

А. О. Борисюк

Функція Гріна хвильового рівняння для нескінченної прямої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з осередненою течією

(Представлено академіком НАН України В. Т. Грінченком)

Побудовано функцію Гріна тривимірного хвильового рівняння для нескінченної прямої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з осередненою течією. Ця функція записується у вигляді ряду по акустичних модах зазначеної механічної конструкції і є періодичною по азимутальній координаті та симетричною відносно осьового перерізу розташування одиничного точкового імпульсного джерела. Кожен член цього ряду являє собою суму прямої та зворотної хвиль, які поширюються на відповідній моді труби вниз та вгору за течією від вказаного джерела. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти осередненої течії. Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції відносно поперечного перерізу, в якому знаходиться джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу осередненої течії на функцію Гріна зменшується, спричиняючи, окрім іншого, зменшення зазначеної її асиметрії. У граничному ж випадку відсутності осередненої течії побудована функція Гріна є симетричною відносно вказаного поперечного перерізу і збігається з відповідною функцією Гріна для досліджуваної труби, яка наведена в науковій літературі.

Проблеми знаходження й дослідження акустичних полів у трубах є актуальними у нафтогазовій промисловості, автомобіле- та літакобудуванні, архітектурі, медицині, комунальному господарстві тощо [1–5]. Всі вони, незалежно від типу труб й акустичних джерел у них, в принципі можуть бути розв'язані за допомогою методу функцій Гріна. Проте застосування цього методу є доцільним лише за умови існування принципової можливості побудови відповідної функції Гріна.

Ця можливість, окрім кваліфікації дослідника, залежить від геометрії досліджуваної труби та форми її поперечного перерізу, фізичних властивостей її стінок та умов її закріплення, акустичних умов на кінцях труби та наявності або відсутності течії в ній тощо. Як показує аналіз наукової літератури, серед випадків, які визначаються різними комбінаціями цих факторів, найбільш дослідженими є випадки нескінченної прямої жорсткостінної труби прямокутного та кругового поперечного перерізів (див., наприклад, [1, 3, 4–10] та відповідні посилання в них). Для цих випадків побудовано відповідні функції Гріна хвильового рівняння і рівняння Гельмгольца, а також, з їх допомогою, одержано вирази для різних характеристик акустичних полів, згенерованих відповідними джерелами у зазначених трубах. Проте всі ці результати, як правило, обмежуються випадком відсутності течії в трубі. Якщо ж наявність течії і береться до уваги, то її ефекти у відповідних функціях Гріна та/або кінцевих результатах проявляються лише у неявному вигляді [1, 3, 5, 8].

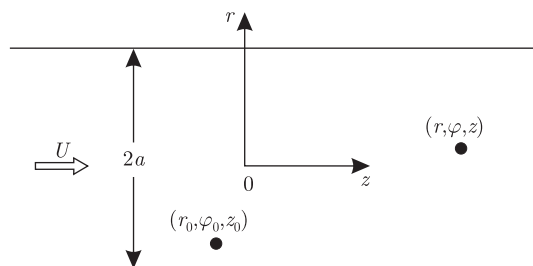


Рис. 1. Геометрія задачі

Цей недолік частково виправляється у даній роботі. Тут будується функція Гріна хвильового рівняння для нескінченної прямої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з осередненою течією. Ця функція має явну залежність від параметрів течії, а в разі її відсутності — збігається з відповідною функцією Гріна для зазначеної труби, яка наведена в науковій літературі [1, 3, 5–8, 10].

Постановка задачі. Розглядається нескінченна пряма жорсткостінна труба кругового поперечного перерізу радіусом a (див. рис. 1), в якій з осередненою осьовою швидкістю U тече рідина. У трубі задані як завгодно розташовані акустичні джерела різної природи, які створюють в ній акустичне поле. Це поле описується специфічним типом тривимірного хвильового рівняння, яке в науковій літературі часто називають тривимірним *конвективним* хвильовим рівнянням [8, 10]:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 p_a}{dt^2} - \nabla^2 p_a = \gamma \quad (1)$$

(тут p_a — акустичний тиск; c_0 — швидкість звуку в незбуреній рідині, а функція γ описує сумарний розподіл зазначених джерел). Необхідно побудувати функцію Гріна рівняння (1) для досліджуваної труби.

