УДК 519.41/47

О. О. Пипка, М. М. Семко (мол.)

Про нескінченні групи, які мають тільки два типи пронормальних підгруп

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Нехай G — група. Підгрупа H групи G називається пронормальною в G, якщо для кожного $g \in G$ підгрупи H і H^g є спряженими у підгрупі $\langle H, H^g \rangle$. Підгрупа H групи G називається абнормальною в G, якщо $g \in \langle H, H^g \rangle$ для всякого елемента $g \in G$. Вивчено деякі типи нескінченних груп, у яких усі пронормальні підгрупи або нормальні, або абнормальні.

Підгрупа H групи G називається *абнормальною* в G, якщо $g \in \langle H, H^g \rangle$ для всякого елемента $g \in G$. Абнормальні підгрупи були уведені Ф. Холлом у роботі [1], а сам термін "абнормальна підгрупа" належить Р. Картерові [2]. Абнормальні підгрупи є антиподами нормальних підгруп і їхніх узагальнень (абнормальна підгрупа може бути нормальною лише тоді, коли вона збігається з усією групою). Так, наприклад, абнормальна підгрупа H завжди самонормалізовна, тобто $H = N_G(H)$, і є контранормальною, тобто $H^G = G$. Підгрупи такого роду відіграють досить істотну роль у теорії скінченних груп. Досить широким узагальненням абнормальних підгруп є пронормальні підгрупи. Підгрупа H групи G називається *пронормальною* в G, якщо для кожного елемента $g \in G$ підгрупи H і H^g спряжені в $\langle H, H^g \rangle$. Пронормальні підгрупи також були введені в розгляд Ф. Холлом. Важливими прикладами пронормальних підгруп є силовські p-підгрупи скінченних груп, силовські π-підгрупи скінченних розв'язних груп, картерові підгрупи скінченних розв'язних груп та ін. Якщо абнормальні підгрупи є антиподами нормальних підгруп, то пронормальні підгрупи можуть бути нормальними. Більше того, кожна підгрупа, що одночасно пронормальна й субнормальна, буде нормальною. У нескінченних групах дослідження пронормальних та пов'язаних з ними підгруп було почато в огляді М. С. Ба, З. І. Боревича [3] та роботах М. Ф. Кузенного, І. Я. Субботіна [4–7]. Ці роботи стимулювали подальший інтерес до досліджень пронормальних і пов'язаних з ними підгруп, а також їхніх зв'язків. Деякий огляд цих досліджень проведений у статті [8].

Як ми вже відзначали, нормальні й абнормальні підгрупи являють собою два крайніх полюси в сімействі всіх пронормальних підгруп. Тому природно виникає питання про будову груп, усяка пронормальна підгрупа яких є підгрупою одного з цих двох типів. Ми починаємо вивчення деяких нескінченних груп із такою властивістю. Дослідження цих груп проводиться при деяких природних обмеженнях. Це пов'язано з тією обставиною, що в нескінченних групах практично немає хороших критеріїв пронормальності й абнормальності.

У даному повідомленні детально описано будову періодичних майже локально нільпотентних груп, усяка пронормальна підгрупа яких або нормальна, або абнормальна, а потім знайдено деякі типи груп, які при зазначеному обмеженні є майже локально нільпотентними.

Теорема 1. *Нехай G — періодична група, усяка пронормальна підгрупа якої нормальна або абнормальна. Якщо G — майже локально нільпотентна група, то або вона локально нільпотентна, або G задовольняє таким умовам:*

(i) $G = Q\lambda P$, *де* P *— силовська* p*-підгрупа* G, *а* Q *— її силовська* p'*-підгрупа,* p *— просте число;*

(ii) $P = D\langle x\rangle$ *для деякого елемента* x, *підгрупа* D G*-інваріантна й* $x^p \in D$ *(таким чином,* $Q \times D$ *— локально нільпотентний радикал* G*);*

(iii) якщо H *—* G*-інваріантна підгрупа* Q, *то* $C_{Q/H}(x) = \langle 1\rangle$*;*

(iv) $\langle x\rangle^G = G$*;*

(v) підгрупа Q *нільпотентна.*

Теорема 1 описує будову періодичних майже локально нільпотентних груп, усяка пронормальна підгрупа якої нормальна або абнормальна. Зараз ми вкажемо деякі типи періодичних груп, усяка пронормальна підгрупа яких нормальна або абнормальна, які є майже локально нільпотентними.

Група G називається *гіперскінченною*, якщо вона має зростаючий ряд нормальних підгруп, кожний фактор якого скінченний.

