УДК 517

А. П. Юрачківський

Узагальнення і спрощення схеми Даніеля

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Нехай I — інтеграл (= адитивний ізотонний неперервний зверху в нулі функціонал) на адитивній підгратці F *адитивної δ-гратки* E. *Припустимо, що* F *конфінальна і монотонно щільна в* E. *Позначимо* $\mathrm{F}^{\searrow}$ *і* $\mathrm{F}^{\nearrow}$ *множини тих $x \in \mathrm{E}$, які є точною нижньою (верхньою) межею деякої спадної (відповідно зростаючої) послідовності в* F. *Продовживши I на ці множини за монотонною неперервністю, вводимо функціонали $I_*x = \sup\limits_{u \in \mathrm{F}^{\searrow},\, u \leqslant x} Iu$ та $I^*x = \inf\limits_{v \in \mathrm{F}^{\nearrow},\, v \geqslant x} Iv$ на* E. *Позначимо $\mathrm{L} = \{x \in \mathrm{E}\colon I_*x = I^*x\}$. Для $x \in \mathrm{L}$ покладаємо $Ix = I_*x$, або, рівносильно, $Ix = I^*x$. Показано, що $L = E$ і так продовжений I — інтеграл на* E.

Ядром теорії міри та інтеграла є задача продовження міри (підхід Лебега [1, 2]) або інтеграла (підхід Даніеля [1, 3]), заданих початково на вузькому класі множин (у першому випадку) або функцій (у другому). Підхід Даніеля технічно простіший, але концептуально бідніший, через що його називають схемою, а не теорією. Щоб пояснити, в чому полягає запропоноване в повідомленні узагальнення схеми Даніеля, нагадаємо і введемо ряд понять.

Зберігаюче порядок відображення однієї впорядкованої множини в іншу називають іще *ізотонним*. Підмножину X_0 впорядкованої множини X називаємо *конфінальною* (в X), якщо для всякого $x \in X$ існують $\underline{x} \in X_0$ і $\overline{x} \in X_0$ такі, що $\underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}$. Якщо впорядкована множина містить точну нижню (верхню) межу x спадної (зростаючої) послідовності (x_n) своїх елементів, то пишуть $x_n \searrow x$ (відповідно $x_n \nearrow x$). В обох цих випадках говоримо, що послідовність (x_n) *збігається до* x, і записуємо цей факт ще так: $x = \lim x_n$ (зауважимо, що ми означили збіжність тільки монотонних послідовностей). Ізотонне відображення f упорядкованої множини X в іншу впорядковану множину називається: *неперервним зверху (знизу)* в точці $x \in X$, якщо співвідношення $f(x_n) \searrow f(x)$ (відповідно $f(x_n) \nearrow f(x)$) справджується для всякої послідовності (x_n) в X такої, що $x_n \searrow x$ (відповідно $x_n \nearrow x$). Неперервне як зверху, так і знизу в деякій точці відображення назвемо *монотонно неперервним* у цій точці.

Назвемо підмножину впорядкованої множини *монотонно замкнутою*, якщо вона містить обидві точні межі всякої монотонної обмеженої послідовності своїх елементів (вимога обмеженості в цьому означенні істотна). Підмножину X_0 монотонно замкнутої впорядкованої множини X таку, що єдиною містячою X_0 монотонно замкнутою підмножиною X є сама X, назвемо *монотонно щільною* (в X).

Монотонно замкнуту гратку назвемо *δ-граткою* (це, зважаючи на вимогу обмеженості в означенні монотонної замкнутості, аналог δ-кільця, а не σ-кільця). Очевидно, δ-гратка містить обидві грані будь-якої (не обов'язково монотонної) обмеженої послідовності своїх елементів.

Адитивною граткою (адитивною δ-граткою) назвемо множину, наділену узгодженими між собою порядком, відносно якого та є граткою (δ-граткою), і комутативною груповою операцією (узгодженість означає трансляційну інваріантність порядку). Неформально адитивну гратку можна уявляти як векторну гратку з викинутими операціями множення на нецілі числа. Очевидно, якщо адитивний монотонний функціонал на адитивній гратці неперервний зверху або знизу хоча би в одній точці, то він монотонно неперервний у всіх точках.

