

Д. М. Ли́ла

О потере несущей способности вращающихся упруго-пластических дисков

(Представлено академиком НАН Украины А. А. Мартынюком)

Уточнен и развит способ расчета методом малого параметра возможной потери несущей способности плоского вращающегося диска. Получено в первом приближении характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны.

Анализ методов изучения неустойчивости вследствие исчерпания несущей способности быстро вращающихся упруго-пластических дисков приведен в работе [1]. Предложенный критерий определения допустимой угловой скорости вращения подтвержден методом конечных элементов. Отказ от привлечения теории малых деформаций оставляет в стороне одни из первых аналитических результатов [2, 3] по определению критической угловой скорости. Ниже излагается основанный на методе возмущений [3–6] способ определения критической скорости вращения однородного и изотропного плоского кругового диска при произвольном коэффициенте Пуассона. Обсуждается вопрос приложения результатов к исследованию динамики возмущений.

Постановка задачи. Рассмотрим потерю несущей способности вращающегося сплошного диска вследствие достижения пластической зоной его границы. Диск будем считать по форме близким к круговому. Уравнение границы диска с точностью до бесконечно малых первого порядка представим в виде

$$r = b + d \cos n\theta, \quad n \geq 2, \quad d = \text{const},$$

или

$$\rho = 1 + \delta \cos n\theta, \tag{1}$$

где b — радиус контурной окружности; $\rho = r/b$ — безразмерный текущий радиус; δ — малый параметр, $n \in \mathbb{N}$; θ — полярный угол (рис. 1). Предел текучести обозначим σ_s , плотность — γ , коэффициент Пуассона — ν , угловую скорость вращения — ω , текущий радиус пластической зоны невозмущенного диска — r_0 . Требуется для описываемой зависимостью (1) формы границы диска получить в первом приближении характеристическое уравнение с параметром δ для критического радиуса пластической зоны r_0^* и определить соответствующую величину критической угловой скорости вращения ω^* .

Получение характеристического уравнения. Возмущенное состояние, приводящее к потере несущей способности вращающегося диска по данному сценарию, можно считать инициированным малыми возмущениями, вид которых определен решениями соответствующих линеаризованных дифференциальных уравнений для неподвижной упругой кольцевой

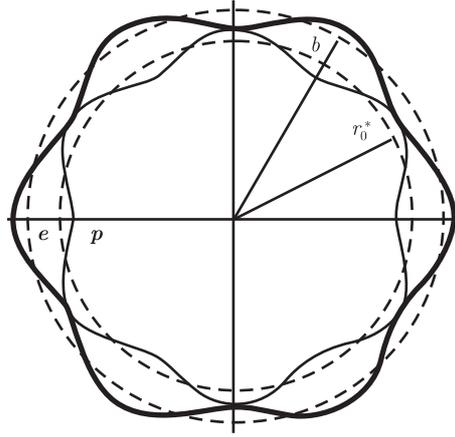


Рис. 1. Потеря несущей способности сплошного диска по самоуравновешивающейся форме

пластины, нагруженной периодическими по θ усилиями на контуре. В общем виде уравнениям для возмущений можно удовлетворить, если считать, что

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^{Ie} &= (nA\rho^{n-2} + nB\rho^{-n-2} + (n-2)C\rho^n + (n+2)D\rho^{-n}) \cos n\theta, \\ \sigma_{\theta\theta}^{Ie} &= (-nA\rho^{n-2} - nB\rho^{-n-2} - (n+2)C\rho^n - (n-2)D\rho^{-n}) \cos n\theta, \\ \sigma_{\rho\theta}^{Ie} &= (-nA\rho^{n-2} + nB\rho^{-n-2} - nC\rho^n + nD\rho^{-n}) \sin n\theta,\end{aligned}\quad (2)$$

где $\sigma_{\rho\rho}^{Ie}$, $\sigma_{\theta\theta}^{Ie}$ и $\sigma_{\rho\theta}^{Ie}$ — возмущения первого порядка малости соответствующих компонент напряжения, отнесенные к σ_s .