Функція Гріна. Функція Гріна $G(\vec{r}; t; \vec{r}_0, t_0)$ рівняння (1) задовольняє рівняння

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 G}{dt^2} - \nabla^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) \quad (2)$$

(де $\delta(\dots)$ — дельта-функція Дірака) і описує акустичний тиск у точці поля \vec{r} в момент часу t , який генерується в трубі у момент часу t_0 одиничним точковим імпульсним джерелом, розташованим у точці \vec{r}_0 (див. рис. 1).

У циліндричній системі координат (r, φ, z) , яка вводиться для розв'язування задачі, рівняння (2) має такий вигляд:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{d^2 G}{dt^2} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right] = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0); \quad (3)$$

$$0 \leq r, r_0 \leq a; \quad 0 \leq \varphi, \varphi_0 \leq 2\pi; \quad |z| < \infty; \quad |z_0| < \infty; \quad |t| < \infty; \quad |t_0| < \infty,$$

в якому

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + U^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4)$$

Граничними умовами для функції G є рівність нулю її радіальної похідної на нерухомій жорсткій стінці досліджуваної труби

$$\left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (5)$$

і умова випромінювання у нескінченність¹. Крім того, G має бути періодичною по координаті φ :

$$G|_{\varphi=\varphi_*+2n\pi} = G|_{\varphi=\varphi_*}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6)$$

симетричною відносно площини $\varphi = \varphi_0$ розташування зазначеного джерела

$$G|_{\varphi=\varphi_0+\Delta\varphi} = G|_{\varphi=\varphi_0-\Delta\varphi}, \quad \Delta\varphi > 0 \quad (7)$$

і задовольняти умову причинності [6–10]

$$G|_{t<t_0} = 0. \quad (8)$$

Розв'язок задачі (3)–(8) шукаємо у вигляді ряду по акустичних модах труби $\{\Psi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(2)}\}$:

$$G(r, \varphi, z, t; r_0, \varphi_0, z_0, t_0) = \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{nm}^{(j)}(z, t; r_0, \varphi_0, z_0, t_0) \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi), \quad (9)$$

$$\Psi_{nm}^{(1)}(r, \varphi) = J_n(\alpha_{nm}r) \cos(n\varphi), \quad \Psi_{nm}^{(2)}(r, \varphi) = J_n(\alpha_{nm}r) \sin(n\varphi),$$

де J_n — циліндричні функції Бесселя першого роду порядку n ; $\alpha_{nm} = \zeta_{nm}/a$ — радіальні хвильові числа; ζ_{nm} — корені рівняння $J'_n(\zeta_{nm}) = 0$ ($m = 1, 2, \dots$); а $\Psi_{0m}^{(2)} \equiv 0$. Вибрана у такому вигляді функція G автоматично задовольняє умову (5).

У записі (9) невідомими є коефіцієнти $G_{nm}^{(j)}$. Для їх визначення підставимо ряд (9) у розписане з урахуванням (4) рівняння (3), помножимо одержане при цьому співвідношення скалярно на функції $\Psi_{nm}^{(j)}$ і врахуємо ортогональність останніх:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^{(j)} \Psi_{sq}^{(j)} r dr d\varphi = \begin{cases} \|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2, & (s, q) = (n, m), \\ 0, & (s, q) \neq (n, m), \end{cases}$$

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^{(1)} \Psi_{sq}^{(2)} r dr d\varphi = 0, \quad j = 1, 2, \quad (10)$$

$$\|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2 = \begin{cases} \pi a^2 J_0^2(\alpha_{0m}a), & n = 0, \\ \frac{\pi a^2}{2} J_n^2(\alpha_{nm}a) \left[1 - \frac{n^2}{\alpha_{nm}^2 a^2} \right], & n \geq 1, \end{cases} \quad \|\Psi_{nm}^{(2)}\|^2 = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \|\Psi_{nm}^{(1)}\|^2, & n \geq 1. \end{cases}$$

¹Перша умова означає рівність нулевій радіальній компоненті акустичної швидкості на стінці труби, тоді як друга — відсутність відбиття звуку на її кінцях (на нескінченності).

