое по аналогии с конечномерным случаем (см. [2–6]) будем называть бесконечномерным пространством теории функций. Бесконечными точками $\overline{\mathbb{C}}^{\infty}$ являются те точки, у которых хотя бы одна координата бесконечна. Множество всех бесконечных точек имеет коразмерность единица. Топологию в $\overline{\mathbb{C}}^{\infty}$ определяем как покоординатную сходимость, равномерную по номерам координат.

7. Дифференцируемость. Сначала обратимся к конечномерному случаю. Рассмотрим область $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$ и отображение $\mathbb{F}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}^m$, $\mathbb{F} = \{f_k(z_1, \ldots, z_n)\}_{k=1}^m$. Пусть $f_k = U_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) + iV_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ — вещественно непрерывно дифференцируемы всюду в области $\mathbb{D}$ при $k = \overline{1,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Матрицу Якоби отображения $\mathbb{F}$, рассматриваемого как дифференцируемое отображение области $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{2n}$ в $\mathbb{R}^{2m}$ (матрица $2m \times 2n$), представим следующим образом:

$$\begin{pmatrix}
U_{x_1}^{(1)} & \ldots & U_{x_n}^{(1)} & | & U_{y_1}^{(1)} & \ldots & U_{y_n}^{(1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \{\mathbb{U}_{\mathbf{X}}\} & \vdots & | & \vdots & \{\mathbb{U}_{\mathbf{Y}}\} & \vdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots \\
U_{x_1}^{(m)} & \ldots & U_{x_n}^{(m)} & | & U_{y_1}^{(m)} & \ldots & U_{y_n}^{(m)} \\
--- & --- & --- & | & --- & --- & --- \\
V_{x_1}^{(1)} & \ldots & V_{x_n}^{(1)} & | & V_{y_1}^{(1)} & \ldots & V_{y_n}^{(1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & \{\mathbb{V}_{\mathbf{X}}\} & \vdots & | & \vdots & \{\mathbb{V}_{\mathbf{Y}}\} & \vdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & | & \cdots & \cdots & \cdots \\
V_{x_1}^{(m)} & \ldots & V_{x_n}^{(m)} & | & V_{y_1}^{(m)} & \ldots & V_{y_n}^{(m)}
\end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $U_{x_j}^{(k)} = \dfrac{\partial}{\partial x_j} U_k$, $V_{x_j}^{(k)} = \dfrac{\partial}{\partial x_j} V_k$, $k = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Штрихованные линии разбивают матрицу Якоби (1) на четыре прямоугольные матрицы порядка $m \times n$, обозначенные $\mathbb{U}_{\mathbf{X}}$, $\mathbb{U}_{\mathbf{Y}}$, $\mathbb{V}_{\mathbf{X}}$, $\mathbb{V}_{\mathbf{Y}}$, где $\mathbb{F} = \operatorname{Re}\mathbb{F} + i\operatorname{Im}\mathbb{F} = \mathbb{U} + i\mathbb{V}$, $\mathbf{Z} = \operatorname{Re}\mathbf{Z} + i\operatorname{Im}\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$. С учетом сказанного матрицу (1) можно представить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{U}_{\mathbf{X}} & \mathbb{U}_{\mathbf{Y}} \\ \mathbb{V}_{\mathbf{X}} & \mathbb{V}_{\mathbf{Y}} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Тогда условия Коши–Римана для отображения $\mathbb{F}$ можно записать в виде

$$\begin{cases} \mathbb{U}_{\mathbf{X}} = \mathbb{V}_{\mathbf{Y}}, \\ \mathbb{U}_{\mathbf{Y}} = -\mathbb{V}_{\mathbf{X}}. \end{cases} \tag{3}$$

Определение 8. Отображение $\mathbb{F}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}^m$, вещественно непрерывно дифференцируемое в $\mathbb{D}$ (как отображение из $\mathbb{R}^{2n}$ в $\mathbb{R}^{2m}$) и удовлетворяющее матричному уравнению (3) всюду в $\mathbb{D}$, будем называть голоморфным в области $\mathbb{D}$. При $n \in \mathbb{N}$ и $m = 1$ получаем определение голоморфной функции в области $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$. В случае $n = 1$, $m \in \mathbb{N}$ получаем определение голоморфной кривой.

Как известно [2–6], голоморфное отображение $\mathbb{F}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}^m$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^n$ называется биголоморфным, если оно имеет обратное отображение, голоморфное в области $\mathbb{F}(\mathbb{D})$.