Адитивний ізотонний монотонно неперервний функціонал на адитивній гратці називається *інтегралом.* (Для векторної гратки функцій це означення належить Лебегові).

Основним результатом даного повідомлення є

Теорема 1. *Нехай I — інтеграл на адитивній підгратці* F *адитивної δ-гратки* E. *Припустимо, що* F *конфінальна і монотонно щільна в* E. *Тоді I єдиним чином продовжується до інтеграла на* E.

Ми виведемо це твердження з низки лем і наслідків, але спершу прокоментуємо його.

У класичному варіанті схеми Даніеля F не абстрактна адитивна гратка, а стоунова векторна гратка ф у н к ц і й на деякій множині X (тобто $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}^X$), а наперед заданої гратки E немає — вона будується з F за допомогою операцій монотонного граничного переходу і віднімання, які, очевидно, не виводять з $\mathbb{R}^X$. Для того щоб вистачило одноразового граничного переходу замість трансфінітної послідовності цих дій, розглядається не поточкова збіжність, а збіжність майже скрізь. Уся схема тримається на такому факті [3]: *якщо (f_n) — монотонна послідовність в $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}^X$ така, що $\sup|If_n| < \infty$, то вона I-майже скрізь збігається до деякої $f \in \mathbb{R}^X$.* В абстрактній постановці універсальної адитивної δ-гратки на зразок $\mathbb{R}^X$ немає, тож скористатись цим фактом неможливо. Тоді й поняття збіжності майже скрізь (належно видозмінене для інтеграла на абстрактній гратці) стає безкорисним. Можна спробувати вийти зі становища, вкладаючи абстрактну адитивну δ-гратку в $\mathbb{R}^X$, але такий догматичний підхід не дуже природний і технічно себе не виправдовує. Основною концептуальною новацією даного повідомлення є спосіб продовження інтеграла без використання збіжності майже скрізь і притому без технічних ускладнень на зразок трансфінітної індукції. Побудова продовженого інтеграла складається з двох етапів, із яких перший у загальних рисах такий же, як у класичній схемі Даніеля (а технічно відрізняється тим, що замість монотонної збіжності майже скрізь використовується означена вище монотонна порядкова збіжність). Що ж до другого етапу, то він скоріше нагадує Лебегів спосіб продовження міри, але це схожість на рівні асоціацій — функціонали I^* та I_*, які будуть нашим інструментом, не є прямими аналогами зовнішньої та внутрішньої мір. Самé означення цих функціоналів — рівність (3) — пояснює ідею побудови продовження краще за будь-які слова.

Приступаючи до доведення теореми, почнемо з очевидного твердження.

Лема 1. *Нехай (x_n) і (y_n) — збіжні монотонні послідовності в упорядкованій множині. Припустимо, що $x_n \leqslant y_n$ при всіх n. Тоді $\lim x_n \leqslant \lim y_n$.*

Нижченаведене твердження — окремий випадок реченця[1] XII.2.6 [4].

Лема 2. *В адитивній гратці співвідношення $x_n \searrow x$, $y_n \searrow y$ зумовлюють $x_n+y_n \searrow x+y$, $x_n \wedge y_n \searrow x \wedge y$, $x_n \vee y_n \searrow x \vee y$; співвідношення $x_n \nearrow x$, $y_n \nearrow y$ тягнуть за собою $x_n + y_n \nearrow x + y$, $x_n \wedge y_n \nearrow x \wedge y$, $x_n \vee y_n \nearrow x \vee y$; співвідношення $x_n \searrow x$ і $-x_n \nearrow -x$ рівносильні.*

Для довільної підмножини A впорядкованої множини X означимо $A^{\searrow}$ (відповідно $A^{\nearrow}$) як множину тих $x \in X$, для яких існує послідовність $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ така, що $x_n \searrow x$ (відповідно $x_n \nearrow x$).