У результаті одержимо диференціальне рівняння для $G_{nm}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial t^2} + 2 \frac{M}{c_0} \frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial t \partial z} - (1 - M^2) \frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial z^2} + \alpha_{nm}^2 G_{nm}^{(j)} = \\ = \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \delta(z - z_0) \delta(t - t_0), \end{aligned} \quad (11)$$

$$|z| < \infty; \quad |z_0| < \infty; \quad |t| < \infty; \quad |t_0| < \infty; \quad j = 1, 2; \quad n \geq 0; \quad m \geq 1,$$

в якому $M = U/c_0$ — число Маха осередненої течії в трубі, а квадрати норм її акустичних мод $\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2$ даються в (10).

Аналіз рівняння (11) показує, що воно, за винятком доданків, які містять число M , збігається з одновимірним рівнянням Кляйна–Гордона², розв'язок якого для досліджуваної труби відомий [6, 7]. Щоб позбутися цих доданків і перейти, таким чином, до зазначеного рівняння, введемо нові безрозмірні змінні:

$$\begin{aligned} Z = \frac{\lambda z}{a}, \quad Z_0 = \frac{\lambda z_0}{a}, \quad T = \lambda^{-1} \frac{c_0 t}{a} + M \frac{\lambda z}{a}, \\ T_0 = \lambda^{-1} \frac{c_0 t_0}{a} + M \frac{\lambda z_0}{a}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

У змінних (12) рівняння (11) стає класичним одновимірним рівнянням Кляйна–Гордона:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial Z^2} + \alpha_{nm}^2 a^2 G_{nm}^{(j)} = a^2 \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \delta\left(\frac{a}{\lambda}(Z - Z_0)\right) \times \\ \times \delta\left(\frac{\lambda a}{c_0}(T - T_0 - M(Z - Z_0))\right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$|Z| < \infty; \quad |Z_0| < \infty; \quad |T| < \infty; \quad |T_0| < \infty; \quad j = 1, 2; \quad n \geq 0; \quad m \geq 1,$$

розв'язок якого є суперпозицією прямої та зворотної хвиль, які поширюються відповідно вправо та вліво від джерела, розташованого у точці $Z = Z_0$ [6, 7]:

$$\begin{aligned} G_{nm}^{(j)} = \frac{c_0}{2} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} [H(Z_0 - Z)H(T - T_0 + Z - Z_0) + \\ + H(Z - Z_0)H(T - T_0 - (Z - Z_0))] J_0(\alpha_{nm} a \sqrt{(T - T_0)^2 - (Z - Z_0)^2}). \end{aligned} \quad (14)$$

Тут $H(\dots)$ є функцією Хевісайда, а також було взято до уваги умову випромінювання у нескінченність.

²Оскільки зазначені доданки з'являються в (11) внаслідок існування в (3) відмінної від нуля конвективної похідної $U(\partial/\partial z)$, їх можна назвати конвективними, а саме рівняння (11) — одновимірним конвективним рівнянням Кляйна–Гордона.

Врахування у формулі (14) співвідношень (12) дозволяє одержати остаточні вирази для коефіцієнтів $G_{nm}^{(j)}$ у записі (9):

$$G_{nm}^{(j)} = \frac{c_0 \Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{2 \|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \left[H\left(\frac{\lambda}{a}(z_0 - z)\right) H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M + 1)\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) + \right. \\ \left. + H\left(\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M - 1)\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) \right] \times \\ \times J_0\left(\alpha_{nm} a \sqrt{\frac{c_0^2}{\lambda^2 a^2}(t - t_0)^2 + 2\frac{c_0 M}{a^2}(t - t_0)(z - z_0) + (M^2 - 1)\frac{\lambda^2}{a^2}(z - z_0)^2}\right). \quad (15)$$

