УДК 517.9

Д. В. Лиманський

Умови підпорядкованості для тензорного добутку двох звичайних диференціальних операторів

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Дано опис лінійного простору $\mathscr{L}(P)$ мінімальних диференціальних поліномів $Q(D_1, D_2)$, підпорядкованих добутку $P(D_1, D_2) = p_1(D_1)p_2(D_2)$ двох звичайних диференціальних операторів у $L^\infty(\mathbb{R}^2)$-нормі. Показано, що якщо всі нулі символу $p_1(\xi_1)$ дійсні і прості, то вимірність простору $\mathscr{L}(P)$ залежить від числа дійсних нулів символу $p_2(\xi_2)$.

Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$. Розглянемо в $L^p(\Omega)$ систему диференціальних операторів порядку l:

$$P_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} a_{j\alpha}(x) D^\alpha, \qquad j \in \{1, \ldots, N\}, \tag{1}$$

з вимірними коефіцієнтами $a_{j\alpha}(\cdot)$. Розглядається задача про опис лінійного простору $\mathscr{L}^0_{p,\Omega}(P_1, \ldots, P_N)$ мінімальних диференціальних операторів $Q(x, D)$, що задовольняють апріорну оцінку

$$\|Q(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2}$$

з деякими сталими C_1, $C_2 > 0$, що не залежать від вибору f.

Цю задачу було вичерпно розв'язано Л. Хермандером [1, теорема 2.2] у випадку одного оператора $P(D)$ зі сталими коефіцієнтами, $p = 2$ та обмеженої області Ω. Застосовуючи цей критерій, Хермандер довів [1, теорема 2.5], що для тензорного добутку $P(D) = P_1(D) \otimes \otimes P_2(D)$ двох диференціальних операторів $P_1(D)$ і $P_2(D)$, що діють за різними змінними, тобто оператора вигляду

$$P(D) = P_1(D_1, \ldots, D_{p_1}, 0, \ldots, 0) \cdot P_2(0, \ldots, 0, D_{p_1+1}, \ldots, D_n), \tag{3}$$

простір $\mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P)$ збігається з лінійною оболонкою добутків операторів з $\mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P_k)$, $k = 1, 2$, тобто дорівнює тензорному добутку цих просторів, $\mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P) = \mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P_1) \otimes \mathscr{L}^0_{2,\Omega}(P_2)$.

При $N > 1$ простори $\mathscr{L}^0_{p,\Omega}(P_1, \ldots, P_N)$ описані для низки випадків. Добре відомо [2], що за деяких обмежень на коефіцієнти $a_{j\alpha}(\cdot)$ та область Ω система (1) є еліптичною тоді і лише тоді, коли вона є коерцитивною в просторі Соболєва $\overset{\circ}{W}{}^l_\infty(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$ (тобто коли оцінка (2) справджується для всіх мономів $Q(D) = D^\alpha$ порядку $|\alpha| \leqslant l$). При $p = 1; \infty$ цей критерій коерцитивності втрачає силу. Так, при $p = 1$ (і $N = 1$) Орнстейном [3] доведена неможливість оцінки (2) для конкретних диференціальних поліномів $Q(D)$ та $P(D)$

однакового порядку. Крім того, М. М. Маламудом в [4] показано, що з оцінки (2) при $p = \infty$ випливає тотожність

$$Q^l(x,\xi) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(x) P_j^l(x,\xi), \qquad x \in \Omega, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

для l-головних символів операторів $Q(x,D)$ і $\{P_j(x,D)\}_1^N$ (у випадку операторів зі сталими коефіцієнтами це твердження доведене ще раніше де Лю та Міркілом [5]). З цього результату випливає, що включення $Q \in \mathscr{L}^0_{\infty,\Omega}(P_1,\ldots,P_N)$ для оператора $Q(x,D)$ порядку l можливе лише в окремих випадках. Разом з тим оцінка (2) при $p = \infty$ справджується для еліптичної системи (1) та довільного монома $Q(D) = D^\alpha$ порядку $|\alpha| < l$ (системи з такою властивістю названі в [6] слабко коерцитивними в просторі Соболєва $\overset{\circ}{W}{}^l_\infty(\Omega)$). Для оператора $P(D)$ в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ порядку $l \geqslant 2$ зі сталими коефіцієнтами від $n \geqslant 3$ змінних справджується і обернене твердження — теорема де Лю та Міркіла [5]: слабка коерцитивність $P(D)$ в $\overset{\circ}{W}{}^l_\infty(\mathbb{R}^n)$ еквівалентна його еліптичності. Цей результат був узагальнений автором і М. М. Маламудом в [6] на випадок оператора $P(x,D)$ зі змінними коефіцієнтами. Там же отримані критерії слабкої коерцитивності для систем $\{P_j(D)\}_1^N$ зі сталими коефіцієнтами.