Теперь дадим формальное обобщение приведенных выше рассуждений на бесконечномерный случай. Пусть даны область $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^\infty$ и отображение $\mathbb{F}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}^\infty$, где $\mathbb{F} = \{f_k(\mathbf{Z})\}_{k=1}^n = \{f_k(\mathbf{X}+i\mathbf{Y})\}_{k=1}^n$, $f_k(\mathbf{X}+i\mathbf{Y}) = U_k(\mathbf{X},\mathbf{Y}) + iV_k(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = U_k(\{x_p\}_{p=1}^\infty, \{y_p\}_{p=1}^\infty) + iV_k(\{x_p\}_{p=1}^\infty, \{y_p\}_{p=1}^\infty)$. $\mathbb{F} = \mathbb{U} + i\mathbb{V}$, $\mathbb{U} = \mathbb{U}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \{U_k(\mathbf{X},\mathbf{Y})\}_{k=1}^\infty$, $\mathbb{V} = \mathbb{V}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \{V_k(\mathbf{X},\mathbf{Y})\}_{k=1}^\infty$, $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y} = \{x_k\}_{k=1}^\infty + i\{y_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{D}$. Пусть функции $U_k(\{x_p\}_{p=1}^\infty, \{y_p\}_{p=1}^\infty)$,

$V_k(\{x_p\}_{p=1}^{\infty}, \{y_p\}_{p=1}^{\infty})$ всюду в $\mathbb{D}$ имеют непрерывные частные производные по всем переменным x_p, y_p, $p = \overline{1,\infty}$. Тогда матрицу Якоби представим в виде, аналогичном (2):

$$\begin{pmatrix} \mathbb{U}_{\mathbf{X}} & \mathbb{U}_{\mathbf{Y}} \\ \mathbb{V}_{\mathbf{X}} & \mathbb{V}_{\mathbf{Y}} \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{U}_{\mathbf{X}}, \mathbb{U}_{\mathbf{Y}}, \mathbb{V}_{\mathbf{X}}, \mathbb{V}_{\mathbf{Y}}$ являются бесконечными матрицами следующего вида:

$$\mathbb{U}_{\mathbf{X}} = \left[\{U_{x_p}^{(k)}\}_{k=1,p=1}^{\infty}\right], \qquad \mathbb{U}_{\mathbf{Y}} = \left[\{U_{y_p}^{(k)}\}_{k=1,p=1}^{\infty}\right],$$

$$\mathbb{V}_{\mathbf{X}} = \left[\{V_{x_p}^{(k)}\}_{k=1,p=1}^{\infty}\right], \qquad \mathbb{V}_{\mathbf{Y}} = \left[\{V_{y_p}^{(k)}\}_{k=1,p=1}^{\infty}\right],$$

$$V_{x_p}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x_p} V_k, \qquad V_{y_p}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial y_p} V_k, \qquad U_{x_p}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x_p} U_k, \qquad U_{y_p}^{(k)} = \frac{\partial}{\partial x_p} U_k, \qquad k, p = \overline{1,\infty}.$$

Символ $[\cdot]$ обозначает бесконечную матрицу.

Тогда уравнения Коши–Римана примут вид

$$\begin{cases} \mathbb{U}_{\mathbf{X}} = \mathbb{V}_{\mathbf{Y}}, \\ \mathbb{U}_{\mathbf{Y}} = -\mathbb{V}_{\mathbf{X}}. \end{cases} \tag{4}$$

Определение 9. Пусть $\mathbb{D}$ является произвольной областью из пространства $\mathbb{C}^{\infty}$. Отображение $\mathbb{F} : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^{\infty}$, вещественно непрерывно дифференцируемое в $\mathbb{D}$ и удовлетворяющее матричному уравнению (4) всюду в $\mathbb{D}$, будем называть голоморфным отображением области $\mathbb{D}$.

По аналогии с конечномерным случаем, будем считать, что голоморфное отображение $\mathbb{F} \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}^{\infty}$, $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^{\infty}$ является биголоморфным, если $\mathbb{F}$ имеет обратное отображение, голоморфное в $\mathbb{F}(\mathbb{D})$.

Пусть $\mathbb{U}_r^{\infty} = U_r \times U_r \times \cdots \times U_r \times \cdots$, где $U_r = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < r\}$, $\mathbb{U}_1^{\infty} := \mathbb{U}^{\infty}$. $\overline{\mathbb{U}}_r^{\infty} = \overline{U}_r \times \times \overline{U}_r \times \cdots \times \overline{U}_r \times \cdots$, и $\mathbb{F}_p \colon \mathbb{U}^{\infty} \to \mathbb{C}^{\infty}$ — некоторая последовательность отображений.

Определение 10. Будем говорить, что последовательность $\mathbb{F}_p$, $p = \overline{1,\infty}$, равномерно внутри $\mathbb{U}^{\infty}$ сходится к некоторому отображению $\mathbb{F}_0 \colon \mathbb{U}^{\infty} \to \mathbb{C}^{\infty}$, если для любого $\varepsilon > 0$ и $0 < r < 1$ существует такой номер $n_0 = n_0(\varepsilon, r)$, $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\|\mathbb{F}_p(\mathbf{Z}) - \mathbb{F}_0(\mathbf{Z})\| \leqslant \varepsilon \cdot \mathbf{1}$ для всех $\mathbb{Z} \in \overline{\mathbb{U}}_r^{\infty}$ и всех $p > n_0$.