[1] Так я перекладаю слово proposition як назву твердження, проміжного між лемою і теоремою.

Наслідок 1 (з леми 2). *Нехай* G — *впорядкована комутативна напівгрупа. Тоді для будь-яких* A, $B \subset$ G $A^{\searrow} + B^{\searrow} \subset (A+B)^{\searrow}$, $A^{\nearrow} + B^{\nearrow} \subset (A+B)^{\nearrow}$. *Якщо ж понад те* G *група, то* $(-A)^{\nearrow} = -(A^{\searrow})$, $(-A)^{\searrow} = -(A^{\nearrow})$ *для всіх* $A \subset$ G.

Наслідок 2. *Нехай* K — *підгрупа впорядкованої комутативної напівгрупи. Тоді:* $\mathrm{K}^{\searrow}$ *і* $\mathrm{K}^{\nearrow}$ *напівгрупи;* $\mathrm{K}^{\nearrow} = -\mathrm{K}^{\searrow}$, $\mathrm{K}^{\searrow} = -\mathrm{K}^{\nearrow}$.

Скрізь нижче E і F такі, як у теоремі 1; x_+ означає $x \vee 0$.

Лема 3. *Нехай* I — *інтеграл на* F, *а* (u_n), (v_n) — *монотонні збіжні послідовності в* F *такі, що* $\lim u_n \leqslant \lim v_n$. *Тоді* $\lim Iu_n \leqslant \lim Iv_n$. *Зокрема, якщо* $\lim u_n = \lim v_n$, *то* $\lim Iu_n = \lim Iv_n$.

Доведення. Нехай спершу $u_n \searrow x$, $v_n \nearrow y \geqslant x$. Тоді за лемою 2 $u_n - v_n \searrow x - y$, $(u_n - v_n)_+ \searrow (x-y)_+ (=0)$, звідки внаслідок монотонної неперервності інтеграла $I(u_n - - v_n)_+ \searrow 0$, відтак за іншими двома (з трьох) властивостями інтеграла $\overline{\lim}(Iu_n - Iv_n) \leqslant 0$, що, очевидно, приводить до потрібного висновку.

Нехай тепер $u_n \nearrow x$, $v_n \nearrow y \geqslant x$. Тоді за вже доведеним $Iu_k \leqslant \lim Iv_n$ при всіх k. Залишається спрямувати k до нескінченності.

Якщо ж $u_n \searrow x$, $v_n \searrow y \geqslant x$, то записавши $-v_n \nearrow -y$, $-u_n \nearrow -x \geqslant -y$, зводимо цей випадок до попереднього.

Наостанок, випадок $u_n \nearrow x$, $v_n \searrow y \geqslant x$ тривіальний.

Нижче $\widetilde{\mathrm{F}}$ означає $\mathrm{F}^{\nearrow} \bigcup \mathrm{F}^{\searrow}$. Продовжимо I на $\widetilde{\mathrm{F}}$, поклавши для всякого $x \in \widetilde{\mathrm{F}}$ $Ix = = \lim Iu_n$, де (u_n) — довільна збіжна до x монотонна послідовність в F (лема 3 стверджує, що значення Ix не залежить від вибору послідовності (u_n) із зазначеними властивостями). Відтепер і до останньої леми під I розуміємо щойно побудоване продовження. Область визначення його не є ні групою, ані граткою, але наслідок 2 стверджує, що $\mathrm{F}^{\nearrow}$ і $\mathrm{F}^{\searrow}$ напівгрупи, раз F, за припущенням, група.

Наслідок 3 (з леми 3). *I ізотонний.*

Лема 4. *I адитивний на* $\mathrm{F}^{\nearrow}$ *і на* $\mathrm{F}^{\searrow}$.

Доведення. Це випливає безпосередньо із способу продовження і з леми 2.

Лема 5. *Для будь-якого* $x \in \widetilde{\mathrm{F}}$ $I(-x) = -Ix$.

