УДК 512.54

Я. В. Лавренюк

Про групи зберігаючих міру гомеоморфізмів просторів Кантора

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Розглянуто групи $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ зберігаючих міру Бернуллі гомеоморфізмів просторів шляхів простих стаціонарних діаграм Браттелі B. *Знайдено підклас діаграм, для яких група $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ є замиканням своєї підгрупи $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$. Також знайдено підклас діаграм рангу 2, для яких група $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ строго містить замикання своєї підгрупи $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$.*

1. Діаграми Браттелі є важливим об'єктом не тільки в теорії операторних алгебр, а і в динаміці на множині Кантора.

Ми розглядаємо борелеву міру μ (міру Бернуллі) на просторах шляхів діаграм Браттелі, яка є інваріантною щодо кофінального відношення еквівалентності. Відомо, що у випадку унітальної простої стаціонарної діаграми Браттелі така міра є єдиною (див. [1]). У цій роботі ми будемо розглядати лише такі діаграми.

На просторі шляхів діаграми $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ природним чином діє гомеоморфізмами на себе однорідна симетрична група діаграми $S(\mathsf{B})$, елементи якої є бієктивними локальними ізометріями і зберігають кофінальне відношення еквівалентності. Зрозуміло, що μ є інваріантною щодо дії групи $S(\mathsf{B})$. З іншого боку, будь-яка інваріантна щодо $S(\mathsf{B})$ міра на $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ інваріантна і щодо кофінального відношення еквівалентності. Тобто інваріантність міри щодо кофінального відношення еквівалентності збігається з інваріантністю міри щодо $S(\mathsf{B})$.

Зрозуміло, що всі гомеоморфізми простору $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ на себе, які зберігають міру μ утворюють групу $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$. Також нескладно переконатися, що група $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ буде замкненою. Зауважимо, що $S(\mathsf{B})$ є індуктивною границею скінченних симетричних груп і не є замкненою підгрупою групи всіх гомеоморфізмів на себе простору $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ із топологією, індукованою метрикою $\mathcal{P}(\mathsf{B})$. Тому міра μ інваріантна і щодо групи $\overline{S(\mathsf{B})}$ — замикання $S(\mathsf{B})$.

Отже, є природним питання, чи буде група $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ замиканням своєї підгрупи $S(\mathsf{B})$, як у випадку, коли $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ є сферично-однорідним кореневим деревом, а B рангу 1 (містить по одній вершині на рівень) (див. [2]).

З іншого боку, в просторах шляхів деяких (навіть) стаціонарних діаграм є ізометричні кулі, які не переставляються гомеоморфізмами з $\overline{S(\mathsf{B})}$, а ізометричні кулі мають рівні міри (твердження 1). Тому у такому випадку група $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ строго містить $\overline{S(\mathsf{B})}$. Становить інтерес визначити трохи більшу за $S(\mathsf{B})$ підгрупу $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$ групи $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$, яка міститиме гомеоморфізми, що переставляють ізометричні кулі, та буде схожою на $S(\mathsf{B})$ своєю структурою, і вивчити питання, чи буде група $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ замиканням своєї підгрупи $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$.

Унітальні прості стаціонарні діаграми цілком визначаються своєю матрицею інцидентності. Виявилося, що у випадку, коли власне число Перрона такої матриці є алгебраїчним найбільшого можливого степеня (тобто степінь дорівнює порядку матриці), то група $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ є замиканням своєї підгрупи $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$ (теорема 3). Також для діаграм рангу 2 (тобто коли порядок матриці інцидентності цієї діаграми дорівнює 2) виділено підклас діаграм, для яких група $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ строго містить замикання своєї підгрупи $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$ (теорема 4).

2. Визначення у загальному випадку діаграм Браттелі та просторів шляхів цих діаграм можна подивитися, наприклад, в [3]. Стаціонарні діаграми Браттелі можна визначити таким чином.

