Доповіді Національної академії наук України

4 • 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

В. М. Бойко, Р. О. Попович

Потенціальні закони збереження лінійних еволюційних рівнянь з одним потенціалом

(Представлено членом-кореспондентом НАН України А. Г. Нікітіним)

Доведено, що кожен найпростіший потенціальний закон збереження (тобто закон збереження, що включає один потенціал) будь-якого (1+1)*-вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку індуковано локальним законом збереження цього рівняння. Це твердження також справедливе для лінійних найпростіших потенціальних законів збереження* (1+1)*-вимірних лінійних еволюційних рівнянь непарного порядку, пов'язаних з лінійними потенціальними системами. Запропоновано ефективний критерій перевірки, коли квадратичний закон збереження найпростішої лінійної системи є чисто потенціальним законом збереження* (1+1)*-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку.*

Поняття потенціальних законів збереження диференціальних рівнянь виникло як природне узагальнення поняття локальних законів збереження. *Потенціальним законом збереження* системи $\mathcal{S}$ диференціальних рівнянь називають будь-який локальний закон збереження потенціальної системи, яка побудована з системи $\mathcal{S}$ через введення потенціалів з використанням локальних законів збереження системи $\mathcal{S}$ [1]. Цей термін вперше використано в роботі [2]. Потенціальні закони збереження можуть бути тривіальними в тому сенсі, що їх індуковано локальними законами збереження вихідної системи (див. [1, 3]). Ідея ітеративного введення потенціалів за допомогою локальних законів збереження потенціальних систем, які отримано на попередньому кроці, вперше запропоновано у відомій статті [4] і пізніше формалізовано у вигляді поняття *універсального абелевого накриття* диференціальних рівнянь у роботах [5, 6]. Незважаючи на те, що потенціальні закони збереження диференціальних рівнянь є цікавими і важливими об'єктами для вивчення в рамках симетрійного аналізу, нетривіальні та вичерпні результати щодо них отримано лише для декількох класів диференціальних рівнянь (див. відповідні огляди літератури та посилання у роботах [1, 3, 7]). У статті [8] узагальнено результати з [1] щодо лінійного рівняння теплопровідності і доведено, що всі потенціальні закони збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь другого порядку є тривіальними. Локальні закони збереження цих рівнянь добре вивчено. Точніше, простори локальних законів збереження включають лінійні закони збереження, характеристики яких залежать лише від незалежних змінних і є розв'язками відповідних спряжених рівнянь. Таким чином, задачу опису потенціальних законів цих рівнянь повністю розв'язано.

У даному повідомленні результати роботи [8] щодо найпростіших потенціальних законів збереження (що включають один потенціал) (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь другого порядку поширено на випадок рівнянь довільного порядку. Якщо порядок парний, узагальнення є прямим і вичерпним. Для рівнянь непарних порядків досліджено лише найпростіші потенціальні системи, побудовані за допомогою лінійних законів збереження.

Розглянемо довільне лінійне еволюційне рівняння порядку n з двома незалежними змінними t, x та однією залежною змінною u:

$$u_t = \sum_{i=0}^{n} A^i u_i, \tag{1}$$

де $A^i = A^i(t,x)$ — довільні достатньо гладкі функції, $A^n \neq 0$, $n \in \{2,3,4,\ldots\}$, u_t та u_i — похідні невідомої функції $u = u(t,x)$, тобто $u_t = \partial u/\partial t$, $u_i \equiv \partial^i u/\partial x^i$, $i = 1,\ldots,n$, а також $u_0 \equiv u$. У разі необхідності будемо також використовувати такі позначення: $u_x = u_1$, $u_{xx} = u_2$, $u_{xxx} = u_3$. Символи D_t і D_x позначають оператори повної похідної за змінними t і x відповідно, Div — повну дивергенцію, $\operatorname{Div}\mathcal{V} = D_tF + D_xG$ для набору $\mathcal{V} = (F,G)$ диференціальних функцій F й G. Щодо інших пов'язаних означень та позначень див. [8, 9].