Далі йдеться про випадок $p = \infty$, $\Omega = \mathbb{R}^n$, $N = 1$ та оператор $P(D) := P_1(D)$ зі сталими коефіцієнтами. Простір $\mathscr{L}^0_{\infty,\mathbb{R}^n}(P)$ будемо позначати через $\mathscr{L}(P)$. З вищезазначених результатів М. М. Маламуда випливає, що для еліптичного оператора $P(D)$ порядку l базис простору $\mathscr{L}(P)$ утворюють $P(D)$ та диференціальні мономи $\{D^\alpha\}_{|\alpha|<l}$, тобто вимірність простору $\mathscr{L}(P)$ у цьому випадку є максимально можливою.

Надалі будемо називати поліном $P(\xi)$ *невиродженим*, якщо він не має дійсних нулів, тобто $P(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. У зв'язку з вищезгаданим результатом Хермандера виникає задача про опис просторів $\mathscr{L}(P)$ для операторів $P(D)$ вигляду (3). У цьому напрямку в [6, твердження 3.13] отримано аналогічне твердження для еліптичних операторів $P_1(D)$ та $P_2(D)$, повні символи яких є невиродженими. Тут умова невиродженості символів є суттєвою: вже у випадку добутку $P_1(D) \otimes P_2(D)$ двох однорідних еліптичних операторів вимірність простору $\mathscr{L}(P)$ є мінімально можливою, тобто $\mathscr{L}(P) = \{Q\colon Q = c_1 P + c_2\}$, хоча вимірність кожного з просторів $\mathscr{L}(P_k)$, $k = 1, 2$, є максимально можливою (див. [7, теорема 1]). Доведення останньої теореми грунтується на аналогічному результаті з [7] для диференціального монома $P(D) = D_1^l D_2^m$ від двох змінних. Воно використовує деякі результати з гармонічного аналізу, зокрема, властивості мультиплікаторів у $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

У цій роботі розглядається випадок оператора $P(D_1, D_2)$ від двох змінних, що дорівнює добутку двох звичайних диференціальних поліномів:

$$P(D_1, D_2) := p_1(D_1) p_2(D_2), \tag{4}$$

де символ першого множника $p_1(\xi_1)$ має спеціальний вигляд (усі його нулі є дійсними та простими), а символ другого $p_2(\xi_2)$ є довільним поліномом. Виявляється, що вимірність простору $\mathscr{L}(P)$ залежить від "ступеня невиродженості" символу $p_2(\xi_2)$: вона є максимальною, якщо сам поліном $p_2(\xi_2)$ невироджений, та мінімальною, якщо всі корені полінома $p_2(\xi_2)$ — дійсні числа. Має місце така теорема.

Теорема 1. *Нехай $P(D) = P(D_1, D_2)$ — диференціальний оператор вигляду* (4), *де $p_1(\xi_1)$ — поліном степеня $l \geqslant 1$, усі нулі якого є дійсними та простими, а $p_2(\xi_2)$ — довіль-*

ний поліном степеня $m \geqslant 1$. Тоді включення $Q \in \mathscr{L}(P)$ еквівалентне рівності

$$Q(\xi) = P(\xi)\frac{q(\xi_2)}{p_{22}(\xi_2)} + r(\xi_1), \tag{5}$$

де $p_{22}(\xi_2)$ — невироджений дільник символу $p_2(\xi_2)$ максимального степеня; $q(\xi_2)$ — довільний поліном степеня $\leqslant s := \deg p_{22}$; $r(\xi_1)$ — довільний поліном степеня $\leqslant l-1$, якщо $s = m$, і довільна стала $r(\xi_1) \equiv r$, якщо $s < m$. При цьому $\dim \mathscr{L}(P) = m+l+1$ у першому випадку та $\dim \mathscr{L}(P) = s+2$ — у другому.