Функции (2) должны при этом удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_{\rho\rho}^{Ie} + A_1 u^{Ie} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \quad (3)$$

$$\sigma_{\rho\theta}^{Ie} - A_2 \frac{du^{Ie}}{d\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1, \quad (4)$$

где

$$A_1 = \frac{d\sigma_{\rho\rho}^{0e}(1)}{d\rho} = \frac{2(3\nu+1)\beta_0^4 - 6(\nu+3)}{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2}, \quad \beta_0 = \frac{r_0}{b},$$

$$A_2 = \sigma_{\theta\theta}^{0e}(1) - \sigma_{\rho\rho}^{0e}(1) = \frac{2(3\nu+1)\beta_0^4 + 6(1-\nu)}{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2},$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{0e} = c \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{\nu+3}{8} \frac{\omega^2}{q^2} (1 - \rho^2), \quad \sigma_{\theta\theta}^{0e} = c \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{1}{8} \frac{\omega^2}{q^2} (\nu+3 - (3\nu+1)\rho^2),$$

$$c = \frac{(3\nu+1)\beta_0^4}{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2}, \quad \frac{\omega^2}{q^2} = \frac{24}{3(\nu+3) - (3\nu+1)(2-\beta_0^2)\beta_0^2}, \quad q = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\sigma_s}{\gamma}},$$

и условиям сопряжения

$$\sigma_{\rho\theta}^{Ie} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \beta_0, \quad (5)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{Ie} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \beta_0, \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{Ie} + A_3 u^{Ie} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \beta_0, \quad (7)$$

где

$$A_3 = \frac{d\sigma_{\theta\theta}^{0e}(\beta_0)}{d\rho} = -\frac{8(3\nu + 1)\beta_0}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2},$$

u^{Ie} — отнесенное к b возмущение радиального смещения в первом приближении.

Удовлетворение функциями (2) условиям (3)–(7) с учетом равенств $u^{Ie}(1) = \cos n\theta$, $du^{Ie}(1)/d\theta = -n \sin n\theta$ приводит к системе линейных уравнений относительно A , B , C , D и $u^{Ie}(\beta_0)$

$$\begin{aligned} nA + nB + (n - 2)C + (n + 2)D &= -A_1, \\ -A + B - C + D &= -A_2, \\ n\beta_0^{n-2}A + n\beta_0^{-n-2}B + (n - 2)\beta_0^n C + (n + 2)\beta_0^{-n}D &= 0, \\ -\beta_0^{n-2}A + \beta_0^{-n-2}B - \beta_0^n C + \beta_0^{-n}D &= 0, \\ (-n\beta_0^{n-2}A - n\beta_0^{-n-2}B - (n + 2)\beta_0^n C - (n - 2)\beta_0^{-n}D) \cos n\theta + A_3 u^{Ie}(\beta_0) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Решение системы (8) имеет вид

$$\begin{aligned} A &= \frac{A_1\{n\beta_0^2 - \beta_0^{-2n} - (n - 1)\} - A_2\{n^2\beta_0^2 + (n - 2)\beta_0^{-2n} - (n - 1)(n + 2)\}}{2N}, \\ B &= \frac{A_1\{n\beta_0^2 + \beta_0^{2n} - (n + 1)\} - A_2\{-n^2\beta_0^2 + (n + 2)\beta_0^{2n} + (n + 1)(n - 2)\}}{2N}, \\ C &= \frac{A_1\{n\beta_0^{-2} + \beta_0^{-2n} - (n + 1)\} - A_2n\{(n + 2)\beta_0^{-2} - \beta_0^{-2n} - (n + 1)\}}{2N}, \\ D &= \frac{A_1\{n\beta_0^{-2} - \beta_0^{2n} - (n - 1)\} - A_2n\{-(n - 2)\beta_0^{-2} - \beta_0^{2n} + (n - 1)\}}{2N}, \\ u^{Ie}(\beta_0) &= U(\beta_0) \cos n\theta, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} U(\beta_0) &= -2n(LA_1 + MA_2)(NA_3)^{-1}, \quad N = 2(n^2 - 1) - n^2(\beta_0^2 + \beta_0^{-2}) + (\beta_0^{2n} + \beta_0^{-2n}), \\ L &= \beta_0^n - \beta_0^{-n} - \beta_0^{n-2} + \beta_0^{-n-2}, \quad M = -n\beta_0^n - n\beta_0^{-n} + (n + 2)\beta_0^{n-2} + (n - 2)\beta_0^{-n-2}. \end{aligned}$$