У п. 1 зроблено короткий огляд результатів з [10] щодо локальних законів збереження для рівнянь вигляду (1), а найпростіший потенціальний фрейм, побудований у [8] для (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь другого порядку, узагальнено на випадок рівнянь довільного порядку. Аналогічне узагальнення дуальних перетворень Дарбу проведено в п. 2. Найпростіші потенціальні закони збереження (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь парного і непарного порядку досліджено у пп. 3 і 4 відповідно.

1. Локальні закони збереження та найпростіший потенціальний фрейм. Добре відомо, що будь-яке лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними $\mathcal{L}$ допускає косиметрії, які є функціями лише незалежних змінних і задовольняють спряжене рівняння $\mathcal{L}^\dagger$, причому кожен розв'язок рівняння $\mathcal{L}^\dagger$ є косиметрією рівняння $\mathcal{L}$. Більш того, будь-яка така косиметрія є характеристикою закону збереження рівняння $\mathcal{L}$ зі збережним вектором, лінійним за залежною змінною та її похідними. Згідно з [9, § 5.3], називатимемо такі закони збереження *лінійними*. Виявляється, що для будь-якого (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку його простір законів збереження вичерпують лінійні закони збереження, а тому цей простір ізоморфний простору розв'язків відповідного спряженого рівняння (див. [10]). Іншими словами, будь-яка косиметрія рівняння (1) не залежить від похідних функції u, а функція $\alpha = \alpha(t,x)$ є косиметрією рівняння (1) тоді і тільки тоді, коли вона є розв'язком спряженого рівняння

$$\alpha_t + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (A^i\alpha)_i = 0. \tag{2}$$

Будь-яка така косиметрія є характеристикою лінійного закону збереження рівняння (1) з канонічним збережним вектором $\mathcal{V} = (F,G)$, де

$$F = \alpha u, \qquad G = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i u_i, \tag{3}$$

а коефіцієнти $\sigma^i = \sigma^i(t,x)$ знаходяться з рекурентних співвідношень

$$\sigma^{n-1} = -\alpha A^n, \qquad \sigma^i = -\alpha A^{i+1} - \sigma^{i+1}_x, \qquad i = n-2,\ldots,0. \tag{4}$$

Для будь-якого (1+1)-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку простір його законів збереження породжено лінійними та квадратичними законами збереження [10]. Існують рівняння такого типу, що допускають нескінченні серії квадратичних законів збереження як завгодно високого порядку, так і рівняння, які взагалі не мають квадратичних законів збереження. Для того щоб формули та твердження, одержані для рівнянь парного порядку, були справедливими і у випадку непарного порядку, необхідно обмежитися розглядом лінійних локальних законів збереження, відповідних (лінійних) потенціальних систем та їх лінійних законів збереження.

Аналогічно роботі [8] досліджуємо об'єкти, пов'язані з найпростішими потенціальними системами рівняння (1), а саме потенціальними системами, породженими окремими локальними законами збереження [1]. При цьому важливим є використання перетворень Дарбу лінійних еволюційних рівнянь [11]. Докладне вивчення найпростіших потенціальних систем є необхідним для розуміння загального випадку, оскільки такі системи є складовими загальних потенціальних систем.

Вводячи *потенціал* v по нетривіальному канонічному збережному вектору (3), асоційованому з характеристикою $\alpha = \alpha(t,x) \neq 0$, отримуємо потенціальну систему

$$v_x = \alpha u, \qquad v_t = -\sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i u_i. \tag{5}$$

Вихідне рівняння (1) для u є диференціальним наслідком системи (5). Іншим диференціальним наслідком системи (5) є рівняння

$$v_t = -\sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i \left(\frac{v_x}{\alpha}\right)_i \tag{6}$$

на потенціальну залежну змінну v, яке називають *потенціальним рівнянням*, асоційованим з рівнянням (1) і характеристикою α. Існує бієкція між розв'язками потенціальної системи і потенціального рівняння завдяки, з одного боку, проекції $(u,v) \to v$ та, з іншого боку, співвідношенню $u = v_x/\alpha$ (див. [8]). Відповідність між розв'язками вихідного рівняння та потенціальної системи є взаємооднозначною лише з точністю до постійного доданка до v.