Тоді підстановка величин (15) у співвідношення (9) дає вираз для шуканої функції Гріна рівняння (1) для нескінченної прямої жорсткостинної труби кругового поперечного перерізу з осередненою течією:

$$G(r, \varphi, z, t; r_0, \varphi_0, z_0, t_0) = \\ = \frac{c_0}{2} \left[H\left(\frac{\lambda}{a}(z_0 - z)\right) H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M + 1)\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) + H\left(\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) \times \right. \\ \left. \times H\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) + (M - 1)\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) \right] \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) \times \\ \times J_0\left(\alpha_{nm} a \sqrt{\frac{c_0^2}{\lambda^2 a^2}(t - t_0)^2 + 2\frac{c_0 M}{a^2}(t - t_0)(z - z_0) + (M^2 - 1)\frac{\lambda^2}{a^2}(z - z_0)^2}\right). \quad (16)$$

Бачимо, що функція Гріна (16) записується у вигляді ряду по акустичних модах зазначеної труби $\Psi_{nm}^{(j)}$. Кожен член цього ряду являє собою суму прямої та зворотної хвиль, які поширюються відповідно вниз та вгору за течією від одиничного точкового імпульсного джерела, розташованого у поперечному перерізі труби $z = z_0$. При цьому, як і має бути (див. (6)–(8)), функція G є періодичною по кутовій координаті φ , симетричною відносно площини $\varphi = \varphi_0$ і задовольняє умову причинності.

Подальший аналіз співвідношення (16) показує, що в побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти осередненої течії (через числа M і $\lambda = \lambda(M)$). Ці ефекти стають вагомими зі збільшенням числа M , зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції G відносно площини $z = z_0$ розташування зазначеного вище джерела. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу осередненої течії на функцію G зменшується, спричиняючи, окрім іншого, зменшення вказаної її асиметрії. У граничному ж випадку відсутності осередненої течії ($M = 0$, $\lambda = 1$) функція (16) стає симетричною відносно площини $z = z_0$ і збігається з функцією Гріна хвильового рівняння для досліджуваної труби, яка наведена в науковій літературі [6–10]:

$$G|_{M=0} = \frac{c_0}{2} \left[H\left(\frac{1}{a}(z_0 - z)\right) H\left(\frac{c_0}{a}(t - t_0) + \frac{1}{a}(z - z_0)\right) + \right. \\ \left. + H\left(\frac{1}{a}(z - z_0)\right) H\left(\frac{c_0}{a}(t - t_0) - \frac{1}{a}(z - z_0)\right) \right] \times$$

$$\times \sum_{j=1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi_{nm}^{(j)}(r_0, \varphi_0)}{\|\Psi_{nm}^{(j)}\|^2} \Psi_{nm}^{(j)}(r, \varphi) J_0 \left(\alpha_{nm} \sqrt{c_0^2(t-t_0)^2 - (z-z_0)^2} \right).$$

На закінчення зробимо такі висновки.

1. Побудовано функцію Гріна тривимірного хвильового рівняння (див. вираз (16)) для нескінченної прямої жорсткостинної труби кругового поперечного перерізу з осередненою течією. Ця функція записується у вигляді ряду по акустичних модах зазначеної труби і є періодичною по азимутальній координаті φ та симетричною відносно площини $\varphi = \varphi_0$ розташування одиничного точкового імпульсного джерела.

2. У функції Гріна (16) кожен член ряду являє собою суму прямої та зворотної хвиль, які поширюються на відповідній моді труби вниз та вгору за течією від зазначеного джерела.

3. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти осередненої течії. Ці ефекти стають вагомими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції відносно поперечного перерізу $z = z_0$, в якому розташоване зазначене джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу осередненої течії на функцію Гріна (16) зменшується, спричиняючи, окрім іншого, зменшення зазначеної її асиметрії.

4. У граничному випадку відсутності осередненої течії побудована функція Гріна є симетричною відносно перерізу $z = z_0$ і збігається з відповідною функцією Гріна для досліджуваної труби, яка наведена в науковій літературі.

5. У процесі побудови функції Гріна запропоновано перетворення (12), яке дозволяє зводити одновимірне конвективне рівняння Кляйна–Гордона (11) до його класичного одновимірного аналогу (13), і на основі відомого розв'язку останнього одержувати розв'язок першого рівняння.

