

А. А. Слепышев, А. В. Носова

Волновые потоки на северо-западном шельфе Черного моря

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Л. В. Черкесовым)

Асимптотическим методом многомасштабных разложений исследованы нелинейные эффекты при распространении внутренних волн с учетом турбулентной вязкости и диффузии. Определены волновые потоки тепла и соли за счет фазового сдвига колебаний температуры, солености и вертикальной скорости в волне. Показано, что вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа отлична от нуля. При этом потоки тепла и соли у короткопериодных внутренних волн превосходят турбулентные.

Вертикальный обмен играет важную роль в вентиляции вод, переносе примеси, органических веществ, взвеси и растворенных газов. Обычно его связывают с мелкомасштабной турбулентностью, которая в стратифицированной жидкости имеет перемежаемый характер. Турбулентность приводит к диссипации энергии внутренних волн, которые при учете вязкости и диффузии затухают [1]. В публикации [2] определяются средние течения, генерируемые нелинейной внутренней волной. Их вертикальная скорость мала, имеет разные знаки на переднем и заднем фронте пакета и не вносит вклада в интегральный перенос. Поэтому в статье [2] не рассматриваются потоки тепла и соли по вертикали, однако турбулентная вязкость и диффузия не учитываются. В настоящем сообщении показано, что вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа при учете турбулентной вязкости и диффузии отлична от нуля и обеспечивает перенос тепла и соли по вертикали. Установлено, что волновой поток тепла отличен от нуля, это же относится и к вертикальному потоку соли.

В приближении Буссинеска рассмотрим свободные внутренние волны с учетом турбулентной вязкости и диффузии в безграничном бассейне постоянной глубины. Введем безразмерные переменные (размерные величины обозначены волнистой чертой сверху):

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= t\omega_*^{-1}, & \tilde{k} &= kH^{-1}, & \tilde{\omega} &= \omega_*\omega, & \tilde{u} &= uH\omega_*, & \tilde{w} &= wH\omega_*, \\ \tilde{P} &= \bar{\rho}_0 H^2 \omega_*^2 P, & \tilde{\rho} &= \bar{\rho}_0 \omega_*^2 H \rho g^{-1}, & \tilde{x} &= Hx, & \tilde{z} &= Hz, \\ \tilde{K}_x &= K_x \mu, & \tilde{K}_z &= K_z \mu, & \tilde{M}_x &= M_x \mu, & \tilde{M}_z &= M_z \mu.\end{aligned}$$

Здесь x и z — горизонтальная и вертикальная координаты, вертикальная ось направлена вверх, ρ и P — волновые возмущения плотности и давления; ρ_0 — невозмущенная средняя плотность воды; u и w — горизонтальная и вертикальная компоненты волновых возмущений скорости; g — ускорение силы тяжести; H — глубина моря; K_x, K_z и M_x, M_z — горизонтальные и вертикальные коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии соответственно; ω_* — характерная частота волны; μ — значение коэффициента горизонтальной турбулентной вязкости.

Система уравнений гидродинамики для волновых возмущений в безразмерных переменных при постоянных коэффициентах турбулентной вязкости и диффузии имеет такой вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \epsilon^2 K_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon^2 K_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \epsilon^2 K_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \epsilon^2 K_z \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \rho, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= \epsilon^2 M_x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \epsilon^2 M_z \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} - w \frac{d\rho_0}{dz}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

где $\epsilon^2 = \mu H^{-2} \omega_*^{-1}$ — малый параметр, пропорциональный значению горизонтальной турбулентной вязкости.

Приведем уравнения для волновых возмущений температуры T и солёности S :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \epsilon^2 M_{tx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \epsilon^2 M_{tz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - w \frac{dT_0}{dz},\tag{2}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + w \frac{\partial S}{\partial z} = \epsilon^2 M_{sx} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \epsilon^2 M_{sz} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - w \frac{dS_0}{dz}.\tag{3}$$

Здесь T_0 и S_0 — невозмущенные средние значения температуры и солёности; M_{tx} и M_{sx} — коэффициенты горизонтальной турбулентной диффузии тепла и соли; M_{tz} и M_{sz} — коэффициенты вертикальной турбулентной диффузии тепла и соли.