Наслідок. *В умовах теореми 1 вимірність простору $\mathscr{L}(P)$ є мінімально можливою тоді і тільки тоді, коли поліном $p_2(\xi_2)$ має лише дійсні нулі, тобто $s = 0$.*

Позначення та допоміжні твердження. Нехай $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$ — поля відповідно дійсних та комплексних чисел; $\mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{Z}_+^n := \mathbb{Z}_+ \times \ldots \times \mathbb{Z}_+$ (n множників). Далі, $D_k := -i\partial/\partial x_k$, $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$; для мультиіндексу $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ покладемо $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n}$ та $\xi^\alpha := \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

Якщо $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} a_\alpha(x) D^\alpha$ — диференціальний оператор порядку l, то позначимо через $P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant l} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ його символ, через $P^l(x, D) := \sum_{|\alpha| = l} a_\alpha(x) D^\alpha$ — його головну частину, а через $P^l(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = l} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ — відповідний головний символ. Через $\deg P$ позначимо степінь полінома $P(\xi)$, а через $\deg_{\xi_k} P$ — його степінь за змінною ξ_k.

Наведемо деякі відомості, що стосуються апріорних оцінок у $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Нагадаємо [8, розд. 4], що *мультиплікатори* в просторі $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ — це перетворення Фур'є–Стілтьєса скінченних борелівських мір в $\mathbb{R}^n$. Вони є, зокрема, рівномірно неперервними обмеженими в $\mathbb{R}^n$ функціями [9, ч. 2, розд. 7]. Мультиплікатори в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ утворюють алгебру, яку позначатимемо $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Зазначимо, що $\mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, $m < n$.

Твердження 1 [5, твердження 1] (див. також [10, с. 207, лема 1]). *Оцінка*

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1\|P(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{6}$$

тобто включення $Q \in \mathscr{L}(P)$, еквівалентна тотожності

$$Q(\xi) \equiv M(\xi)P(\xi) + N(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \text{де} \qquad M, N \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n). \tag{7}$$

Нагадаємо [2, 11], що оператор $P(D)$ порядку l називається *еліптичним*, якщо $P^l(\xi) \neq 0$ для $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Зокрема, всі звичайні диференціальні оператори вважатимемо еліптичними.

Твердження 2 [4] (див. також [6]). *Якщо $P(D)$ — еліптичний диференціальний поліном порядку l, то $Q \in \mathscr{L}(P)$ для будь-якого оператора $Q(D)$ порядку $\leqslant l-1$. Якщо, додатково, $n = 1$, поліном $P(\xi)$ є невиродженим, а $Q(\xi)$ — довільний поліном степеня $\leqslant l$, то функція $M(\xi) := Q(\xi)P^{-1}(\xi)$ є мультиплікатором в $L^\infty(\mathbb{R}^1)$.*

Схема доведення теореми 1. За умовою, $n = 2$ та оператор $P(D_1, D_2)$ має вигляд (4). Оскільки поліном $p_2(\xi_2)$ довільний, можна вважати, що старший коефіцієнт полінома $p_1(\xi_1)$ дорівнює 1. Позначимо через $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ дійсні попарно різні нулі полінома $p_1(\xi_1)$. Тоді

$$p_1(\xi_1) = (\xi_1 - \lambda_1)(\xi_1 - \lambda_2) \cdots (\xi_1 - \lambda_l).$$

Поліном $p_2(\xi_2)$ має вигляд

$$p_2(\xi_2) = p_{21}(\xi_2)p_{22}(\xi_2), \qquad \text{де} \qquad p_{21}(\xi_2) \neq 0 \qquad \text{при} \qquad \xi_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

У випадку $s = m$ вважаємо $p_{22}(\xi_2) := p_2(\xi_2)$ та $p_{21}(\xi_2) := 1$.

