Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

3 • 2012

ФІЗИКА

УДК 621.773;52.021;372.40.3

Член-корреспондент НАН Украины **Е. М. Ганапольский**

О природе квантового хаоса в рассеивающей бильярдной K-системе

Рассматривается природа квантового хаоса в рассеивающих бильярдных системах. С этой целью экспериментально изучено рассеивающие бильярды с малой гладкостью границы. Среди них: круглый бильярд с гладкой границей, бильярды с геометрией, подобной симметричному и несимметричному бильярду Бунимовича, и бильярд с резким изломом поверхности границы. Общим для всех бильярдов, кроме бильярда с гладкой границей, является присутствие на границе точек, в которых имеется излом поверхности и отсутствует вторая производная. С использованием модельных СВЧ резонаторов в миллиметровом диапазоне детально изучено спектры этих бильярдных систем. Наличие особых точек на границе является источником неустойчивости и стохастичности, которая приводит к квантовому хаосу в бильярдной системе. На основе модельных экспериментов установлено наличие в бильярдах с малой гладкостью границы основного признака квантового хаоса — вигнеровского распределения межчастотных интервалов в спектре модельного резонатора. Наиболее ярко это проявляется в спектре резонатора с резким изломом границы.

Изучению квантового хаоса в гамильтоновых системах в последнее время уделяется большое внимание, о чем свидетельствует все возрастающее число публикаций, в которых изложены результаты многочисленных экспериментальных и теоретических исследований этой проблемы. Следует сказать, что квантовый хаос — понятие достаточно общее и оно объединяет широкий круг задач, связанных с квантово-механическим описанием систем, стохастических в классическом пределе [1–3]. К таким системам относятся, в частности, неинтегрируемые (в классическом смысле) рассеивающие бильярды с локальной неустойчивостью.

В работе выполнены экспериментальные исследования механизма стохастизации в рассеивающих бильярдных K-системах. Эти исследования представляют не только общефизический интерес, обусловленный реализаций принципа соответствия между классическими и квантовыми системами. Они важны и в прикладном отношении, поскольку стимулируются практически важными приложениями, относящимися к квантовой электронике, которые связаны с созданием микролазеров на резонаторах со сверхвысокой добротностью [4].

Основным препятствием на пути достижения сверхвысокой добротности лазерного резонатора (порядка 10^8 и выше) служат неоднородности как диэлектрической проницаемости вещества, из которого выполнен резонатор, так и его формы. Эти неоднородности являются источником неустойчивости оптических лучей, которые приводят к стохастизации спектра резонатора и вызывают дополнительные потери, существенно понижающие его добротность. Регулярный спектр, в отсутствие неоднородностей, становится в этом случае случайным и чувствительность его спектральной линии к изменению размеров резонатора резко возрастает. В связи с этим изучение неустойчивости траекторий лучей в лазерных резонаторах и возникновение в спектре стохастического состояния представляет собой интересную физическую проблему, имеющую немаловажное практическое значение.

В качестве модельных объектов при теоретических и, особенно, при экспериментальных исследованиях рассеивающих бильярдных систем, обычно используются бильярды Синая [5] или Бунимовича [6]. В бильярде Синая стохастическое состояние создается в результате сильной неустойчивости, возникающей при отражении материальной частицы от границы бильярда с отрицательной кривизной. В бильярде Бунимовича механизм неустойчивости иной и связан он с рассеянием и дефокусировкой лучей при отражениях от границ бильярда специальной конфигурации типа "стадион". Такие рассеивающие бильярды с локальной неустойчивостью относятся к K-системам с перемешиванием, когда корреляционная функция двух произвольных интегрируемых динамических переменных при движении частицы стремится к нулю, что соответствует расцеплению временных корреляций между ними [2]. Рассеивающий бильярд является неинтегрируемой системой, поэтому кроме интеграла полной энергии, в нем нет никаких других интегралов движения. Таким образом, одним из основных факторов, определяющих возникновение стохастичности в несимметричном рассеивающем бильярде, является неустойчивость траекторий при отражении от его границы.