Пусть $\mathbb{D} = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_n \times \cdots \subset \mathbb{C}^{\infty}$.

Определение 11. Голоморфное отображение $\mathbb{F} \colon \mathbb{D}^{\infty} \to \mathbb{C}^{\infty}$ будем называть аналитической функцией векторного аргумента, если для любой точки $\mathbf{Z}_0 \subset \mathbb{D}$ существует поликруг $\mathbb{U}_r(\mathbf{Z}_0) = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{\infty} \colon |\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0| < r\} \subset \mathbb{D}$, в котором отображение $\mathbb{F}(\mathbf{Z})$ представимо сходящимся степенным рядом Тейлора $\mathbb{F}(\mathbf{Z}) = \sum \mathbf{A}_k (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0)^k$.

Определение 12. Пусть $\delta \in (0; 1]$. Тогда отображение $\mathbb{F}(\mathbf{Z}) = \{f_k(z_k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbf{Z} \in \mathbb{U}^{\infty}$, где каждое $f_k(z_k)$, $k = \overline{1,\infty}$, является однолистной функцией в единичном круге такой, что $\delta < |f_k'(0)| < 1/\delta$, $k = \overline{1,\infty}$, будем называть частично конформным отображением единичного поликруга.

8. Представление бесконечномерного комплексного числа в векторно-полярной форме. Используя вышеприведенные определения, получим цепочку равенств:

$$\mathbf{Z} = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} = \{|z_k|\}_{k=1}^{\infty} \{e^{i\alpha_k}\}_{k=1}^{\infty} = |\mathbf{Z}| e^{i \operatorname{Arg} \mathbf{Z}},$$

где $e^{i \operatorname{Arg} \mathbf{Z}} = \{e^{i \operatorname{Arg} z_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Для регулярной в областях $(B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots)$, $B_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, \infty}$, функции $F(z)$ комплексного переменного определим продолжение этой функции до голоморфного отображения области $\mathbb{B} = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n \times \cdots$ по следующему правилу: $\mathbb{F}(\mathbf{W}) = \{F(w_k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbf{W} = \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{B}$. На основании этой формулы легко построить аналоги всех элементарных функций в $\overline{\mathbb{C}}$.

9. Полицилиндрическая теорема Римана об отображении в $\overline{\mathbb{C}}^{\infty}$. Область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ называется областью гиперболического типа, если ∂B (граница B) — связное множество, содержащее более одной точки. Пусть $0 < \delta \leqslant 1$ и $\mathbf{A} = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \overline{\mathbb{C}}^{\infty}$. Тогда $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{\delta}(\mathbf{A}) = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n \times \cdots \subset \overline{\mathbb{C}}^{\infty}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{B}_{\delta}(\mathbf{A})$, где каждая область B_k является областью гиперболического типа, $\delta < r(B_k, a_k) < 1/\delta$, $k = \overline{1, \infty}$. При любом $0 < \delta \leqslant 1$ область $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{\delta}(\mathbf{A})$ называется конечной относительно $\mathbb{A}$ полицилиндрической областью гиперболического типа.

Теорема Римана. *Пусть $\mathbf{A} \in \overline{\mathbb{C}}^{\infty}$ и $0 < \delta \leqslant 1$. Тогда любая конечная относительно $\mathbf{A}$ полицилиндрическая область $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{\delta}(\mathbf{A}) \subset \overline{\mathbb{C}}^{\infty}$ гиперболического типа биголоморфно эквивалентна единичному поликругу $\mathbb{U}^{\infty} = \{\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{\infty} \colon \|\mathbf{W}\| < \mathbf{1}\}$.*

Пусть $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{\delta}(\mathbf{A}) = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n \times \cdots$ — область, указанная в теореме Римана, $\mathbf{A} = \{a_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{B}$, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, \infty}$, и $w_k = f_k(z_k)$ — голоморфная в B_k функция, однолистно и конформно отображающая область B_k, $k = \overline{1, \infty}$, на единичный круг $|w_k| < 1$ так, что $f(a_k) = 0$, $f'(a_k) > 0$. Тогда биголоморфное отображение $\mathbb{F}_{\mathbb{B}}(\mathbf{Z}) = \{f_k(z_k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbb{F}'_{\mathbb{B}}(\mathbf{Z}) = \{f'_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяет условиям нормировки $\mathbb{F}_{\mathbb{B}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, $\mathbb{F}'_{\mathbb{B}}(\mathbf{Z}) = \{f'_k(a_k)\}_{k=1}^{\infty} > \mathbf{0}$ и будет единственным таким отображением на единичный поликруг. Тогда обратное отображение к отображению $\mathbb{F}_{\mathbb{B}}(\mathbf{A})$ является частично конформным отображением единичного поликруга.