1. Нехай поліном $Q(\xi)$ має вигляд (5). Покажемо, що $Q \in \mathscr{L}(P)$. Справді, поліном $p_1(\xi_1)$ є еліптичним порядку l; тому за твердженнями 1 і 2

$$r(\xi_1) = \widetilde{m}(\xi_1)p_1(\xi_1) + \widetilde{n}(\xi_1) \tag{8}$$

для деяких $\widetilde{m}(\xi_1)$, $\widetilde{n}(\xi_1) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1) \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$. У випадку $s < m$ маємо $r(\xi_1) \equiv r$, і можна вважати, що $\widetilde{m}(\xi_1) \equiv 0$ та $\widetilde{n}(\xi_1) \equiv r$. Далі, оскільки поліном $p_{22}(\xi_2)$ еліптичний та невироджений порядку s, то за твердженням 2 функції

$$\widetilde{m}_1(\xi_2) := q(\xi_2)p_{22}^{-1}(\xi_2) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1), \qquad \widetilde{m}_2(\xi_2) := p_{22}^{-1}(\xi_2) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1). \tag{9}$$

З (8), (9) та твердження 1 випливає, що $Q = (\widetilde{m}_1 + \widetilde{m}\widetilde{m}_2)P + \widetilde{n} \in \mathscr{L}(P)$.

2. Навпаки, нехай $Q \in \mathscr{L}(P)$. Доведемо, що $Q(\xi)$ має вигляд (5). За твердженням 1 оцінка (6) еквівалентна тотожності (7), де M, $N \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$. Оскільки функції $M(\cdot)$ та $N(\cdot)$ обмежені, з тотожності (7) випливає, що $\deg_{\xi_1} Q \leqslant l$ та $\deg_{\xi_2} Q \leqslant m$.

Розвинемо поліном $Q(\xi)$ за степенями $\xi_1 - \lambda_1$. Маємо

$$Q(\xi) = (\xi_1 - \lambda_1)\widetilde{Q}(\xi) + Q_1(\xi_2), \qquad \text{де} \qquad \deg_{\xi_1} \widetilde{Q} \leqslant l - 1, \quad \deg Q_1 \leqslant m.$$

Підставимо цей вираз у тотожність (7) та покладемо в ній $\xi_1 = \lambda_1$, дістанемо, що $Q_1(\xi_2) \equiv$ $\equiv Q_1 \in \mathbb{C}$. Далі, розвинемо поліном $\widetilde{Q}(\xi)$ за степенями $\xi_1 - \lambda_2$ і покладемо $\xi_1 := \lambda_2$ в (7) і т. д. Міркуючи надалі таким чином, дійдемо рівності

$$Q(\xi) = A_0(\xi_2)p_1(\xi_1) + A_1(\xi_1 - \lambda_1)(\xi_1 - \lambda_2)\cdots(\xi_1 - \lambda_{l-1}) + \cdots + A_{l-1}(\xi_1 - \lambda_1) + A_l, \tag{10}$$

де $A_0(\xi_2)$ — деякий поліном степеня $\leqslant m$, а $A_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{1, \ldots, l\}$. Зображення (10) еквівалентне такому:

$$Q(\xi) = A_0(\xi_2)p_1(\xi_1) + a_1\xi_1^{l-1} + \cdots + a_{l-1}\xi_1 + a_l, \quad \text{де} \quad a_k \in \mathbb{C}, \qquad k \in \{1, \ldots, l\}. \tag{11}$$

(i) Нехай $s = m$, тобто поліном $p_2(\xi_2) = p_{22}(\xi_2)$ невироджений. Тоді зображення (11) має вигляд (5), де

$$q(\xi_2) := A_0(\xi_2), \qquad r(\xi_1) := a_1\xi_1^{l-1} + \cdots + a_{l-1}\xi_1 + a_l.$$

(ii) Нехай $s < m$ і μ — (дійсний) нуль полінома $p_{21}(\xi_2)$ кратності $\varkappa$, тобто

$$p_{21}(\xi_2) = (\xi_2 - \mu)^{\varkappa}\widetilde{p}_{21}(\xi_2), \qquad \text{де} \qquad \widetilde{p}_{21}(\mu) \neq 0.$$

Підставляючи $\xi_2 := \mu$ у (7), отримуємо $a_k = 0$ при $k \in \{1, \ldots, l-1\}$. Значить, $r(\xi_1) \equiv a_l \in \mathbb{C}$.