Доведення. За лемою 2 співвідношення $u_n \nearrow x$ і $-u_n \searrow -x$ рівносильні. Якщо при цьому $u_n \in$ F, то за побудовою продовження $Ix = \lim Iu_n$, $I(-x) = \lim I(-u_n)$ і за вибором u_n $I(-u_n) = -Iu_n$.

Лема 6. *Нехай* (x_n) — *зростаюча послідовність в* $\mathrm{F}^{\nearrow}$ *(спадна послідовність в* $\mathrm{F}^{\searrow}$*), збіжна до деякого* $x \in$ E. *Тоді:*

1) $x \in \mathrm{F}^{\nearrow}$ *(відповідно* $x \in \mathrm{F}^{\searrow}$*);*

2) $Ix = \lim Ix_n$.

Доведення. Нехай $x_n \in \mathrm{F}^{\nearrow}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді для кожного n існує зростаюча послідовність $(u_{nk}, k \in \mathbb{N}) \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ така, що

$$u_{nk} \nearrow x_n \qquad \text{при} \qquad k \to \infty. \tag{1}$$

Позначимо $u_k = u_{1k} \vee \cdots \vee u_{kk}$. Тоді (u_k) — зростаюча послідовність в F, тож існує $y \in \in \mathrm{F}^{\nearrow}$ такий, що $u_k \nearrow y$. За побудовою $u_k \geqslant u_{nk}$ при $k \geqslant n$, що спільно з попереднім співвідношенням і (1) дає $y \geqslant x_n$. Нехай далі $x_n \nearrow x$. Тоді, по-перше, $y \geqslant x$ за лемою 1 і, по-друге, $u_{ik} \leqslant x_i \leqslant x_k$ при $i \leqslant k$, так що за тією ж лемою $u_k \leqslant x_k$. З останньої нерівності і співвідношень $u_k \nearrow y$, $x_k \nearrow x$ маємо за лемою 1 $y \leqslant x$. Отже, $y = x$ і, таким чином, $u_k \nearrow x$, $Iu_k \nearrow Ix$. При цьому $u_k \leqslant x_k \leqslant x$, так що $Iu_k \leqslant Ix_k \leqslant Ix$.

Для $x_n \in \mathrm{F}^{\searrow}$, $x_n \searrow x$ міркування аналогічні.

Нехай Н — конфінальна підмножина деякої впорядкованої множини, J — ізотонний функціонал на Н, а функціонали $J_*{}^{\mathrm{H}}$, $J^*{}_{\mathrm{H}}$ на всій множині задаються рівностями

$$J_*{}^{\mathrm{H}}x = \sup_{u\in\mathrm{H},\, u\leqslant x} Ju, \qquad J^*{}_{\mathrm{H}}x = \inf_{v\in\mathrm{H},\, v\geqslant x} Jv,$$

праві частини яких скінченні внаслідок ізотонності J і конфінальності Н. Безпосередньо з означення цих функціоналів випливає

Лема 7. *Функціонали* $J_*{}^{\mathrm{H}}$ *і* $J^*{}_{\mathrm{H}}$ *ізотонні.*

У наведених нижче трьох лемах Н — конфінальна піднапівгрупа впорядкованої комутативної напівгрупи G, а J — ізотонний функціонал на Н.

Лема 8. *Нехай для всіх* u, $v \in \mathrm{H}$ $J(u+v) \geqslant Ju + Jv$. *Тоді для всіх* x, $y \in G$

$$J_*{}^{\mathrm{H}}(x+y) \geqslant J_*{}^{\mathrm{H}}x + J_*{}^{\mathrm{H}}y.$$

Доведення. Достатньо написати

$$\sup_{w\leqslant x+y} Jw \geqslant \sup_{u\leqslant x,\, v\leqslant y} J(u+v), \qquad \sup_{u\leqslant x,\, v\leqslant y} (Ju + Jv) = \sup_{u\leqslant x} Ju + \sup_{v\leqslant y} Jv,$$

де w, u, v беруться з H.

Так само доводиться таке твердження.