Для подальшого розгляду зручно використовувати іншу залежну змінну $w = \psi v$ замість v, де $\psi = 1/\alpha$. Функцію w називають *модифікованим потенціалом*, асоційованим з характеристикою $\alpha = 1/\psi$. Потенціальна система (5) і потенціальне рівняння (6), переписані в термінах w і ψ замість v і α, відповідно набувають вигляду

$$w_x - \frac{\psi_x}{\psi} w = u, \qquad w_t - \frac{\psi_t}{\psi} w = -\psi \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i u_i, \tag{7}$$

$$w_t = -\psi \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i \left(w_x - \frac{\psi_x}{\psi} w\right)_i + \frac{\psi_t}{\psi} w =: \sum_{i=0}^{n} B^i w_i. \tag{8}$$

Тут

$$B^i = -\psi\sigma^{i-1} + \psi\sum_{j=i}^{n-1}\binom{i}{j}\sigma^j\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)_{j-i}, \quad i = n, n-1, \ldots, 1, \quad B^0 = \frac{\psi_t}{\psi} + \psi\sum_{j=0}^{n-1}\sigma^j\left(\frac{\psi_x}{\psi}\right)_j.$$

Зокрема, $B^n = A^n$ й $B^{n-1} = A^{n-1} - A^n_x$. Систему (7) і рівняння (8) називають *модифікованою потенціальною системою* і *модифікованим потенціальним рівнянням*, асоційованими з характеристикою α. Такі зображення потенціальної системи і потенціального рівняння більш зручні для досліджень у рамках симетрійного аналізу.

Оскільки функція $v = 1$ є очевидним розв'язком рівняння (6), функція $w = \psi$ є розв'язком рівняння (8). Таким чином, перше рівняння системи (7) є насправді перетворенням Дарбу [11] рівняння (8) у рівняння (1).

2. Дуальні перетворення Дарбу. Чудову властивість, що коваріантність Дарбу виконується для (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь будь-якого порядку, вперше встановлено в роботі [12] (див. також [11, с. 17]). На відміну від попереднього пункту надалі для зручності викладу будемо вважати, що вихідним об'єктом розгляду є рівняння (8), записане у вигляді

$$w_t = \sum_{i=0}^{n} B^i w_i, \tag{9}$$

яке трактуємо як довільний представник класу лінійних еволюційних рівнянь.

Позначимо через $\mathrm{DT}[\varphi]$ перетворення Дарбу, побудоване за ненульовим розв'язком φ рівняння (9):

$$\mathrm{DT}[\varphi](w) = w_x - \frac{\varphi_x}{\varphi}w.$$

Перетворення Дарбу має корисну властивість дуальності. Сформулюємо її аналогічно роботі [8] у дещо відмінному від [11, § 2.4] вигляді.

Лема 1. *Нехай w^0 — фіксований ненульовий розв'язок рівняння* (9), *а перетворення Дарбу* $\mathrm{DT}[w^0]$ *відображає рівняння* (9) *у рівняння* (1). *Тоді $\alpha^0 = 1/w^0$ є розв'язком рівняння* (2), *спряженого до* (1), *і* $\mathrm{DT}[\alpha^0]$ *відображає рівняння* (2) *у рівняння, спряжене до* (9).

Зауваження 1. Аналогічно [8] перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[\alpha^0]$ назвемо *дуальним* до перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[w^0]$. Оскільки двічі спряжене рівняння збігається з вихідним, то двічі дуальне перетворення Дарбу є не що інше, як вихідне перетворення Дарбу. Це означає, що "тоді" у лемі 1 можна замінити на "тоді і тільки тоді".