В работе [7] путем моделирования на основе СВЧ резонатора, по форме подобного рассеивающему бильярду, изучалось возникновение стохастического спектра в круговом баллистическом бильярде с шероховатыми границами (бильярд Шепелянского [8]). Было установлено, что в таком бильярде неоднородности (шероховатости) границы бильярда приводят к неинтегрируемости бильярдной системы и создают условия для образования в резонаторе стохастического спектра. Шероховатости границы бильярда являются причиной того, что спектр модельного СВЧ резонатора, соответствующего бильярду Шепелянского, становится хаотическим. В этом случае положение спектральной линии на частотной шкале является случайным, а распределение межчастотных (МЧ) интервалов в этом спектре приближается к распределению Вигнера $W(s) = (\pi/2)s\exp[-(\pi/4)s^2]$. Такое распределение отвечает спектру системы с сильной корреляцией спектральных линий и является характерным признаком системы с квантовым хаосом.

В [9] было высказано утверждение, что неустойчивость может быть следствием не только отражения от границы бильярда с отрицательной кривизной, как в бильярде Синая или дефокусировки в бильярде Бунимовича. Хаотичность и расцепление корреляций (K-свойство) может присутствовать и в бильярдах, у которых граница имеет как рассеивающие, так и фокусирующие участки. Общей чертой границ этих бильярдов является *малая гладкость*, по крайней мере, отсутствие второй производной. В связи с этим в спектрах таких бильярдов можно ожидать сильную корреляцию спектральных линий и распределение Вигнера для МЧ интервалов.

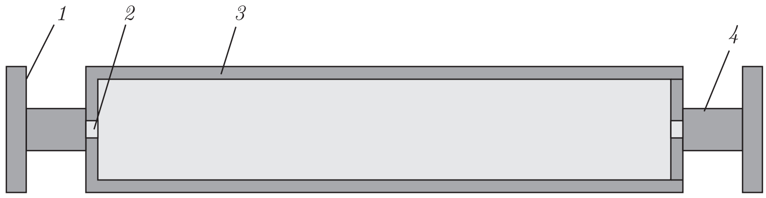

Рис. 1. Схема модельного СВЧ резонатора: *1* — волноводный фланец; *2* — отверстие антенны; *3* — корпус резонатора; *4* — антенный волновод

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование бильярдных систем с малой гладкостью границ и выяснение возможности проявления в таких системах стохастического спектра с сильной корреляцией между спектральными линиями. Для этого мы применили распространенный метод моделирования рассеивающей бильярдной системы с использованием квазидвумерных объемных СВЧ резонаторов. Квазидвумерный объемный резонатор описывается уравнением Гельмгольца, которое совпадает со стационарным уравнением Шредингера. Это дает возможность рассматривать такой резонатор как модельную квантовую систему и изучать проявление в ней спектральных особенностей, характерных для системы с квантовым хаосом.

Следует, однако, отметить, что сделанное в [9] утверждение о принадлежности рассеивающего бильярда с границей, обладающей малой гладкостью, к K-системе относится к материальным частицам, распространяющимся в таком бильярде по классическим траекториям. При изучении природы квантового хаоса в рассеивающем бильярде мы имеем дело с квантовой системой, где траектории отсутствуют, и в качестве которой выступает модельный СВЧ резонатор с дискретным спектром, описываемый уравнением Шредингера. Поэтому далеко не очевидно, что спектральные свойства бильярдной K-системы могут привести к квантовому хаосу в такой системе, как резонатор. Выяснение этого вопроса и является предметом исследований в настоящей работе.

При этом мы будем применять спектральный подход, когда квантовый хаос в стохастической системе проявляется в свойствах распределения МЧ интервалов. При таком подходе для регулярной и интегрируемой системы спектральные линии резонатора независимы, а распределение МЧ интервалов является распределением Пуассона, $P(s) = \exp(-s)$, где s — нормированная длина МЧ интервала. Иная ситуация возникает в стохастической K-системе, например в рассеивающем бильярде. При этом система неинтегрируема, ее спектр стохастический, но между спектральными линиями имеет место сильная корреляция. В этом случае положение спектральной линии на частотной шкале уже не имеет, строго говоря, физического смысла. Такой смысл имеет другая характеристика спектра, а именно, распределение МЧ интервалов, которое должно приближаться к распределению Вигнера.