Лема 9. *Нехай для всіх* u, $v \in \mathrm{H}$ $J(u+v) \leqslant Ju + Jv$. *Тоді для всіх* $x, y \in \mathrm{G}$

$$J^*{}_{\mathrm{H}}(x+y) \leqslant J^*{}_{\mathrm{H}}x + J^*{}_{\mathrm{H}}y.$$

Лема 10. *За умов леми 9 для будь-яких* $n \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{G}$

$$J^*{}_{\mathrm{H}}(y_1 \vee \cdots \vee y_n) \leqslant J^*{}_{\mathrm{H}}y_1 + \sum_{k=2}^{n} J^*{}_{\mathrm{H}}(y_k - y_{k-1})_+. \tag{2}$$

Доведення. Позначимо $z_k = y_1 \vee \cdots \vee y_k$. Тоді $z_k = z_{k-1} \vee y_k = z_{k-1} + (y_k - z_{k-1})_+$, звідки за лемою 9

$$J^*{}_{\mathrm{H}}z_k \leqslant J^*{}_{\mathrm{H}}z_{k-1} + J^*{}_{\mathrm{H}}(y_k - z_{k-1})_+.$$

Але $y_k - z_{k-1} \leqslant y_k - y_{k-1}$, тому за лемою 7 $J^*{}_{\mathrm{H}}(y_k - z_{k-1})_+ \leqslant J^*{}_{\mathrm{H}}(y_k - y_{k-1})_+$. Отже, $J^*{}_{\mathrm{H}}z_k - J^*{}_{\mathrm{H}}z_{k-1} \leqslant J^*{}_{\mathrm{H}}(y_k - y_{k-1})_+$. Просумувавши цю нерівність по k від 2 до n і взявши до уваги, що $z_1 = y_1$, одержимо (2).

Замість $I_*^{\mathrm{F}^{\searrow}}$, $I^*_{\mathrm{F}^{\nearrow}}$ пишемо I_*, I^*. Отже, за означенням

$$I_*x = \sup_{u\in\mathrm{F}^{\searrow},\, u\leqslant x} Iu, \qquad I^*x = \inf_{v\in\mathrm{F}^{\nearrow},\, v\geqslant x} Iv. \tag{3}$$

Лема 11. *За умов леми 9 для всякого* $x \in \mathrm{E}$ $I_*x \leqslant I^*x$.

Доведення. Для будь-яких u, $v \in \widetilde{\mathrm{F}}$ таких, що $u \leqslant x \leqslant v$, маємо за наслідком 3 $Iu \leqslant Iv$, після чого потрібний висновок випливає з (3).

Застосувавши лему 7 до $J = I$ та $\mathrm{H} = \mathrm{F}^{\searrow}$ або $\mathrm{H} = \mathrm{F}^{\nearrow}$ (наслідок 3 дозволяє це зробити), дістанемо

Наслідок 4. *Функціонали* I_* *та* I^* *ізотонні.*

Наслідок 5 (із наслідку 3 і лем 4, 8, 9, 11). *Для будь-яких* $x, y \in \mathrm{E}$

$$I_*x + I_*y \leqslant I_*(x+y) \leqslant I^*(x+y) \leqslant I^*x + I^*y.$$

Наслідок 6 (із наслідку 5). *Нехай* $x, y \in \mathrm{E}$, $I_*x = I^*x$, $I_*y = I^*y$. *Тоді*

$$I_*x + I_*y = I_*(x+y) = I^*(x+y) = I^*x + I^*y.$$

Лема 12. *Для всякого* $x \in \mathrm{E}$ $\ I_*(-x) = -I^*x$, $I^*(-x) = -I_*x$.

Доведення. Згідно з (3)

$$I_*(-x) = \sup_{u \in \mathrm{F}^{\searrow},\, -u \geqslant -x} Iu \equiv \sup_{v \in -\mathrm{F}^{\searrow},\, v \geqslant -x} I(-v).$$

Звідси, зауваживши, що за наслідком 2 $-\mathrm{F}^{\searrow} = \mathrm{F}^{\nearrow}$, а за лемою 5 $I(-v) = -Iv$ при $v \in \mathrm{F}^{\nearrow}$, одержуємо $I_*(-x) = \sup\limits_{v \in \mathrm{F}^{\nearrow},\, v \geqslant -x} (-Iv)$, що спільно з (3) доводить першу з двох стверджуваних рівностей. Друга доводиться так само.