Граничные условия на свободной поверхности [3] можно записать так:

$$\frac{d\zeta}{dt} = w, \quad -P + \zeta \cdot g_1 + 2\epsilon^2 K_z \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\tag{4}$$

$$K_z \frac{\partial u}{\partial z} + K_x \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\tag{5}$$

где ζ — вертикальное смещение свободной поверхности; $g_1 = \omega_*^2 H$.

Последние два условия определяют отсутствие нормальных и тангенциальных напряжений на свободной поверхности. На дне принимаем условия прилипания:

$$w(-1) = u(-1) = 0;\tag{6}$$

условия постоянства плотности на границах:

$$\rho + \zeta \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \zeta \frac{\partial \rho}{\partial z} + \eta \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,\tag{7}$$

$$\rho(-1) = 0;\tag{8}$$

аналогичные граничные условия по температуре и солёности:

$$T + \zeta \frac{\partial T_0}{\partial z} + \zeta \frac{\partial T}{\partial z} + \eta \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,\tag{9}$$

$$T(-1) = 0,\tag{10}$$

$$S + \zeta \frac{\partial S_0}{\partial z} + \zeta \frac{\partial S}{\partial z} + \eta \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (11)$$

$$S(-1) = 0. \quad (12)$$

Следуя методу асимптотических многомасштабных разложений, решение исходной системы уравнений (1), (2) ищем в виде асимптотических рядов [2]:

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_1^n \psi_n(\xi, \tau, z, \theta), & \rho &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_1^n \rho_n(\xi, \tau, z, \theta), \\ T &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_1^n T_n(\xi, \tau, z, \theta), & S &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_1^n S_n(\xi, \tau, z, \theta), \end{aligned} \quad (13)$$

где $\psi(x, z, t)$ — функция тока, которая определяет поле волновых скоростей ($\partial\psi/\partial z = u$ — горизонтальная скорость; $-\partial\psi/\partial x = w$ — вертикальная скорость); ϵ_1 — крутизна волны ($\epsilon_1 \ll \epsilon^2$); $\xi = \epsilon_1^2 x$, $\tau = \epsilon_1^2 t$ (ξ и τ — медленные переменные; θ — фаза волны).

Волновое число и частота определяются по формулам:

$$k = \frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad \omega = -\frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

Волновые возмущения функции тока ψ_1 , плотности ρ_1 , температуры T_1 и солёности S_1 в первом порядке малости по параметру ϵ_1 представим в виде:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A\varphi_1(z)e^{i\theta} + c. c., & \rho_1 &= A\eta_1(z)e^{i\theta} + c. c., \\ T_1 &= A\vartheta_1(z)e^{i\theta} + c. c., & S_1 &= A\chi_1(z)e^{i\theta} + c. c., \end{aligned} \quad (14)$$

где $A(\xi, \tau)$ — амплитудная функция; *c. c.* — комплексно-сопряженные слагаемые.

Выражая компоненты скорости течения через функцию тока и подставляя в исходные уравнения (1), (2), получим уравнения для φ_1 , η_1 , ϑ_1 и χ_1 :

$$\begin{aligned} k^2 \varphi_1 \frac{d\rho_0}{dz} &= \left[-\omega i + \epsilon^2 M_x k^2 - \epsilon^2 M_z \frac{d^2}{dz^2} \right] \times \\ &\times \left[\omega i \left(\frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} - k^2 \varphi_1 \right) - \epsilon^2 \frac{d}{dz} \left[K_x k^2 \frac{d\varphi_1}{dz} - K_z \frac{d^3 \varphi_1}{dz^3} \right] + \epsilon^2 k \left[K_x k^3 \varphi_1 - K_z k \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} \right] \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\left(i\omega - \epsilon^2 k^2 M_x + \epsilon^2 M_z \frac{d^2}{dz^2} \right) \eta_1 = -ik\varphi_1 \frac{d\rho_0}{dz}, \quad (16)$$

$$\left(i\omega - \epsilon^2 k^2 M_{tx} + \epsilon^2 M_{tz} \frac{d^2}{dz^2} \right) \vartheta_1 = -ik\varphi_1 \frac{dT_0}{dz}, \quad (17)$$

$$\left(i\omega - \epsilon^2 k^2 M_{sx} + \epsilon^2 M_{sz} \frac{d^2}{dz^2} \right) \chi_1 = -ik\varphi_1 \frac{dS_0}{dz}. \quad (18)$$