Таким образом, обнаружение в спектре резонатора, боковые стенки которого обладают малой гладкостью, вигнеровского распределения МЧ интервалов является хорошим доводом в пользу того, что данный резонатор в классическом пределе является K-системой и обладает свойствами квантового хаоса. Объемный цилиндрический СВЧ резонатор, который использовался для моделирования, показан на рис. 1. Он представлял собой цилиндрическую полость в алюминиевом корпусе высотой 14 мм и диаметром 130 мм. Поскольку высота резонатора значительно меньше его диаметра, резонатор можно рассматривать как квазидвумерную [10] квантовую систему и применить его для моделирования спектральных свойств в рассеивающей бильярдной K-системе. Для концентрации в нем электромагнитного поля полость резонатора была закрыта двумя алюминиевыми дисками — крышками. В резонаторе создавались условия для образования боковых границ с различной геометрией, которые обладают малой гладкостью. С этой целью в резонатор вводились специальные алюминиевые вставки, форма и размеры которых позволяли обеспечить тот или иной тип рассеивающей бильярдной системы. Вставки образовывали излом боковой поверхности и создавали, таким образом, разрыв первой производной. Для того чтобы минимизировать потери, как резонатор, так и вставки были изготовлены из чистого алюминия.

Спектральные исследования резонатора проводились в восьмимиллиметровом диапазоне на частотах в интервале 27 ГГц–38,5 ГГц. Для возбуждения и приема СВЧ колебаний использовалась волноводная дифракционная антенна, выполненная в виде отверстия диаметром 2 мм в тонкой (толщиной 0,1 мм) медной диафрагме, закрывающей торец прямоугольного волновода, с сечением внутреннего канала $3{,}4 \times 7{,}2$ мм^2. Волновод антенны с помощью пайки был прикреплен к боковой стенке корпуса резонатора, а его широкая сторона была ориентирована вдоль его оси. В этих условиях в резонаторе возбуждались колебания H-типа с ориентацией вектора магнитного поля вдоль оси. Силовые линии электрического поля для этих колебаний располагались в перпендикулярной плоскости, и, следовательно, возбуждаемые ими СВЧ токи не пересекали границу между корпусом и верхней (нижней) крышкой резонатора. Благодаря этому в резонаторе достигалась относительно высокая добротность для колебаний H-типа, которая составляла в высокочастотной части миллиметрового диапазона $3 \div 5 \cdot 10^3$.

Для регистрация спектра собственных колебаний резонатора применялся прибор Р2–65, служивший для измерения КСВН волноводных элементов в широком интервале частот миллиметрового диапазона. Спектральные измерения производились в режиме “на проход” путем измерения интенсивности прошедшего через резонатор сигнала. При этом регистрировались многочисленные (порядка сотни) спектральные линии. Измерения спектра производились в течение достаточно короткого времени для того, чтобы обеспечить стабильность за время измерения характеристик сигнала и, соответственно, спектральных линий. С этой целью измерения были полностью автоматизированы. Весь спектр в указанном выше диапазоне частот или отдельные его участки регистрировались в течение 40 с. Для этого обработка записанного на компьютере спектра осуществлялась с применением специально разработанной программы, которая позволяла определить добротность и частоту каждой из многочисленных спектральных линий с достаточно высокой точностью. Относительные погрешности в измерении собственной частоты спектральной линии и ее добротности не превышали 10^{-4} и 10^{-2} соответственно.

На рис. 2 показан спектр гладкого (без вставок) цилиндрического резонатора, который содержит около 50 высокодобротных спектральных линий. Такой резонатор, обладая элементами симметрии, является интегрируемой системой, и возбуждаемое в нем электромагнитное поле можно представить в виде совокупности независимых спектральных H-мод. Поскольку система интегрируема, спектр резонатора регулярный, а распределение МЧ интервалов в нем должно быть близко к распределению Пуассона. Распределение МЧ интервалов, полученное в ходе спектральных измерений (рис. 3), в полной мере отвечает этим соображениям. Как видно из приведенных на рис. 3 данных, отклонение от распределения Пуассона наблюдается только при малых s и связано оно, по-видимому, с конечной шириной спектральной линии.