Безпосередньо з (3) випливає

Лема 13. *Для всякого* $x \in \mathrm{F}^{\nearrow}$ $I^*x = Ix$; *для всякого* $x \in \mathrm{F}^{\searrow}$ $I_*x = Ix$. *Зокрема, для всіх* $x \in \mathrm{F}$

$$I_*x = Ix = I^*x. \tag{4}$$

Лема 14. *Рівності* (4) *мають місце для всіх* $x \in \widetilde{\mathrm{F}}$.

Доведення. Нехай $x \in \mathrm{F}^{\nearrow}$, тобто існує послідовність $(u_n) \in \mathrm{F}^{\mathbb{N}}$ така, що $u_n \nearrow x$. Тоді $Iu_n \nearrow Ix$. За наслідком 4 $I_*x \geqslant I_*u_n$; за лемою 13 $I_*u_n = Iu_n$. Тому $I_*x \geqslant Ix$. Звідси, зауваживши, що $Ix = I^*x$ за лемою 13, одержуємо $I_*x \geqslant I^*x$. За лемою 11 має місце і зворотна нерівність. Цим рівність (4) доведено для $x \in \mathrm{F}^{\nearrow}$. Для $x \in \mathrm{F}^{\searrow}$ міркування аналогічні.

Позначимо $\mathrm{L} = \{x \in \mathrm{E} \colon I_*x = I^*x\}$.

Наслідок 7 (із леми 12). *Нехай* $x \in \mathrm{L}$. *Тоді* $-x \in \mathrm{L}$.

Наслідок 8 (із леми 14). $\widetilde{\mathrm{F}} \subset \mathrm{L}$.

Наслідок 9 (із наслідків 6 і 7). L *група, а функціонал* I_* *адитивний на* L *(або, що те саме,* I^* *адитивний на* L*).*

Лема 15. *Нехай* (x_n) — *монотонна збіжна послідовність в* L. *Тоді:* $\lim x_n \in \mathrm{L}$;

$$I^* \lim x_n = \lim I^*x_n. \tag{5}$$

Зауваження 1. За вибором послідовності (x_n) і згідно з першим твердженням леми рівність (5) рівносильна такій: $I_* \lim x_n = \lim I_*x_n$.

Доведення. Нехай $x_n \nearrow x$ і

$$I_*x_n = I^*x_n. \tag{6}$$

Фіксуємо $\varepsilon > 0$ і для кожного $k \in \mathbb{N}$ беремо існуючий за означенням I^* елемент $v_k^{\varepsilon} \in \mathrm{F}^{\nearrow}$ такий, що

$$v_k^{\varepsilon} \geqslant x_k, \tag{7}$$

$$Iv_k^\varepsilon < I^* x_k + 2^{-k}\varepsilon. \tag{8}$$

Конфінальність F дозволяє без обмеження загальності вважати, що послідовність (v_k^ε) обмежена зверху (інакше візьмемо довільний $t \in \mathrm{F}$ такий, що $t \geqslant x$, і замінимо v_k^ε на $v_k^\varepsilon \wedge t$).

Позначимо $w_n^\varepsilon = v_1^\varepsilon \vee \cdots \vee v_n^\varepsilon (\in \mathrm{F}^\nearrow$ за побудовою). За лемами 14 і 10

$$Iw_n^\varepsilon = I^* w_n^\varepsilon \leqslant I^* v_1^\varepsilon + \sum_{k=2}^{n} I^*(v_k^\varepsilon - v_{k-1}^\varepsilon)_+. \tag{9}$$

За лемою 14

$$I^* v_k^\varepsilon = I v_k^\varepsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Із (7) маємо за лемою 7

$$I^*(v_k^\varepsilon - v_{k-1}^\varepsilon)_+ \leqslant I^*(v_k^\varepsilon - x_{k-1})_+.$$