Зауваження 2. Перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[w^0]$ з леми 1 є лінійним відображенням простору розв'язків рівняння (9) у простір розв'язків рівняння (1). Ядро цього відображення збігається з $\langle w^0\rangle$. Його образом є весь простір розв'язків рівняння (1). Дійсно, для будь-якого розв'язку u рівняння (1) можна знайти розв'язок w рівняння (9), що відображається в u. Для цього потрібно проінтегрувати систему (7) відносно w. Згідно з теоремою Фробеніуса система (7) є сумісною внаслідок рівняння (1). Тому $\mathrm{DT}[w^0]$ є біекцією між простором розв'язків рівняння (9), факторизованим за $\langle w^0\rangle$, та простором розв'язків рівняння (1).

У випадку парного порядку n лему 1 разом із зауваженням 2 можна переформулювати у термінах характеристик законів збереження.

Лема 2. *Нехай w^0 — ненульовий розв'язок рівняння* (9), *а перетворення Дарбу* $\mathrm{DT}[w^0]$ *відображає рівняння* (9) *у рівняння* (1). *Тоді $\alpha^0 = 1/w^0$ є характеристикою рівняння* (1) *і перетворення Дарбу* $\mathrm{DT}[\alpha^0]$ *відображає простір характеристик рівняння* (1) *у простір характеристик рівняння* (9).

3. Найпростіші потенціальні закони збереження: парний порядок. Якщо потенціальну систему побудовано шляхом введення потенціалу v за законом збереження рівняння (1), то кожен її локальний закон збереження є *найпростішим потенціальним законом збереження* рівняння (1). Будемо казати, що найпростіший потенціальний закон збереження $\overline{\mathcal{F}}$ рівняння (1) *індуковано* локальним законом збереження $\mathcal{F}$ рівняння (1), якщо $\overline{\mathcal{F}}$ включає збережний вектор, який є підняттям збережного вектора з $\mathcal{F}$ відносно проекції $\varpi\colon J^\infty(t,x|u,v) \to J^\infty(t,x|u)$, де $J^\infty(t,x|u,v)$ (відповідно $J^\infty(t,x|u)$) позначає простір струменів з незалежними змінними t, x та залежними змінними u, v (відповідно із залежною змінною u). На підставі твердження 2 з [3] це еквівалентно тому, що закон збереження $\overline{\mathcal{F}}$ містить збережний вектор, який залежить від t, x та похідних функції u.

Теорема 1. *Кожен найпростіший потенціальний закон збереження будь-якого* (1+1)-*вимірного лінійного еволюційного рівняння парного порядку індуковано локальним законом збереження цього ж рівняння.*

Доведення. Потенціали v і $\widetilde{v}$, які введено по еквівалентних збережних векторах, пов'язані перетворенням $\widetilde{v} = v + f[u]$, де $f[u]$ є функцією змінних t, x і похідних від u. Це перетворення зберігає властивість індукованості найпростіших потенціальних законів збереження локальними. Тому для вичерпного дослідження найпростіших потенціальних законів збереження рівнянь вигляду (1) з парним n достатньо вивчити локальні закони збереження потенціальних систем вигляду (5), які асоційовані з канонічними збережними векторами (3).

Зафіксуємо рівняння з класу (1) та його характеристику α і розглянемо відповідну потенціальну систему (5). Оскільки звичайний потенціал v пов'язаний з модифікованим потенціалом w точковим перетворенням, то можна вивчати закони збереження модифікованої потенціальної системи (7) замість системи (5). З точністю до еквівалентності збережних векторів на множині розв'язків системи (7) похідні від u можна виключити з будь-якого збережного вектора системи (7). Іншими словами, кожний локальний закон збереження $\overline{\mathcal{F}}$ модифікованої потенціальної системи (7) має збережний вектор, який залежить лише від t, x та похідних потенціалу w, а тому його індуковано локальним законом збереження модифікованого потенціального рівняння (8).