Конфигурация резонатора с двумя секторными вставками (рис. 4, *а*) отвечает геометрии бильярда Бунимовича. Поскольку в резонаторе имеются уступы на боковой поверх-

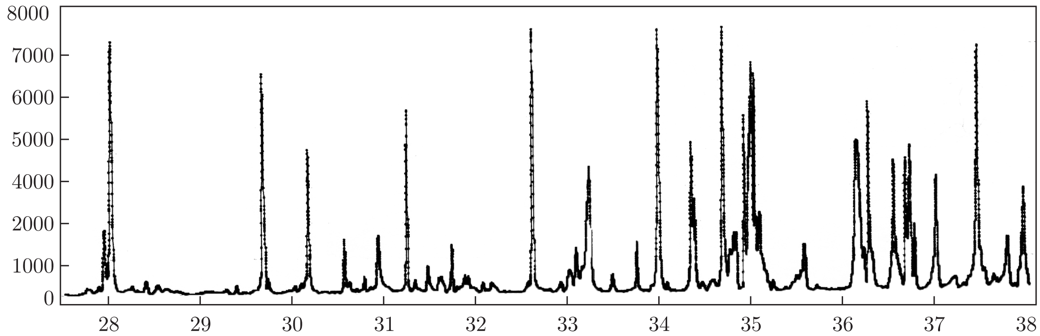

Рис. 2. Фрагмент спектра модельного цилиндрического СВЧ резонатора: по горизонтали — частота, ГГц; по вертикали — интенсивность (в отн. ед.) прошедшего через резонатор сигнала. Резонатор с гладкой боковой границей

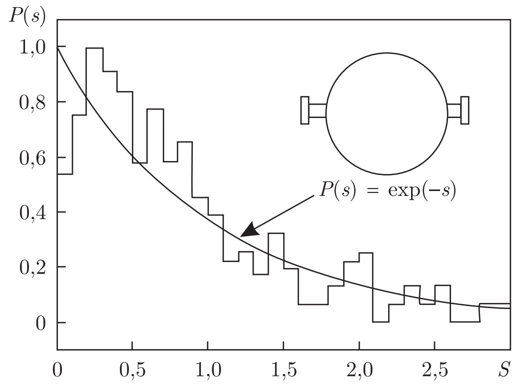

Рис. 3. Гистограмма распределения МЧ интервалов в спектре цилиндрического СВЧ резонатора с гладкой боковой границей: плавная кривая — распределение Пуассона $P(s) = \exp(-s)$

ности, которые можно трактовать как исчезновение в этих точках второй производной, то в соответствующем резонатору бильярде возникает неустойчивость траекторий, предсказанная в [9]. В спектре такого резонатора должны проявляться корреляции между спектральными линиями. Эти корреляции вызывают эффект отталкивания между ними, что существенно сказывается на распределении МЧ интервалов. Благодаря этому число малых МЧ интервалов существенно уменьшается, а вероятность появления относительно больших МЧ интервалов, соответственно, увеличивается. В результате распределение МЧ интервалов в спектре приближается к распределению Вигнера. Относящиеся к этому случаю экспериментальные результаты показаны на рис. 4 и согласуются с этими соображениями. Обращает на себя внимание, что вероятность малых интервалов в этом случае достаточно велика. Это говорит о том, что, как можно предполагать, в спектре резонатора наряду с доминирующей случайной компонентой присутствует еще и регулярная составляющая.