1. Борисюк А. О. Генерація звуку обмеженою областю збуреної течії в жорсткостинному каналі кругового поперечного перерізу. Ч. 1. Загальна теорія // Акуст. вісн. – 2003. – **6**, № 3. – С. 3–9.
2. Вовк І. В., Гринченко В. Т., Малюга В. С. Особенности движения среды в каналах со стенозами // Прикл. гідромех. – 2009. – **11**, № 4. – С. 17–30.
3. Davies H. G., Ffowcs Williams J. E. Aerodynamic sound generation in a pipe // J. Fluid Mech. – 1968. – **32**, No 4. – P. 765–778.
4. Doak P. E. Excitation, transmission and radiation of sound from source distributions in hard-walled ducts of finite length (1): the effects of duct cross-section geometry and source distribution space-time pattern // J. Sound Vib. – 1973. – **31**, No 1. – P. 1–72.
5. Blake W. K. Mechanics of flow-induced sound and vibration. – New York: Acad. Press, 1986. – 974 p.
6. Morse P. M., Feshbach H. Methods of theoretical physics. Vol. 1. – New York: McGraw-Hill, 1953. – 997 p.
7. Morse P. M., Ingard K. U. Theoretical acoustics. – New York: McGraw-Hill, 1968. – 927 p.
8. Howe M. S. Acoustics of fluid-structure interactions. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.
9. Crighton D. G., Dowling A. P., Ffowcs Williams J. E., Heckl M., Leppington F. G. Modern methods in analytical acoustics. – London: Springer, 1992. – 738 p.
10. Гринченко В. Т., Вовк І. В., Мацупура В. Т. Основи акустики. – Київ: Наук. думка, 2007. – 640 с.

А. О. Борисюк

Функция Грина волнового уравнения для бесконечной прямой жесткостенной трубы кругового поперечного сечения с осредненным течением

Построена функция Грина трехмерного волнового уравнения для бесконечной прямой жесткостенной трубы кругового поперечного сечения с осредненным течением. Эта функция записывается в виде ряда по акустическим модам указанной механической конструкции и является периодической по азимутальной координате и симметричной относительно осевого сечения расположения единичного импульсного источника. Каждый член этого ряда является суммой прямой и обратной волн, распространяющихся на соответствующей моде трубы вниз и вверх по течению от указанного источника. В построенной функции Грина в явном виде отражены эффекты осредненного течения. Эти эффекты становятся более весомыми с увеличением числа Маха течения, обуславливая, в частности, появление и дальнейшее увеличение асимметрии функции относительно поперечного сечения расположения источника. И наоборот, с уменьшением числа Маха весомость влияния осредненного течения на функцию Грина уменьшается, вызывая, кроме прочего, уменьшение указанной ее асимметрии. В предельном же случае отсутствия осредненного течения построенная функция Грина является симметричной относительно указанного поперечного сечения и совпадает с соответствующей функцией Грина для исследуемой трубы, которая приведена в научной литературе.

A. O. Borysyuk

Green's function of the wave equation for an infinite straight rigid-walled pipe of circular cross-section with mean flow

The Green's function of the three-dimensional wave equation for an infinite straight rigid-walled pipe of circular cross-section with mean flow is found. This function is written as a series in the pipe acoustic modes and is periodic in the azimuthal co-ordinate and symmetric about the axial section of the unit point impulse source location. Each term of the series is a sum of the direct and reverse waves propagating in the corresponding pipe mode downstream and upstream of the noted source. In the Green's function, the mean flow effects are directly reflected. The effects become more significant, as the Mach number of a flow increases, causing, in particular, the appearance and the further growth of the function asymmetry about the cross-section of the source location. Vice versa, the decrease of the Mach number results in the decrease of the effects and, in particular, the decrease of the indicated asymmetry of the function. In the limiting case of the mean flow absence, the obtained Green's function is symmetric about the indicated cross-section and coincides with the corresponding Green's function for the investigated pipe, which is available in the literature.