Оскільки рівняння (8), як і вихідне, є (1+1)-вимірним лінійним еволюційним рівнянням парного порядку, то його простір законів збереження вичерпують лінійні закони збереження. Довільна характеристика β системи (8) залежить лише від t та x і задовольняє рівняння, спряжене до (8). Згідно з лемою 2 існує характеристика $\widetilde{\alpha}$ рівняння (1) така, що $\beta = \mathrm{DT}[\alpha]\widetilde{\alpha}$.

Нехай $\mathcal{V}^1$, $\mathcal{V}^2$ — збережні вектори модифікованої потенціальної системи, які є підняттями канонічних збережних векторів вихідного рівняння (1) та модифікованого потенціального рівняння (8) і асоційовані з характеристиками $\widetilde{\alpha}$, β відповідно. Сума їх густин дорівнює

$$\beta w + \widetilde{\alpha} u = \left(\widetilde{\alpha}_x - \frac{\alpha_x}{\alpha}\widetilde{\alpha}\right) w + \widetilde{\alpha}\left(w_x + \frac{\alpha_x}{\alpha} w\right) = D_x(\widetilde{\alpha} w).$$

Позначимо через $\mathcal{V}^0$ тривіальний збережний вектор $(-D_x(\widetilde{\alpha}w), D_t(\widetilde{\alpha}w))$. Збережний вектор $\mathcal{V}^0 + \mathcal{V}^1 + \mathcal{V}^2$ системи (7) має нульову густину і тому є тривіальним збережним вектором (в дійсності — нульовим). Це означає, що збережні вектори $-\mathcal{V}^1$ і $\mathcal{V}^2$ еквівалентні.

Таким чином, доведено, що будь-який найпростіший потенціальний закон збереження рівняння (1) має збережний вектор, який є підняттям локального збережного вектора рівняння (1).

4. Найпростіші потенціальні закони збереження: непарний порядок. Теорему 1 не можна прямо поширити на випадок (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь непарного порядку, оскільки додатково до лінійних такі рівняння можуть мати квадратичні закони збереження. Тому обмежимося лише лінійними потенціальними структурами.

Теорема 2. *Кожен лінійний найпростіший потенціальний закон збереження* (1+1)*-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку, пов'язаний з лінійною потенціальною системою, індуковано локальним законом збереження цього ж рівняння.*

(1+1)-вимірне лінійне еволюційне рівняння $\mathcal{L}$ непарного порядку може також мати ще два типи найпростіших потенціальних законів збереження: 1) закони збереження потенціальних систем, побудованих за квадратичними збережними векторами рівняння $\mathcal{L}$; 2) квадратичні закони збереження найпростіших лінійних потенціальних систем.

Дослідження потенціальних законів збереження першого типу є складним. Так, на відміну від лінійного випадку, відповідні потенціальні системи, як правило, не мають аналогів потенціальних рівнянь. Судячи з усього, є лише одна можливість вивчення законів збереження таких систем — через пряме застосування загальних методів (див., наприклад, [1, 5, 7]).

Існує простий критерій перевірки, коли потенціальний закон збереження другого типу індуковано локальним законом збереження вихідного рівняння (1).

Теорема 3. *Нехай* $\alpha = \alpha(t, x)$ *— ненульова характеристика* (1+1)*-вимірного лінійного еволюційного рівняння непарного порядку* (1) *і*

$$\gamma = \Gamma w, \qquad \textit{де} \qquad \Gamma = \sum_{k=0}^{r} g^k(t, x) D_x^k, \qquad g^r \neq 0,$$

є характеристикою відповідного модифікованого потенціального рівняння (8)*. Тоді закон збереження потенціальної системи* (5)*, асоційований з* γ*, індуковано локальним законом рівняння* (1) *тоді і тільки тоді, коли розв'язок* $\psi = 1/\alpha$ *рівняння* (8) *належить ядру оператора* Γ*, тобто* $\Gamma\psi = 0$.