Будем полагать, что коэффициенты турбулентной диффузии тепла и соли равны коэффициентам диффузии плотности, т. е. $M_x = M_{tx} = M_{sx}$ и $M_z = M_{tz} = M_{sz}$. Тогда в системе (15)–(18) можно ограничиться рассмотрением только первых двух уравнений. Результаты для последних двух уравнений будут следовать из анализа уравнения (16) заменой

$d\rho_0/dz$ на dT_0/dz и dS_0/dz соответственно. Из выражений (4)–(6) находим граничные условия с точностью до ϵ_1^1 .

На свободной поверхности:

$$k\omega^{-1}g_1\varphi_1 - \omega k^{-1}\frac{d\varphi_1}{dz} - ikK_x\epsilon^2\frac{d\varphi_1}{dz} + ik^{-1}\epsilon^2K_z\frac{d^3\varphi_1}{dz^3} - 2ik\epsilon^2K_z\frac{d\varphi_1}{dz} = 0, \quad (19)$$

$$K_z\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + K_xk^2\varphi_1 = 0 \quad \text{при} \quad z = 0. \quad (20)$$

На дне:

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad z = -1. \quad (21)$$

Граничные условия для функции η_1 имеют вид:

$$\eta_1 + k\omega^{-1}\varphi_1\frac{d\rho_0}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (22)$$

$$\eta_1 = 0 \quad \text{при} \quad z = -1. \quad (23)$$

Уравнения (15), (16) имеют малый параметр при старшей производной. Следуя [3, 4], эти уравнения при малом ϵ решаем асимптотическим методом Люстерника–Вишика, разлагая $\varphi_1, \eta_1, \omega$ в ряды:

$$\varphi_1(z) = \sum_{i=0} \varphi_{1i}(z)\epsilon^i + \epsilon \sum_{i=0} \epsilon^i \nu_i^1 \left(\frac{z+1}{\epsilon} \right) + \epsilon^2 \sum_{i=0} \epsilon^i \nu_i^0 \left(\frac{z}{\epsilon} \right), \quad (24)$$

$$\eta_1(z) = \sum_{i=0} \eta_{1i}\epsilon^i + \epsilon \sum_{i=0} \epsilon^i w_i^1 \left(\frac{z+1}{\epsilon} \right) + \epsilon^2 \sum_{i=0} \epsilon^i w_i^0 \left(\frac{z}{\epsilon} \right), \quad (25)$$

$$\omega = \omega_{01} + \sum_{i=1} \epsilon^i \omega_{i1}, \quad (26)$$

где $\varphi_{10}, \eta_{10}, \omega$ — решение уравнений (15), (16) и частота волны в невязком случае; $\nu_i^1((z+1)/\epsilon), w_i^1((z+1)/\epsilon)$ — погранслойные решения в окрестности дна; $\nu_i^0(z/\epsilon), w_i^0(z/\epsilon)$ — погранслойные решения в окрестности свободной поверхности — быстроубывающие функции при удалении от границы. После подстановки разложений (24)–(26) в (15), (16) получаем краевую задачу для φ_{10} , определяющую структуру моды в линейном приближении; погранслойные решения в окрестности верхней и нижней границ; краевую задачу для φ_{12} , из условия разрешимости которой находится декремент затухания волны $\delta\omega = \text{Im}(\epsilon^2\omega_{21})$ [5].

Скорость стокова дрейфа частиц жидкости определяется по формуле [6]

$$\vec{u}_s = \overline{\int_0^t \vec{u} dt' \nabla \vec{u}}. \quad (27)$$

Здесь \vec{u} — поле волновых эйлеровых скоростей, черта сверху над интегралом означает осреднение по периоду волны.