Але $v_k^\varepsilon - x_{k-1} \geqslant v_k^\varepsilon - x_k \geqslant 0$, тож

$$I^*(v_k^\varepsilon - x_{k-1})_+ = I^*(v_k^\varepsilon - x_{k-1}). \tag{11}$$

При цьому $v_k^\varepsilon \in \mathrm{L}$ за наслідком 8. Так само, зважаючи на (6), $x_k \in \mathrm{L}$. Тоді за наслідком 9 $v_k^\varepsilon - x_k \in \mathrm{L}$ та $I^*(v_k^\varepsilon - x_{k-1}) = I^* v_k^\varepsilon - I^* x_{k-1}$, що спільно з (9)–(11) спричинюється до

$$Iw_n^\varepsilon \leqslant Iv_1^\varepsilon + \sum_{k=2}^{n} (Iv_k^\varepsilon - I^* x_{k-1}).$$

При цьому внаслідок (8) $-I^* x_{k-1} < 2^{-(k-1)}\varepsilon - Iv_{k-1}^\varepsilon$. Отже, $Iw_n^\varepsilon < Iv_n^\varepsilon + \varepsilon \sum\limits_{k=2}^{n} 2^{-k}$, що разом із (8) дає

$$Iw_n^\varepsilon < I^* x_n + \varepsilon. \tag{12}$$

За побудовою $w_n^\varepsilon \in \mathrm{F}^\nearrow$, послідовність (w_n^ε) зростає і обмежена зверху. Тому існує $w^\varepsilon \in \mathrm{E}$ такий, що $w_n^\varepsilon \nearrow w^\varepsilon$. За лемою 6 $w^\varepsilon \in \mathrm{F}^\nearrow$ і

$$Iw_n^\varepsilon \nearrow Iw^\varepsilon. \tag{13}$$

Оскільки $x_n \leqslant v_n^\varepsilon \leqslant w_n^\varepsilon$ і $x_n \nearrow x$, то лема 1 стверджує, що $x \leqslant w^\varepsilon$, звідки за наслідком 4 $I^* x \leqslant I^* w^\varepsilon$. Але $I^* w^\varepsilon = Iw^\varepsilon$ за лемою 14. Таким чином,

$$I^* x \leqslant Iw^\varepsilon. \tag{14}$$

Для кожного n беремо існуючий за означенням функціонала I_* елемент $u_n \in \mathrm{F}^\searrow$ такий, що $u_n \leqslant x_n$ і

$$Iu_n > I_* x_n - 2^{-n}. \tag{15}$$

Оскільки $u_n \leqslant x_n \leqslant w_n^\varepsilon$, то за наслідком 3

$$Iu_n \leqslant Iw_n^\varepsilon, \tag{16}$$

що разом із (12) і (15) дає

$$I_*x_n - 2^{-n} < Iu_n \leqslant Iw_n^\varepsilon < I^*x_n + \varepsilon.$$

Звідси з урахуванням (6) і (16) маємо $0 \leqslant Iw_n^\varepsilon - Iu_n < \varepsilon + 2^{-n}$. Це разом із (13) показує, що $Iw^\varepsilon \leqslant \lim Iu_n + \varepsilon$, відтак унаслідок (14)

$$I^*x \leqslant \lim Iu_n + \varepsilon. \tag{17}$$

З іншого боку, з нерівностей $u_n \leqslant x_n \leqslant x$ маємо за наслідком 4 $I_*u_n \leqslant I_*x_n \leqslant I_*x$. Крім того, за вибором u_n і лемою 14 $I_*u_n = Iu_n$. Отже, $\lim Iu_n \leqslant \lim I_*x_n \leqslant I_*x$. Порівнявши це із (17), бачимо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ $I^*x \leqslant \lim I_*x_n \leqslant I_*x + \varepsilon$. Звідси і з (6) одержуємо за лемою 11

$$I^*x = \lim I^*x_n = \lim I_*x_n = I_*x.$$

Цим лему доведено для зростаючих послідовностей. Такі ж міркування застосовні й до спадних послідовностей (а ще можна звести другий випадок до першого, замінивши x_n, x на $-x_n$, $-x$ і скориставшись лемами 2 і 12).