Доведення. Позначимо через $\mathcal{V}$ збережний вектор потенціальної системи (5), який отримано підняттям канонічного збережного вектора модифікованого потенціального рівняння (8), асоційованого з характеристикою γ, і таким перетворенням: $v = \alpha w$. Маємо, що

$$\begin{aligned}\operatorname{Div}\mathcal{V} &= \gamma\left(w_t - \sum_{i=0}^{n} B^i w_i\right) = \\ &= (\Gamma w)\left(w_t - \frac{\psi_t}{\psi}w + \psi\sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i u_i + \psi\sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i D_x^i\left(w_x - \frac{\psi_x}{\psi}w - u\right)\right) = \\ &= \psi\Gamma(\psi v)\left(v_t + \sum_{i=0}^{n-1}\sigma^i u_i\right) + \psi\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-D_x)^i(\psi\sigma^i\Gamma(\psi v))\right)(v_x - \alpha u) + D_x\Phi\end{aligned}$$

для деякої диференціальної функції Φ змінних u, v, явний вигляд якої знову не є суттєвим. (Це квадратична функція похідних від u та v з коефіцієнтами, що залежать від t і x.) Отже, збережний вектор $\mathcal{V}$ відповідає закону збереження потенціальної системи (5) з характеристикою λ, яка має компоненти

$$\psi\Gamma(\psi v), \qquad \psi\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-D_x)^i(\psi\sigma^i\Gamma(\psi v))\right).$$

Для того щоб характеристика λ була повністю зведеною, необхідно виключити з неї всі похідні v_k, $k = 1, \ldots, r + n - 1$, використовуючи диференціальні наслідки рівняння $v_x = \alpha u$. Зведений вигляд λ залежить від потенціалу v тоді і тільки тоді, коли $\Gamma\psi = 0$. Таким чином, доведення випливає з критерію індукованості потенціальних законів збереження локальними, запропонованого в [3, твердження 8].

Приклад 1. Побудуємо приклад, розпочинаючи з відповідного модифікованого потенціального рівняння з відомим простором квадратичних законів збереження. Розглянемо "лінійне рівняння Кортевега–де Фріза"

$$w_t = w_{xxx}, \tag{10}$$

яке збігається зі своїм спряженим. Як доведено в [10], простір його квадратичних законів збереження породжується законами збереження з характеристиками $\Gamma_{ml}w$, де $\Gamma_{ml} = D_x^m(3tD_x^2 + x)^l D_x^m$, l, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Як розв'язок ψ модифікованого потенціального рівняння виберемо функцію $w = x$. Перетворення Дарбу $\mathrm{DT}[x]$ відображає рівняння (10) у "вихідне" рівняння

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{x^2}u_x + \frac{3}{x^3}u, \tag{11}$$

яке також збігається зі своїм спряженим. Розв'язком α рівняння (11), дуальним до ψ, є $u = 1/\psi = 1/x$. $\Gamma_{ml}\psi = 0$ тоді і тільки тоді, коли $m \geqslant 2$. Тому повну множину незалежних найпростіших чисто потенціальних законів збереження рівняння (11), які одержані через введення потенціалу $\alpha = 1/x$, вичерпують квадратичні закони збереження, побудовані підняттям законів збереження відповідного модифікованого потенціального рівняння (10), які мають характеристики $\Gamma_{ml}w$, де або $m = 0$ та $l = 0, 1, 2, \ldots$, або $m = 1$ та $l = 1, 2, \ldots$.