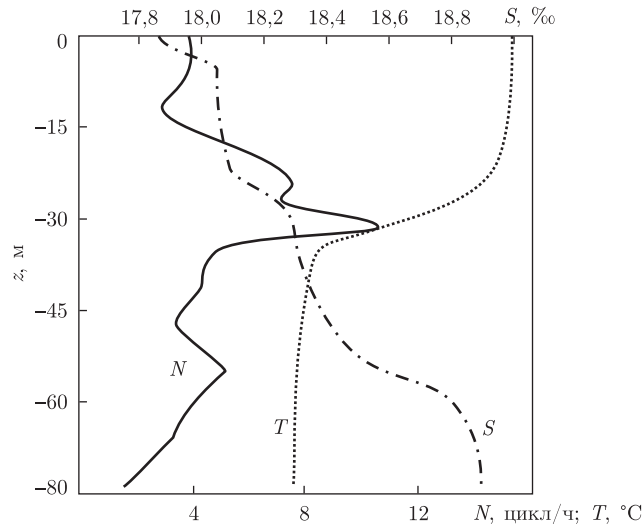


Рис. 1. Вертикальные профили частоты Брента-Вяйсяля N , солености S и температуры T

Вертикальная компонента скорости стокова дрейфа с точностью до членов, квадратичных по крутизне волны, имеет вид

$$w_s = 2\epsilon_1^2 k^2 A_1 A_1^* \delta\omega / \omega \omega^* \frac{d\varphi_{10}^2}{dz}, \quad (28)$$

где $A_1 = A \exp(\delta\omega t)$. При отсутствии турбулентности вертикальная компонента скорости стокова дрейфа равна нулю, так как $\delta\omega = 0$.

Вертикальный волновой поток массы определяется следующим образом:

$$q_\rho = \overline{w\rho} + \rho_0 w_s + \rho_0 \overline{w}_{\text{ind}}, \quad (29)$$

где $\overline{w}_{\text{ind}}$ — вертикальная компонента скорости индуцированного течения, пропорциональная горизонтальному градиенту квадрата амплитуды волны [5], поэтому последним слагаемым в выражении (29) пренебрегаем.

Волновой поток $\overline{w\rho}$ с точностью до членов, квадратичных по амплитуде, определяется по формуле

$$\frac{\overline{w\rho}}{\epsilon_1^2 A_1^2} = -ik\varphi_{10}(\epsilon^2 \eta_{12} + \epsilon w_0^1 + \epsilon^2 w_0^0)^* - ik(\eta_{10})^*(\epsilon^2 \varphi_{12} + \epsilon v_0^1 + \epsilon^2 v_0^0) + c. c. \quad (30)$$

Аналогично уравнению (30) определяются волновые потоки тепла и соли, для чего необходимо заменить ρ_0 на T_0 (или S_0); $d\rho_0/dz$ на dT_0/dz (или dS_0/dz для потока соли). Сделаем расчет вертикальных потоков тепла и соли для внутренних волн низшей моды при стратификации, характерной для шельфа Черного моря в весенне-летний период западнее Евпатории (по данным измерений температуры и солености в этом районе). Вертикальные профили частоты Брента-Вяйсяля N , температуры T , солености S иллюстрирует рис. 1. Коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной вязкости предполагаются постоянными и соответственно равными 1 и 10^{-4} м²/с, коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии — 0,5 и $5 \cdot 10^{-5}$ м²/с.

Турбулентные потоки тепла и соли определяются по формулам $t_f = -M_z dT_0/dz$, $s_f = -M_z dS_0/dz$. Рис. 2 демонстрирует профили турбулентного (сплошная линия) верти-