Еще большее отличие в распределении МЧ интервалов должно иметь место в конфигурации резонатора с одной сегментной вставкой, что соответствует полностью несимметричному бильярду Бунимовича (рис. 4, *б*). Здесь, так же, как и в случае симметричного бильярда Бунимовича, распределение МЧ интервалов в модельном резонаторе приближается к распределению Вигнера. В то же время наличие достаточно больших значений вероятности при малых s говорит о том, что в этом случае регулярная составляющая по сравнению

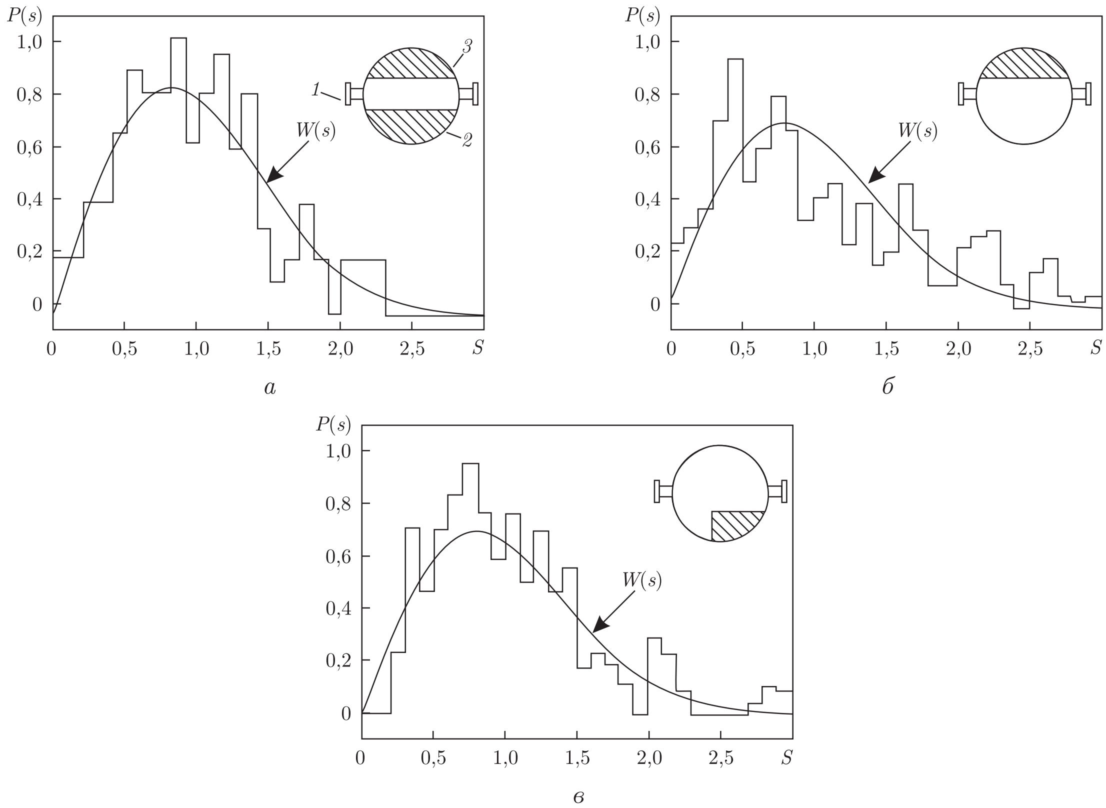

Рис. 4. Гистограмма распределения МЧ интервалов в спектре цилиндрического СВЧ резонатора: *а* — с двумя секторными вставками, подобного симметричному бильярду Бунимовича. Плавная кривая — распределение Вигнера $W(s) = (\pi/2)s\exp[-(\pi/4)s^2]$; *б* — с одной секторной вставкой, подобного несимметричному бильярду Бунимовича; *в* — со вставкой в виде острого несимметричного уступа

со спектром для резонатора, подобного симметричному бильярду Бунимовича (резонатор с двумя сегментными вставками), увеличивается.

На рис. 4, *в* показано распределение МЧ интервалов для случая резонатора, в котором вставка выполнена в виде несимметричного острого уступа. По сравнению с резонаторами, которые подобны бильярду Бунимовича (симметричному или несимметричному), острый угол вносит существенное изменение в характер спектра рассеивающего бильярда и распределение МЧ интервалов. Такое распределение в большей степени по сравнение с резонаторами Бунимовича приближается к распределению Вигнера, поскольку при $s \to 0$, $P(s) \to 0$ в спектре такого резонатора регулярная составляющая не проявляется. Обнаружение стохастических эффектов, связанных с природой квантового хаоса в рассеивающих бильярдных системах, у которых границы обладают малой гладкостью, например, в виде уступов на поверхности или несимметричных многоугольников, фактически открывает большой класс бильярдных К-систем для изучения квантового хаоса.