10. Приложения. В связи с бесконечномерной теоремой Римана об отображении рассмотрим полицилиндрический аналог известного класса S из теории однолистных функций [7–10].

Определение 13. Классом $\mathbb{S}^{(\infty)}$ назовем совокупность всех биголоморфных отображений единичного поликруга $\mathbb{U}^{\infty} = \{\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{\infty} \colon \|\mathbf{Z}\| < \mathbf{1}\}$ вида $\mathbb{F}(\mathbf{Z}) = \{f_k(z_k)\}_{k=1}^{\infty}$, где $f_k \in S$, $k = \overline{1, \infty}$, $\mathbf{Z} = \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{U}^{\infty}$.

Теорема 1. *Для произвольного отображения $\mathbb{F} \in \mathbb{S}^{(\infty)}$ справедливо неравенство*

$$\frac{\|\mathbf{Z}\|}{(1 + \|\mathbf{Z}\|)^2} \leqslant \|\mathbb{F}(\mathbf{Z})\| \leqslant \frac{\|\mathbf{Z}\|}{(1 - \|\mathbf{Z}\|)^2},$$

где $\|\mathbf{Z}\| = r$, $0 \leqslant r < 1$.

Теорема 2. *Для произвольного отображения $\mathbb{F} \in \mathbb{S}^{(\infty)}$ справедливо неравенство*

$$\frac{\|1 - \mathbf{Z}\|}{(1 + \|\mathbf{Z}\|)^3} \leqslant \|\mathbb{F}'(\mathbf{Z})\| \leqslant \frac{\|1 + \mathbf{Z}\|}{(1 - \|\mathbf{Z}\|)^3},$$

где $\|\mathbf{Z}\| = r$, $0 \leqslant r < 1$, $k = \overline{1, \infty}$.

Теорема 3 (теорема Де Бранжа–Бибербаха). *Если $\mathbb{F} \in \mathbb{S}^{(\infty)}$, то*

$$|\mathbf{A}_n| \leqslant n \cdot \mathbf{1} = n,$$

где $\mathbb{F} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k \mathbf{Z}^k$, $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Знак равенства в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда $\mathbb{F} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $f_k^0 = z_k(1 - e^{i\theta} z_k)^{-2}$, $\theta_k \in [0, 2\pi]$, $k = \overline{1, \infty}$.

1. *Бахтин А. К.* Обобщение некоторых результатов теории однолистных функций на многомерные комплексные пространства // Доп. НАН України. – 2011. – № 3. – С. 7–11.
2. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. I. – Москва: Наука, 1976. – 320 с.
3. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. II. – Москва: Наука, 1976. – 400 с.
4. *Фукс Б. В.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. – Москва: Физматгиз, 1962. – 420 с.
5. *Фукс Б. В.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. – Москва: Физматгиз, 1963. – 428 с.
6. *Чирка Е. М.* Комплексные аналитические множества. – Москва: Наука, 1985. – 272 с.
7. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1966. – 628 с.
8. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.
9. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в задачах о неналегающих областях // Мат. сб. – 1985. – **128**, № 1. – С. 110–123.
10. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного. – Владивосток: Дальнаука ДВО РАН, 2009. – 390 с.
11. *Кантор И. Л., Солодовников А. С.* Гиперкомплексные числа. – Москва: Наука, 1973. – 143 с.
12. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – Москва: Наука, 1976. – 648 с.
13. *Рудин У.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1975. – 449 с.
14. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. – Москва: Наука, 1969. – 432 с.
15. *Лебедев Н. А.* Принцип площадей в теории однолистных функций. – Москва: Наука, 1975. – 336 с.

Институт математики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.05.2011

О. К. Бахтін

Аналітичні функції векторного аргументу і частково конформні відображення в багатовимірних комплексних просторах

Запропоновано векторне узагальнення основних понять теорії функцій комплексної змінної: поняття модуля й аргументу комплексного числа. Поняття голоморфного відображення поширено певним чином на випадок нескінченновимірного простору. Зокрема, узагальнено ряд відомих теорем про функції класу S з теорії однолисних функцій на багатовимірні комплексні простори.

A. K. Bakhtin

Analytic functions of vector argument and partially conformal mappings in multidimensional complex spaces

We propose a vector generalization of the basic concepts of the theory of complex variable: the concepts of modulus and argument of a complex number. We introduce some generalized notions of holomorphic functions and mappings in the case of multidimensional complex spaces. This approach allows us generalize several well-known results of the geometric function theory to the case of multidimensional complex spaces.