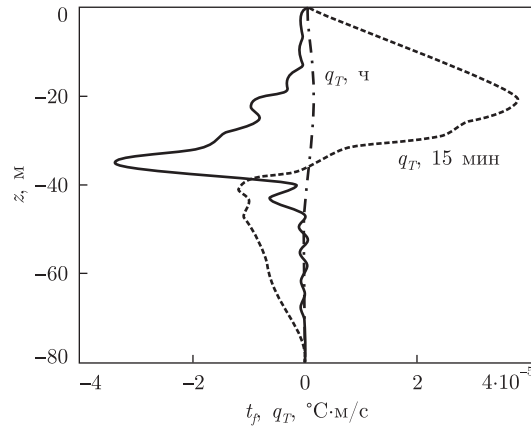


Рис. 2. Профили турбулентного (сплошная линия) и волнового потоков тепла

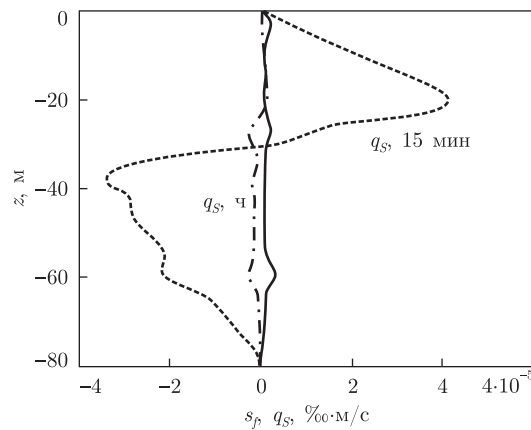


Рис. 3. Профили турбулентного (сплошная линия) и волнового потоков соли

кального потока тепла t_f и волнового потока тепла q_T при максимальной амплитуде волны низшей моды 0,3 м. Волнам с периодом 1 ч соответствует штрихпунктирная линия, а волнам с периодом 15 мин — пунктирная. У короткопериодных внутренних волн волновой поток тепла по абсолютной величине выше, чем у волн с периодом 1 ч и превышает турбулентный поток вне пикноклина. Рис. 3 демонстрирует турбулентный (сплошная линия) s_f и волновой q_S потоки соли. Как видно из рис. 3, абсолютная величина s_f сравнима с q_S для волн с периодом 1 ч и меньше потока у внутренних волн с периодом 15 мин.

У короткопериодных внутренних волн волновые потоки больше и превышают турбулентные потоки, причем определяющий вклад в волновой теплоперенос вносит вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа. С уменьшением глубины моря волновые потоки увеличиваются при неизменной частоте и амплитуде волны.

Таким образом, волновые потоки тепла и соли при учете турбулентной вязкости и диффузии отличны от нуля и обусловлены в основном вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа у короткопериодных внутренних волн. Скорость стокова дрейфа у волн низшей моды имеет разный знак выше и ниже пикноклина и препятствует накоплению растворенных веществ в слое скачка плотности на шельфе.

1. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. – Москва: Мир, 1981. – Ч. 1. – 478 с.
2. *Борисенко Ю. Д., Воронович А. Г., Леонов А. И., Миропольский Ю. З.* К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1976. – **12**, № 3. – С. 293–301.
3. *Черкесов Л. В.* Гидродинамика волн. – Киев: Наук. думка, 1980. – 259 с.
4. *Задорожный А. И.* Затухание длинных волн в экспоненциально стратифицированном море // Мор. гидрофиз. исследования. – 1975. – № 3. – С. 96–110.
5. *Слепышев А. А., Носова А. В.* Транспортные свойства внутренних волн // Мор. гидрофиз. журн. – 2008. – № 2. – С. 19–36.
6. *Longuet-Higgins M. S.* On the transport of mass by time varying ocean current // Deep Sea Res. – 1969. – **16**, No 5. – P. 431–447.

*Морской гидрофизический институт
НАН Украины, Севастополь*

Поступило в редакцию 26.07.2011

О. О. Слепишев, Г. В. Носова

Хвильові потоки на північно-західному шельфі Чорного моря

Асимптотичним методом багатомасштабних розкладів досліджено нелінійні ефекти при поширенні внутрішніх хвиль з урахуванням турбулентної в'язкості та дифузії. Визначено хвильові потоки тепла й солі за рахунок фазового зсуву коливань температури, солоності та вертикальної швидкості у хвилі. Показано, що вертикальна складова швидкості стоксова дрейфу відмінна від нуля. При цьому потоки тепла й солі в короткоперіодних внутрішніх хвилях перевершують турбулентні.

A. A. Slepyshev, A. V. Nosova

Wave's flows on the north-west shelf of the Black Sea

By the asymptotic method of multiscale decomposition, we study nonlinear effects at the propagation of internal waves with regard for turbulent viscosity and diffusion. Wave's flows of heat and salt are calculated with the account for phase shifts of fluctuations of the temperature, salinity, and vertical velocity in a wave. It is shown that the vertical component of the Stokes drift velocity is distinct from zero. The flows of heat and salt in small-period internal waves exceed the turbulent one.