Выбирая при фиксированном n значение радиуса пластической зоны круглого диска из подмножества $[\tilde{\beta}_0, 1]$ решений неравенства $U(\beta_0) \leq 0$ (при $\delta \geq 0$), получаем для β_0^* характеристическое уравнение

$$1 + \delta \cos n\theta = \beta_0 + \delta u^{Ie}(\beta_0) \quad \text{при} \quad \theta = \frac{\pi}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

или

$$1 - \beta_0 - \delta(1 - U(\beta_0)) = 0. \quad (10)$$

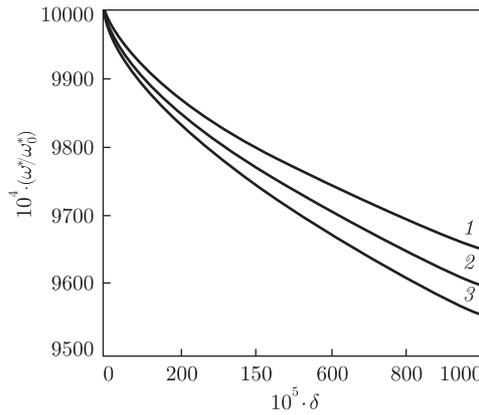


Рис. 2. Критическая относительная угловая скорость в зависимости от δ при $n = 2$: 1 — случай $\nu = 0,1$; 2 — случай $\nu = 0,3$; 3 — случай $\nu = 0,5$

Соответствующая критическому значению радиуса β_0^* угловая скорость вращения ω^* определяется по формуле

$$\omega^{*2} = q^2 \frac{24}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^{*2})\beta_0^{*2}}. \quad (11)$$

Согласно (9), в случае $n = 2$

$$U(\beta_0) = -\frac{(1 + \beta_0^2)[3(\nu + 3) - (3\nu + 1)\beta_0^4] + 2\beta_0^2[3(1 - \nu) + (3\nu + 1)\beta_0^4]}{(3\nu + 1)(1 - \beta_0^2)^2\beta_0}$$

(ср. с [2]). Зависимость относительной критической угловой скорости ω^*/ω_0^* (ω_0^* — угловая скорость, при которой теряет несущую способность круглый диск) от δ при $n = 2$ и различных значениях ν приведена на рис. 2.

В случае исчерпания несущей способности кольцевым диском, испытывающим на внутреннем контуре радиусом a давление $P = \frac{1}{3}\gamma\omega^2 \frac{b^3 - a^3}{a}$ со стороны вращающегося вала, уравнение (10) можем получить таким же способом в таком же общем виде, считая, что

$$A_1 = \frac{2((3\nu + 1)\beta_0^4 - 3(\nu + 3)) - 8\beta^3\beta_0 + 3\beta\beta_0^{-1}((3\nu + 1)\beta_0^4 - 2(\nu + 3)\beta_0^2 - (\nu + 3))\xi(\beta_0)}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2 - 4\beta^3\beta_0^{-1}(1 + \beta_0^2)},$$

$$A_2 = \frac{2((3\nu + 1)\beta_0^4 + 3(1 - \nu)) - 8\beta^3\beta_0 + 3\beta\beta_0^{-1}((3\nu + 1)\beta_0^4 - 2(\nu + 1)\beta_0^2 + (1 - \nu))\xi(\beta_0)}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2 - 4\beta^3\beta_0^{-1}(1 + \beta_0^2)},$$

$$A_3 = \frac{-8(3\nu + 1)\beta_0 + 8\beta^3\beta_0^{-2} + 3\beta((\nu + 3)\beta_0^{-2} - (3\nu + 1)(2 + \beta_0^2))\xi(\beta_0)}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2 - 4\beta^3\beta_0^{-1}(1 + \beta_0^2)},$$

$$\xi(\beta_0) = -\frac{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2 - 8\beta^{-1}(\beta^3 - 1) - 4\beta^3\beta_0^{-1}(1 + \beta_0^2)}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^2)\beta_0^2 - 4\beta^{-1}(2\beta^3 - 1)(1 + \beta_0^2)},$$

где $\beta = a/b$ (в частном случае $P = 0$ $\xi \equiv -1$). При этом

$$\omega^{*2} = q^2 \frac{24 + 12\beta\beta_0^{*-1}(1 + \beta_0^{*2})\xi(\beta_0^*)}{3(\nu + 3) - (3\nu + 1)(2 - \beta_0^{*2})\beta_0^{*2} - 4\beta^3\beta_0^{*-1}(1 + \beta_0^{*2})}.$$