Стаціонарною діаграмою Браттелі називається набір

$$\mathsf{B} = (\{V_i\}_{i\geqslant 0}, \{E_i\}_{i\geqslant 1}, \mathsf{s}, \mathsf{r}),$$

де V_i і E_j — послідовності копій одних і тих же множин $V_* = \{v_*^1, \ldots, v_*^n\}$ та $E_* = \{e_*^1, \ldots, e_*^k\}$, для $i \geqslant 1$ та $j \geqslant 2$, $|V_0| = 1$, E_1 — копія множини V_*, $V = \bigsqcup\limits_{i\geqslant 0} V_i$ — множина вершин діаграми B з розбиттям на диз'юнктне об'єднання *рівнів*, $E = \bigsqcup\limits_{i\geqslant 1} E_i$ — множина ребер діаграми B, відображення *фіксації початку* та *кінця*

$$\mathsf{s}\colon E_i \longrightarrow V_{i-1} \quad \text{і} \quad \mathsf{r}\colon E_i \longrightarrow V_i$$

діють однаково на кожному рівні, що більше 1, тобто визначаються як

$$\mathsf{s}\colon E_* \to V_* \quad \text{і} \quad \mathsf{r}\colon E_* \to V_*.$$

Для першого рівня вимагатимемо виконання таких умов: $\mathsf{r}\colon E_1 \longrightarrow V_1$ — відображення, що визначається тотожним відображенням $V_* \to V_*$, та для кожного $e \in E_1$ виконується $\mathsf{s}(e) = v_0$.

Зауважимо, що ми дозволяємо, щоб більш ніж одна стрілка e починалася і закінчувалася в тій же парі вершин $\mathsf{s}(e)$, $\mathsf{r}(e)$.

Унітальною стаціонарна діаграма буде у випадку, коли кожна вершина $v \in V_i$, $i \geqslant 1$, буде кінцем якогось ребра, тобто існуватиме таке $e \in E_i$, що $r(e) = v$.

Стаціонарна діаграма B називається *простою*, якщо для довільних v_*^i, $v_*^j \in V_*$ існує такий шлях $(e_1, \ldots, e_k)$ в B, що $\mathsf{s}(e_1) = v_*^i$ та $\mathsf{r}(e_k) = v_*^j$.

Матрицею інцидентності стаціонарної діаграми B є матриця $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, елементи якої визначаються так: $a_{ij} = |\{e \mid e \in E_*, \mathsf{s}(e) = j, \mathsf{r}(e) = i\}|$.

Простір шляхів $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ стаціонарної діаграми Браттелі — це множина послідовностей стрілок $\{(e_1, e_2, e_3, \ldots) \mid e_i \in E_i, \mathsf{r}(e_i) = \mathsf{s}(e_{i+1}), i \geqslant 1\}$, і він може бути ототожнений з множиною всіх послідовностей $(e_1, e_2, e_3, \ldots) \in V_* \times E_*^{\mathbb{N}}$ таких, що $\mathsf{r}(e_i) = \mathsf{s}(e_{i+1})$ для всіх i, $i \geqslant 1$. Пара $e_i e_{i+1}$, для якої $\mathsf{r}(e_i) = \mathsf{s}(e_{i+1})$, називається *допустимою парою.*

Також можна природно визначити сферично-однорідне кореневе дерево T, рівень $V_m(T)$ якого складається з $V_* \times E_*^{m-1}$, $V_0(T) = \{\varnothing\}$, і дві вершини, що належать сусіднім рівням, суміжні, якщо вони є початками однієї і тієї ж послідовності з $V_* \times E_*^{\mathbb{N}}$. В цьому дереві виділимо піддерево $T(\mathsf{B})$ з тим же коренем, яке містить $v \in V_m(T)$ тоді і лише тоді, коли v є початком деякої послідовності з $\mathcal{P}(\mathsf{B})$. Тобто множина вершин $T(\mathsf{B})$ — це множина початків послідовностей з $\mathcal{P}(\mathsf{B})$, і дві вершини, що належать сусіднім рівням, суміжні, якщо вони є початками однієї і тієї ж послідовності з $\mathcal{P}(\mathsf{B})$. Простір шляхів $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ також можна ототожнити з границею $\partial T(\mathsf{B})$ дерева $T(\mathsf{B})$. Кулею U_v, що відповідає вершині $v \in V(T(\mathsf{B}))$, або циліндричною множиною називається множина шляхів $\partial T(\mathsf{B})$, які проходять через вершину v. Циліндрична множина, що відповідає скінченному шляху $\overline{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ в B — це не що інше, як множина $[\overline{e}] = \{x = (x_i) \in \mathcal{P}(\mathsf{B}) \mid x_i = e_i, 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Множина циліндричних множин складає базу топології простору $\mathcal{P}(\mathsf{B})$. Ця топологія індукується ультраметрикою ρ, яка задається так: $\rho(\overline{e}, \overline{e}') = 2^{-m}$, де m — довжина спільного початку послідовностей $\overline{e}$ та