Теорема 2. *Нехай* G *— група, усяка пронормальна підгрупа якої нормальна або абнормальна. Якщо група* G *— гіперскінченна, то вона майже локально нільпотентна.*

Наслідок 1. *Нехай* G *— нескінченна група, усяка пронормальна підгрупа якої нормальна або абнормальна. Якщо* G *— періодична* FC*-група, то вона локально нільпотентна.*

Група G називається *гіпоскінченною*, якщо вона має спадний ряд нормальних підгруп, кожний фактор якого скінченний.

Теорема 3. *Нехай* G *— локально скінченна група, усяка пронормальна підгрупа якої нормальна або абнормальна. Якщо група* G *гіпоскінченна, то вона майже локально нільпотентна.*

Наслідок 2. *Нехай* G *— локально скінченна група, усяка пронормальна підгрупа якої нормальна або абнормальна. Якщо група* G *фінітно апроксимуюча, то вона майже локально нільпотентна.*

Група G називається *силовськи* p*-цілісною*, p — просте число, якщо в будь-якій її підгрупі H силовські p-підгрупи спряжені (див., наприклад, [9, означення 2.3.1]).

Теорема 4. *Нехай* G *— періодична локально розв'язна група, усяка пронормальна підгрупа якої нормальна або абнормальна. Якщо група* G *силовськи* p*-цільна для будь-якого простого числа* p, *то вона майже локально нільпотентна.*

Наслідок 3. *Нехай* G *— періодична локально розв'язна група, усяка пронормальна підгрупа якої нормальна або абнормальна. Якщо силовські* p*-підгрупи* G *черніковські для будь-якого простого числа* p, *то вона майже локально нільпотентна.*

Наслідок 4. *Нехай* G *— локально скінченна група, усяка пронормальна підгрупа якої нормальна або абнормальна. Якщо силовські* p*-підгрупи* G *черніковські для будь-якого простого числа* p, *то вона майже локально нільпотентна.*

Наслідок 5. *Нехай* G *— локально скінченна група, усяка пронормальна підгрупа якої нормальна або абнормальна. Якщо силовські* p*-підгрупи* G *скінченні для будь-якого простого числа* p, *то вона майже локально нільпотентна.*

1. *Hall P.* On system normalizers of soluble groups // Proc. London Math. Soc. – 1937. – **43**. – P. 507–528.
2. *Carter R. W.* Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups // Math. Z. – 1961. – **75**. – P. 136–139.
3. *Ба М. С., Боревич З. И.* О расположении промежуточных подгрупп // Кольца и линейные группы. – Краснодар: Кубан. ун-т, 1988. – С. 14–41.
4. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Группы, в которых все подгруппы пронормальны // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 3. – С. 325–329.

5. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Локально разрешимые группы, в которых все бесконечные подгруппы пронормальны // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1987. – № 11. – С. 77–79.
6. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Новые характеризации локально нильпотентных $\overline{IH}$-групп // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 3. – С. 322–326.
7. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* Группы с пронормальными примарными подгруппами // Там же. – 1989. – **41**, № 3. – С. 323–327.
8. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* On properties of abnormal and pronormal subgroups in some infinite groups // Groups St Andrews 2005. – Vol. 2. London Math. Soc. Lecture Note Series 339. – Cambridge: Cambridge Univ. Press., 2007. – P. 597–604.
9. *Dixon M. R.* Sylow theory, formations and Fitting classes in locally finite groups. – Singapore: World Scientific, 1994. – 304 p.

Національний університет державної податкової служби України, Ірпінь

Надійшло до редакції 17.01.2011

А. А. Пыпка, Н. Н. Семко (мл.)

О бесконечных группах, имеющих только два типа пронормальных подгрупп

Пусть G — группа. Подгруппа H группы G называется пронормальной в G, если для каждого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$. Подгруппа H группы G называется абнормальной в G, если $g \in \langle H, H^g \rangle$ для всякого элемента $g \in G$. Изучены некоторые типы бесконечных групп, у которых все пронормальные подгруппы или нормальны, или абнормальны.

O. O. Pypka, M. M. Semko (jr.)

On infinite groups having only two types of pronormal subgroup

Let G be a group. A subgroup H of G is said to be pronormal if, for every element g of G, the conjugates H and H^g are already conjugate in the subgroup $\langle H, H^g \rangle$ generated by H and H^g. We study some types of infinite groups in which all pronormal subgroups are either normal or abnormal.