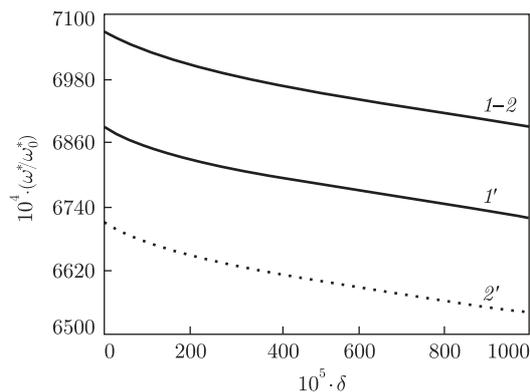


Рис. 3. Критическая относительная угловая скорость в зависимости от δ при $n = 2, \nu = 0,5$: 1 и $1'$ — случай $\beta = 0,05$; 2 и $2'$ — случай $\beta = 0,1$

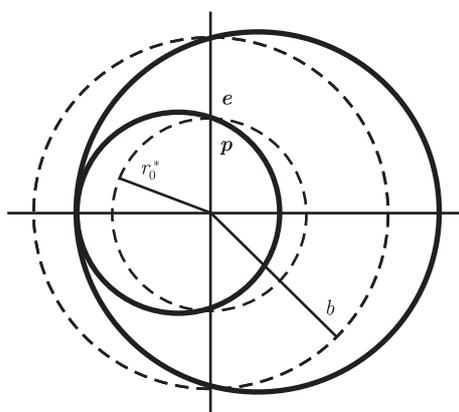


Рис. 4. Потеря несущей способности сплошного диска по эксцентричной форме

Зависимость относительной критической угловой скорости от δ при $n = 2, \nu = 0,5$ и различных значениях β для случая $P \neq 0$ приведена на рис. 3. Здесь характерная скорость ω_0^* — это угловая скорость, при которой теряет несущую способность круглый диск с таким же радиусом, как и внешний радиус кольцевого диска (кривые $1'$ и $2'$), а также угловая скорость, при которой теряет несущую способность исследуемый круговой кольцевой диск ($\delta = 0$) при $P = 0$ (кривая $1-2$).

Случай эксцентричной формы. Уравнение внешней границы диска (рис. 4) с точностью до бесконечно малых первого порядка представлено в виде

$$\rho = 1 + \delta \cos \theta. \quad (12)$$

Учет условия равновесия периодических по θ неуравновешенных усилий на контуре в системе с возникшей в центре диска сосредоточенной силой показывает, что в общем виде уравнениям для возмущений можно удовлетворить, если считать, что

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho\rho} &= (2A\rho + (3m + 1)B\rho^{-1} - 2C\rho^{-3}) \cos \theta, \\ \sigma'_{\theta\theta} &= (6A\rho - (m - 1)B\rho^{-1} + 2C\rho^{-3}) \cos \theta, \\ \sigma'_{\rho\theta} &= (2A\rho - (m - 1)B\rho^{-1} - 2C\rho^{-3}) \sin \theta, \quad m = \nu^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Удовлетворение функциями (13) условиям (3), (4), (5) и (7) с учетом равенств $u^{le}(1) = \cos \theta$, $du^{le}(1)/d\theta = -\sin \theta$ приводит к системе линейных уравнений относительно A , B , C и $u^{le}(\beta_0)$

$$\begin{aligned} 2A + (3m + 1)B - 2C &= -A_1, \\ 2A - (m - 1)B - 2C &= -A_2, \\ 2\beta_0 A - (m - 1)\beta_0^{-1}B - 2\beta_0^{-3}C &= 0, \\ (6\beta_0 A - (m - 1)\beta_0^{-1}B + 2\beta_0^{-3}C) \cos \theta + A_3 u^{le}(\beta_0) &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

в которой A_1 , A_2 и A_3 определены согласно (3), (4) и (7). Решение системы (14) имеет вид

$$\begin{aligned} A &= \frac{A_1(m - 1)(\beta_0^{-3} - \beta_0^{-1}) + A_2\{(3m + 1)\beta_0^{-3} + (m - 1)\beta_0^{-1}\}}{8m(\beta_0 - \beta_0^{-3})}, \\ C &= \frac{A_1(m - 1)(\beta_0 - \beta_0^{-1}) + A_2\{(3m + 1)\beta_0 + (m - 1)\beta_0^{-1}\}}{8m(\beta_0 - \beta_0^{-3})}, \\ B &= \frac{-A_1 + A_2}{4m}, \quad u^{le}(\beta_0) = U(\beta_0) \cos \theta, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$U(\beta_0) = -\frac{(1 - m)(1 - \beta_0^{-2})^2 A_1 + \{(m - 1)(1 + \beta_0^{-4}) + 2(3m + 1)\beta_0^{-2}\} A_2}{2m(\beta_0 - \beta_0^{-3}) A_3}$$