$\overline{e}'$, у випадку $\overline{e} \neq \overline{e}'$, і $\rho(\overline{e}, \overline{e}') = 0$, якщо $\overline{e} = \overline{e}'$. Кулями метричного простору $(\mathcal{P}(\mathsf{B}), \rho)$ є циліндричні множини. Зауважимо, що кулі $[\overline{e}]$ та $[\overline{e}']$ ізометричні, якщо $\mathsf{r}(e_m) = \mathsf{r}(e'_m)$.

Два шляхи з $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ є *кофінальними*, якщо обидві послідовності збігаються, починаючи з якогось номера. Легко бачити, що відношення кофінальності є відношенням еквівалентності.

Група $S_m(\mathsf{B})$ визначається як група всіх гомеоморфізмів $\partial T(\mathsf{B})$ на себе, які лише переставляють кулі, які відповідають таким шляхам $(e_1, \ldots, e_m)$ та $(e'_1, \ldots, e'_m)$ в B, що $\mathsf{r}(e_m) = \mathsf{r}(e'_m)$. Тобто $S_m(\mathsf{B})$ — це підгрупа всіх гомеоморфізмів $\mathrm{Homeo}\, \partial T(\mathsf{B})$, які фіксують координати шляхів, починаючи з $m+1$-ї координати.

Неважко помітити, що $S_m(\mathsf{B}) < S_{m+1}(\mathsf{B})$. *Однорідна симетрична група* $S(\mathsf{B})$ визначається як об'єднання зростаючого ланцюга груп $S_m(\mathsf{B})$ (цю групу також називають *повною AF-групою діаграми* B (див. [4]). З означення $S(\mathsf{B})$ випливає, що гомеоморфізми з цієї групи зберігають відношення кофінальності.

Для унітальної простої стаціонарної діаграми B існує єдина ймовірнісна борелева міра μ, інваріантна щодо відношення кофінальності [1]. Згідно з [5] для міри μ виконується рівність $\mu([\overline{e}]) = \mu([\overline{e}'])$ для довільних шляхів $\overline{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ та $\overline{e}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ таких, що $\mathsf{r}(e_m) = \mathsf{r}(e'_m)$. Ця міра буде інваріантною і для групи $S(\mathsf{B})$, бо вона зберігає відношення кофінальності. Всі гомеоморфізми простору $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ на себе, які зберігають міру μ, утворюють підгрупу $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ у групі $\mathrm{Homeo}\, \mathcal{P}(\mathsf{B})$ всіх гомеоморфізмів простору $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ на себе.

На групі $\mathrm{Homeo}(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$ всіх гомеоморфізмів $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ на себе визначається метрика $\overline{\rho}$, яка індукується метрикою ρ простору $\mathcal{P}(\mathsf{B})$: $\overline{\rho}(g, h) = \max\limits_{x \in \partial T} \rho_{\overline{\lambda}}(x^g, x^h)$ для всіх g та h з $\mathrm{Homeo}(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$.

Для деяких діаграм можлива ситуація, коли є два шляхи $\overline{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ та $\overline{e}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ такі, що $\mathsf{r}(e_m) \neq \mathsf{r}(e'_m)$ і, водночас, кулі $[\overline{e}]$ та $[\overline{e}']$ є ізометричними. Ми хочемо визначити більшу підгрупу $\mathrm{Homeo}\, \mathcal{P}(\mathsf{B})$, яка міститиме гомеоморфізми, що переставляють ізометричні кулі такого вигляду, буде схожою на $S(\mathsf{B})$ своєю структурою і у випадках, коли така ситуація не виникає, збігатися з нею.