Доведення теореми 1. Для $x \in \mathrm{L}$ покладаємо $Ix = I_*x$ ($= I^*x$ за вибором x). Лема 14 стверджує, що так заданий функціонал I на L є продовженням так само позначуваного функціонала, визначеного до того тільки на $\widetilde{\mathrm{F}}$ (а спочатку тільки на F). За побудовою $\mathrm{F} \subset \mathrm{L} \subset \mathrm{E}$, а за лемою 15 множина L монотонно замкнута. Звідси за припущенням монотонної щільності F маємо $\mathrm{L} = \mathrm{E}$. Функціонал I ізотонний за наслідком 4, адитивний за наслідком 9 і монотонно неперервний за лемою 15, а значить є інтегралом на E.

Якщо I_1 і I_2 інтеграли на E, то множина $\{x \in \mathrm{E} : I_1x = I_2x\}$, очевидно, монотонно замкнута. Тому всякий інтеграл, заданий початково на монотонно щільній адитивній гратці $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, допускає не більше одного продовження на E.

1. *Богачев В. И.* Основы теории меры. В 2 т. – Москва, Ижевск: РХД, 2006. – Т. 1. – 584 с., Т. 2. – 680 с.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1989. – 624 с.
3. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – Москва: Мир, 1979. – 588 с.
4. *Иосида К.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1967. – 624 с.

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 15.06.2011

А. П. Юрачковский

Обобщение и упрощение схемы Даниэля

Пусть I — интеграл (= аддитивный изотонный непрерывный сверху в нуле функционал) на аддитивной подрешетке F *аддитивной δ-решетки* E. *Предположим, что* F *конфинальна и монотонно плотна в* E. *Обозначим $\mathrm{F}^{\searrow}$ и $\mathrm{F}^{\nearrow}$ множества тех $x \in \mathrm{E}$, которые являются точной нижней (верхней) границей некоторой убывающей (соответственно возрастающей) последовательности в* F. *Продолжив I на эти множества по монотонной непрерывности, вводим функционалы $I_*x = \sup\limits_{u \in \mathrm{F}^{\searrow},\, u \leqslant x} Iu$ и $I^*x = \inf\limits_{v \in \mathrm{F}^{\nearrow},\, v \geqslant x} Iv$ на* E. *Обозначим $\mathrm{L} = \{x \in \mathrm{E}\colon I_*x = I^*x\}$. Для $x \in \mathrm{L}$ полагаем $Ix = I_*x$, или, равносильно, $Ix = I^*x$. Показано, что $L = E$ и так продолженный I — интеграл на* E.

A. P. Yurachkivsky

The Daniell scheme generalized and simplified

Let I be an integral (= additive isotonic upper continuous at zero functional) on the additive sublattice E *of an additive δ-lattice* E. *Suppose that* F *is cofinal and monotonically dense in* E. *Denote by* $\mathrm{F}^{\searrow}$ *and* $\mathrm{F}^{\nearrow}$ *the sets of those $x \in \mathrm{E}$ which are the greatest lower (respectively: least upper) bound of some decreasing (respectively: increasing) sequence in* F. *First, we extend I to these sets by monotonic continuity and then introduce the functionals* $I_*x = \sup\limits_{u\in \mathrm{F}^{\searrow},\, u\leqslant x} Iu$ *and* $I^*x = \inf\limits_{v\in \mathrm{F}^{\nearrow},\, v\geqslant x} Iv$ *on* E. *Denote* $\mathrm{L} = \{x \in \mathrm{E}\colon I_*x = I^*x\}$. *For $x \in \mathrm{L}$, we set $Ix = I_*x$ or, equivalently, $Ix = I^*x$. It is shown that $L = E$ and the thus extended I is an integral on* E.