1. *Заславский Г. М.* Стохастичность динамических систем. – Москва: Наука, 1984. – 365 с.
2. *Штокман Х.-Ю.* Квантовый хаос: Введение. – Москва: Физматлит, 2004. – 373 с.
3. *Илютин И. В.* Проблема квантового хаоса // Усп. физ. наук. – 1988. – **155**, вып. 3. – С. 397–441.
4. *Srivasan K., Borselli M., Johnson J. et al.* Optical loss and lasing characteristics of high-quality-factor AlGaAs microdisk resonators with embedded quantum dots // Appl. Phys. Lett. – 2005. – **86**. – P. 151106.

5. *Синай Я. Г.* Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // Усп. мат. наук. – 1970. – **25**. – С. 141–192.
6. *Bunimovich L. A.* On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards // Commun. Math. Phys. – 1970. – **65**. – P. 295–312.
7. *Ганапольский Е. М., Тарасов Ю. В.* Квантовый хаос в круговом баллистическом бильярде с шероховатой границей // Доп. НАН України. – 2011. – № 2. – С. 65–70.
8. *Frahm K. M., Shepelyansky D. L.* Quantum localization in rough billiards // Phys. Rev. Lett. – 1997. – **78**. – P. 1440–1443.
9. *Гуревич Б. М.* Эргодическая теория // Физ. энциклопедия / Под ред. А. М. Прохорова. – Москва: Рос. энциклопедия, 1998. – Т. 5. – С. 625–636.
10. *Кацнеленбаум Б. З.* Высокочастотная электродинамика.. – Москва: Наука, 1966. – 237 с.

Институт радиофизики и электроники
НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 20.09.2011

Член-кореспондент НАН України **Є. М. Ганапольський**

Про природу квантового хаосу в розсіючій більярдній K-системі

Вивчено природу квантового хаосу в розсіюючих більярдних системах. З цією метою розглянуто більярди з різними границями, в тому числі розсіюючі більярди, в яких границя має малу гладкість. Серед них: круглий більярд з гладкою границею, більярди з геометрією, подібною до симетричного та несиметричного більярдів Бунімовича, і більярд з різким зламом границі. Загальним для всіх цих більярдів, окрім більярда з гладкою границею, є присутність на границі точок, в яких має місце злам і відсутня друга похідна. З використанням модельних НВЧ резонаторів детально вивчено спектри цих систем. Особливі точки на границі більярда є джерелом нестійкості і стохастичності, яка призводить до квантового хаосу. На основі експериментів встановлено наявність в більярдах з малою гладкістю границі основної ознаки квантового хаосу — вігнерівського розподілу міжчастотних інтервалів в спектрі модельного резонатора. Найяскравіше це виявляється в спектрі резонатора з різким зламом границі.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **E. M. Ganapolskii**

About the nature of quantum chaos in a dispersive billiard K-system

The nature of quantum chaos in the dispersive billiard systems is studied. To this end, the billiards are considered with different boundaries, including dispersive billiards with small smoothness of a border. Among them: round billiards with smooth border, billiards with geometry similar to that of symmetric and asymmetric Bunimovich billiards, and the billiards with the sharp fracture of a border. The common point for all billiards, except for billiards with smooth border, is the presence of the points on the border, in which a break is present and the second derivative is absent. With the use of model microwave resonators, the spectra of these billiard systems are studied in detail. The presence of the special points on a border is the source of instability and stochasticity, which results in the quantum chaos in a billiard system. On the basis of model experiments, the presence of the basic sign of quantum chaos, the Wigner distribution of interfrequency intervals in the spectrum of a model resonator, in billiards with small border smoothness is established. This is revealed most brightly in the spectrum of a resonator with a sharp break of the border.