Спочатку визначимо поняття перестановки ізометричних куль. Можна вважати, що множина стрілок першого рівня збігається з V_*. Нехай $\overline{v}^i_* = (v^i_*)$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Для двох шляхів $\overline{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ та $\overline{e}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ позначатимемо $e \sim e'$, якщо $[\overline{e}]$ ізометрично $[\overline{e}']$. Для v^i_*, v^j_* таких, що $v^i_* \sim v^j_*$, $i < j$ та $v^i_* = \mathsf{r}(v^i_*) \neq \mathsf{r}(v^j_*) = v^j_*$ існує бієкція

$$\psi_{ij} \colon \{b \mid b \in E_*, \mathsf{s}(b) = v^i_*\} \to \{c \colon c \in E_*, \mathsf{s}(c) = v^j_*\}$$

така, що з $\psi_{ij}(b) = c$ випливає, що $b \sim c$. Зафіксуємо її. Також зафіксуємо $\psi_{ji} = \psi_{ij}^{-1}$.

Нехай шляхи $\overline{e} = (e_1, \ldots, e_m)$ та $\overline{e}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ такі, що $e \sim e'$. Визначимо відображення $\phi_{ee'} \colon [\overline{e}] \to [\overline{e}']$. Якщо $\mathsf{r}(e_m) = \mathsf{r}(e'_m)$, то покладемо $\phi_{ee'}(e_1, \ldots, e_m, x_1, x_2, \ldots) = (e'_1, \ldots, e'_m, x_1, x_2, \ldots)$ для всіх можливих шляхів з $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ вигляду $(e_1, \ldots, e_m, x_1, x_2, \ldots)$. Якщо $\mathsf{r}(e_m) \neq \mathsf{r}(e'_m)$, то $\phi_{ee'}(e_1, \ldots, e_m, x_1, x_2, \ldots)$ визначається індуктивно. Нехай $\mathsf{r}(e_m) = v^i_*$ та $\mathsf{r}(e'_m) = v^j_*$. Якщо $\psi_{ij}(x_1) = y_1$ і $\mathsf{r}(x_1) = \mathsf{r}(y_1)$, то $\phi_{ee'} \colon [\overline{x}_1] \to [\overline{y}_1]$ вже визначено вище, і $\phi_{ee'}(e_1, \ldots, e_m, x_1, x_2, x_3, \ldots) = (e'_1, \ldots, e'_m, y_1, x_2, x_3, \ldots)$, інакше переходимо до наступного елемента послідовності: визначаємо $\psi_{kl}(x_2) = y_2$, де k і l такі, що $r(x_1) = v^k_*$, а $r(y_1) = v^l_*$, і якщо $\mathsf{r}(x_2) = \mathsf{r}(y_2)$, то $\phi_{ij}(e^i_*, x_1, x_2, x_3 \ldots) = (e^j_*, y_1, y_2, x_3, \ldots)$, інакше переходимо до наступного елемента і т. д. Перестановкою ізометричних куль $[\overline{e}]$ та $[\overline{e}']$ називається відображення $\phi_{ee'}$. Легко бачити, що $\phi_{ee'}$ індукує ізометрію кореневих дерев $T_{\overline{e}}(\mathsf{B}) \to T_{\overline{e}'}(\mathsf{B})$. З іншого боку, кожна ізометрія кореневих дерев індукує ізометрію відповідних границь. Звідси випливає, що $\phi_{ee'}$ є ізометрією.

Тепер ми можемо визначити групу гомеоморфізмів $S_m(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$, яка складається з усіх гомеоморфізмів, що лише переставляє кулі $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ рівня m. За побудовою послідовність груп $S_m(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$ утворюють зростаючий ланцюг підгруп групи гомеоморфізмів $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ на себе. Тому природно визначається підгрупа $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$, яка є об'єднанням зростаючого ланцюга підгруп $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$. Зауважимо, що якщо для діаграми B з того, що кулі $[\overline{e}]$ та $[\overline{e}']$ є ізометричними, випливає, що $\mathsf{r}(e_m) = \mathsf{r}(e'_m)$, то $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$ збігається з $S(\mathsf{B})$.

3. Сформулюємо основні результати роботи.

Твердження 1. *Група $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$ є підгрупою групи $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$.*

Зауважимо, що замиканням групи $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$ містить групу бієктивних локальних ізометрій простору $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ на себе. Тобто ми довели, що група бієктивних локальних ізометрій простору $\mathcal{P}(\mathsf{B})$ на себе є підгрупою $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$.