Обмежимо тепер тотожність (7) на криву $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, задану співвідношенням

$$p_1(\xi_1)(\xi_2 - \mu)^{\varkappa} = 1.$$

Тоді маємо

$$\frac{A_0(\xi_2)}{(\xi_2 - \mu)^{\varkappa}} + a_l = M(\xi)\widetilde{p}_{21}(\xi_2)p_{22}(\xi_2) + N(\xi), \qquad \text{де} \qquad \xi \in \Gamma. \tag{12}$$

Оскільки $\widetilde{p}_{21}(\mu) \neq 0$ та $p_{22}(\mu) \neq 0$, права частина в (12) є обмеженою, коли $\xi_2 \to \mu$ вздовж кривої Γ. Звідси випливає, що поліном $A_0(\xi_2)$ ділиться на $(\xi_2 - \mu)^{\varkappa}$.

Міркуючи аналогічно щодо інших нулів полінома $p_{21}(\xi_2)$, отримуємо, що $A_0(\xi_2)$ ділиться на $p_{21}(\xi_2)$, тобто

$$A_0(\xi_2) = p_{21}(\xi_1)q(\xi_2), \qquad \text{де} \qquad \deg q \leqslant m - \deg p_{21} = \deg p_{22} = s.$$

Це і означає, що $Q(\xi)$ має вигляд (5) з $r(\xi_1) \equiv r := a_l \in \mathbb{C}$.

Теорему 1 повністю доведено.

Автор висловлює щиру подяку М. М. Маламуду за увагу до роботи та цінні зауваження.

1. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1959. – 131 с.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – Москва: Наука, 1996. – 480 с.
3. *Ornstein D.* A non-inequality for differential operators in the L_1 norm // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1962. – **11**, No 1. – P. 40–49.
4. *Маламуд М. М.* Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$ // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1995. – **56**. – С. 206–261.
5. *De Leeuw K., Mirkil H.* A priori estimates for differential operators in L_∞ norm // Ill. J. Math. – 1964. – **8**, No 1. – P. 112–124.
6. *Лиманский Д. В., Маламуд М. М.* Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева // Мат. сб. – 2008. – **199**, № 11. – С. 75–112.
7. *Лиманский Д. В.* Об оценках для тензорного произведения двух однородных эллиптических операторов // Укр. мат. вiсник. – 2011. – **8**, № 1. – С. 101–111.
8. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – Москва: Мир, 1973. – 344 с.
9. *Рудин У.* Функциональный анализ. – Москва: Мир, 1975. – 448 с.
10. *Boman J.* Supremum norm estimates for partial derivatives of functions of several real variables // Ill. J. Math. – 1972. – **16**, No 2. – P. 203–216.
11. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Эдиториал УРСС, 2002. – 312 с.

Донецький національний університет

Надійшло до редакції 14.06.2011

Д. В. Лиманский

Условия подчиненности для тензорного произведения двух обыкновенных дифференциальных операторов

Дано описание линейного пространства $\mathscr{L}(P)$ минимальных дифференциальных полиномов $Q(D_1, D_2)$, подчиненных произведению $P(D_1, D_2) = p_1(D_1)p_2(D_2)$ двух обыкновенных дифференциальных операторов в $L^\infty(\mathbb{R}^2)$-норме. Показано, что если все нули символа $p_1(\xi_1)$ вещественные и простые, то размерность пространства $\mathscr{L}(P)$ зависит от числа вещественных нулей символа $p_2(\xi_2)$.

D. V. Limanskii

Subordination conditions for a tensor product of two ordinary differential operators

The description of the linear space $\mathscr{L}(P)$ of minimal differential polynomials $Q(D_1, D_2)$ subordinated in the $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ norm to the product $P(D_1, D_2) = p_1(D_1)p_2(D_2)$ of two ordinary differential operators is given. It is shown that if all the zeros of the symbol $p_1(\xi_1)$ are real and simple, the dimension of the space $\mathscr{L}(P)$ depends on the number of real zeros of the symbol $p_2(\xi_2)$.