(ср. с [2]). Выбирая значение радиуса пластической зоны круглого диска согласно условию $U(\beta_0) \leq 0$, получаем для β_0^* характеристическое уравнение

$$1 + \delta \cos \theta = \beta_0 + \delta u^{le}(\beta_0) \quad \text{при} \quad \theta = \pi,$$

т. е. уравнение (10). Аналогично рассуждениям предыдущего пункта полученный результат можно перенести и на кольцевой диск.

Анализ результатов. Предложенным методом можно рассчитать критическую угловую скорость вращения диска, при которой возмущенная упруго-пластическая граница достигнет возмущенной (а)/невозмущенной (б) окружности $\rho = \frac{h}{b} = \alpha$ между границей пластической зоны круглого диска $\rho = \beta_0$ и контурной окружностью $\rho = 1$. Дополнив совокупность функций (2) зависимостью

$$\begin{aligned} u^{le} = E \left(\frac{(\nu + 1)n}{n - 1} A \rho^{n-1} - \frac{(\nu + 1)n}{n + 1} B \rho^{-n-1} + \frac{n - 2 + \nu(n + 2)}{n + 1} C \rho^{n+1} - \right. \\ \left. - \frac{n + 2 + \nu(n - 2)}{n - 1} D \rho^{-n+1} \right) \cos n\theta, \end{aligned} \tag{16}$$

на основании решения (A, B, C, D, E) системы (8) получим

$$u^{le}(\alpha) = W(\alpha, \beta_0) \cos n\theta, \tag{17}$$

где

$$W(\alpha, \beta_0) = E \left(\frac{(\nu + 1)n}{n - 1} \alpha^{n-1} A - \frac{(\nu + 1)n}{n + 1} \alpha^{-n-1} B + \frac{n - 2 + \nu(n + 2)}{n + 1} \alpha^{n+1} C - \frac{n + 2 + \nu(n - 2)}{n - 1} \alpha^{-n+1} D \right).$$

При этом в случае *a* характеристическое уравнение, очевидно, имеет вид

$$\alpha - \beta_0 - \delta |W(\alpha, \beta_0) - U(\beta_0)| = 0, \quad (18)$$

если предполагать выполненным условие $W(\alpha, \beta_0)U(\beta_0) \leq 0$. Характеристическое уравнение в случае *b* получается из (18) при $W \equiv 0$.

1. Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F. Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks – Part I: Analytical and numerical stability analyses // *Europ. J. of Mechanics A. Solids.* – 2009. – **28**, No 1. – P. 36–44.
2. Ивлев Д. Д. О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // *Изв. АН СССР, ОТН.* – 1957. – № 1. – С. 141–144.
3. Ивлев Д. Д., Еришов Л. В. Метод возмущений в теории упруго-пластического тела. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
4. Гузь А. Н., Немчи Ю. Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – Киев: Выща шк., 1989. – 352 с.
5. Лиля Д. М. Эксцентричная форма потери устойчивости вращающегося упруго-пластического диска // *Доп. НАН України.* – 2011. – № 2. – С. 49–53.
6. Лиля Д. М., Мартынюк А. А. О потере устойчивости вращающегося упруго-пластического кругового диска // *Там само.* – 2011. – № 1. – С. 44–51.

*Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев*

Поступило в редакцию 27.08.2010

Д. М. Лиля

Про втрату несучої здатності пружно-пластичних дисків, що обертаються

Уточнено і розвинуто спосіб розрахунку методом малого параметра можливої втрати несучої здатності плоского диска, що обертається. Одержано у першому наближенні характеристичне рівняння відносно критичного радіуса пластичної зони.

D. M. Lila

On the failure of bearing capacity of rotating elastoplastic discs

A way of calculating the bearing capacity failure by a rotating plane disc is suggested with the help of the small parameter method. A characteristic equation for the critical radius of a plastic zone is obtained as the first approximation.