Твердження 2. *Група $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ є замкненою в топології, індукованій метрикою $\overline{\rho}$.*

Теорема 3. *Нехай B — проста стаціонарна унітальна діаграма Браттелі рангу n, матриця $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — матриця інцидентності діаграми B. Якщо виконується одна з таких умов:*

1) характеристичний многочлен матриці A незвідний;

2) ранг $n = 2$, визначник A дорівнює 0,

то група $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ є замиканням своєї підгрупи $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$.

Теорема 4. *Нехай B — проста стаціонарна унітальна діаграма Браттелі рангу 2, матриця $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{2}$ — матриця інцидентності діаграми B, λ_A — власне число Перрона матриці A, вектор $v_\lambda = (v_1, v_2)$ з додатними координатами — власний вектор матриці A^T, що відповідає λ_A, причому $v_1 + v_2 = 1$. Якщо λ_A натуральне, $v_1 \neq v_2$ і визначник матриці A від'ємний, то існує елемент g групи $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$, який не апроксимується елементами з $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$.*

Таким чином, ми встановили, що для простих стаціонарних унітальних діаграм Браттелі рангу 2 група $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ збігається із замиканням своєї підгрупи $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$, якщо або λ_A є ірраціональним, або визначник A дорівнює 0, або $v_1 = v_2$ (теорема 3), і строго містить це замикання, якщо λ_A є натуральним, визначник A від'ємний та $v_1 \neq v_2$ (теорема 4). Якщо λ_A є натуральним та визначник A додатний, то неважко виділити деякі підкласи діаграм, для яких група $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ строго міститиме замикання своєї підгрупи $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$, і доведення цього буде цілком аналогічне доведенню теореми 4. З іншого боку, у випадку, коли визначник A додатний, так само неважко навести приклади, коли спроба побудувати аналогічно доведенню теореми 4 послідовність $\{h_n\}$ призведе до розбіжної послідовності.

Також зауважимо, що для простих стаціонарних унітальних діаграм Браттелі рангу 2 група $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$ збігається із $S(\mathsf{B})$ тоді і лише тоді, коли $v_1 \neq v_2$.

1. *Durand F., Host B., Skau C.* Substitutional dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups // Ergodic Theory Dyn. Syst. – 1999. – **19**, No 4. – P. 953–993.
2. *Лавренюк Я. В., Некрашевич В. В.* Групи зберігаючих міру гомеоморфізмів множини Кантора // Доп. НАН України. – 2008. – № 6. – С. 28–31.
3. *Lavrenyuk Y., Nekrashevych V.* On classification of inductive limits of direct products of alternating groups // J. London Math. Soc. – 2007. – **75**, No 1. – P. 146–162.
4. *Dahl H.* AF equivalence relations associated to locally finite groups // J. Ramanujan Math. Soc. – 2008. – **23**, No 1. – P. 77–95.
5. *Bezuglyi S., Kwiatkowski J., Medynets K., Solomyak B.* Invariant measures on stationary Bratteli diagrams // Ergodic Theory Dyn. Syst. – 2010. – **30**, No 4. – P. 973–1007.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 07.06.2011

Я. В. Лавренюк

О группах сохраняющих меру гомеоморфизмов пространств Кантора

Рассмотрены группы $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ сохраняющих меру Бернулли гомеоморфизмов пространств путей простых стационарных диаграмм Браттели B. Найден подкласс диаграмм, для которых группа $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ является замыканием своей подгруппы $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$. Также найден подкласс диаграмм ранга 2, для которых группа $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ строго содержит замыкание своей подгруппы $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$.

Ya. V. Lavrenyuk

On groups of measure-preserving self-homeomorphisms of Cantor spaces

The groups $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ of measure-preserving self-homeomorphisms of path spaces of simple stationary Bratteli diagrams B are studied. A subclass of diagrams, for which $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ is a closure of the subgroup $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$, is found. A subclass of diagrams of rank 2, for which the group $\mathcal{M}_{\mathsf{B}}$ strictly contains the closure of its subgroup $S(\mathcal{P}(\mathsf{B}))$, is also distinguished.