Попередній аналіз показує, що одержані результати для найпростіших законів збереження можна поширити на випадок довільної кількості потенціалів, введених за лінійними законами збереження. Першим кроком у цьому має бути побудова всього лінійного потенціального фрейму для класу (1+1)-вимірних лінійних еволюційних рівнянь довільного порядку, як це було реалізовано для рівнянь другого порядку в роботі [8]. Очевидно, що лінійний потенціальний фрейм збігається з усім потенціальним фреймом у випадку рівнянь парного порядку. Розгляд нелінійних потенціальних систем, побудованих для рівнянь непарного порядку за квадратичними законами збереження, вимагає розвитку нових методів, які відрізняються від тих, що використано при дослідженні лінійних потенціальних систем.

Дослідження було підтримано Австрійським науковим фондом (FWF), проект P20632.

1. *Popovych R. O., Ivanova N. M.* Hierarchy of conservation laws of diffusion-convection equations // J. Math. Phys. – 2005. – **46**. – 043502, 22 p.
2. *Bluman G., Doran-Wu P.* The use of factors to discover potential systems or linearizations. Geometric and algebraic structures in differential equations // Acta Appl. Math. – 1995. – **41**. – P. 21–43.
3. *Kunzinger M., Popovych R. O.* Potential conservation laws // J. Math. Phys. – 2008. – **49**. – 103506, 34 p.
4. *Wahlquist H. D., Estabrook F. B.* Prolongation structures of nonlinear evolution equations // Ibid. – 1975. – **16**. – P. 1–7.
5. *Bocharov A. V., Chetverikov V. N., Duzhin S. V. et al.* Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics. – Providence: Amer. Math. Soc., 1999. – 333 p.
6. *Sergyeyev A.* On recursion operators and nonlocal symmetries of evolution equations // Proceedings of the Seminar on Differential Geometry. – Opava: Silesian Univ. in Opava, 2000. – P. 159–173.
7. *Bluman G. W., Cheviakov A. F., Anco S. C.* Applications of symmetry methods to partial differential equations. – New York: Springer, 2010. – 398 p.
8. *Popovych R. O., Kunzinger M., Ivanova N. M.* Conservation laws and potential symmetries of linear parabolic equations // Acta. Appl. Math. – 2008. – **100**. – P. 113–185.
9. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 639 с.

10. *Popovych R. O., Sergyeyev A.* Conservation laws and normal forms of evolution equations // Phys. Lett. A. – 2010. – **374**. – P. 2210–2217.
11. *Matveev V. B., Salle M. A.* Darboux transformations and solitons. – Berlin: Springer, 1991. – 120 p.
12. *Matveev V. B.* Darboux transformation and explicit solutions of the Kadomtsev–Petviashvili equation, depending on functional parameters // Lett. Math. Phys. – 1979. – **3**. – P. 213–216.

Інститут математики НАН України, Київ
Надійшло до редакції 22.09.2011

В. Н. Бойко, Р. Е. Попович

Потенциальные законы сохранения линейных эволюционных уравнений с одним потенциалом

Доказано, что каждый простейший потенциальный закон сохранения (т. е. закон сохранения, включающий один потенциал) любого (1+1)*-мерного эволюционного уравнения четного порядка, индуцирован локальным законом сохранения этого уравнения. Это утверждение также справедливо для линейных простейших потенциальных законов сохранения* (1+1)*-мерных эволюционных уравнений нечетного порядка, связанных с линейными потенциальными системами. Предложен эффективный критерий проверки, когда квадратичный закон сохранения является чисто потенциальным законом сохранения* (1+1)*-мерного эволюционного уравнения нечетного порядка.*

V. M. Boyko, R. O. Popovych

Potential conservation laws of linear evolution equations with single potential

It is proved that every simplest potential conservation law (i. e., a conservation law involving a single potential) of any (1+1)*-dimensional linear evolution equation of even order is induced by a local conservation law of the same equation. This claim is true also for linear simplest potential conservation laws of* (1+1)*-dimensional linear evolution equations of odd order, which are related to linear potential systems. We also derive an effective criterion for checking whether a quadratic conservation law of a simplest linear potential system is a purely potential conservation law of a* (1+1)*-dimensional linear evolution equation of odd order.*