УДК 539.3

В. В. Чехов

Диференціювання рівнянь методу скінченних елементів для великих деформацій у тензорно-матричній формі

(Представлено академіком НАН України О. М. Гузем)

Отримано аналітичні вирази для компонент матриці Якобі тензорно-матричної системи рівнянь МСЕ, що описує великі деформації нестисливого пружного тіла. При виведенні використовувався апарат диференціювання за тензорним аргументом. Результат одержано для випадків загального тривимірного розрахунку, а також для плоскої деформації.

У роботі [1] одержано і протестовано систему нелінійних алгебраїчних рівнянь методу скінченних елементів (МСЕ), яка дозволяє без застосування покрокового приросту навантаження розв'язувати задачі статичного навантаження конструкцій із нестисливих матеріалів з урахуванням великих деформацій:

$$\begin{cases} \{\vec{A}(\{\vec{R}\},\{p\})\} = \{\vec{K}(\{\vec{R}\},\{p\})\} + 2([L] + ({}^{[4]}[M]\{\vec{R}\})\cdot\{\vec{R}\})\{\vec{R}\} - \{\vec{f}\} = \{\vec{0}\}; \\ \{B(\{\vec{R}\})\} = \{0\}, \end{cases} \tag{1}$$

де $\{\vec{f}\}$ — стовпець вузлових навантажень; $\{\vec{R}\}$ та $\{p\}$ — невідомі (відповідно, стовпець вузлових радіус-векторів деформованої конфігурації і стовпець величин середнього тиску в скінченних елементах (СЕ), який відповідає умові нестисливості); стовпець $\{B\}$ відображує змінення об'єму елементів при деформуванні та має такі компоненти:

$$B_{[\alpha]} = \iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} (III((\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r})_{[\alpha]}) - 1)\, d\overset{0}{v}.$$

Тут α — номер СЕ; III — кубічний інваріант; $(\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r})_{[\alpha]} = \sum\limits_i \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\vec{R}_{[i]}$ — скінченноелементна апроксимація градієнта місця $\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r}$ у середині α-го СЕ ($N_{[\alpha i]}$ — функція форми, що належить до α-го СЕ й i-го вузла), інші матричні об'єкти утворюються в результаті операції збирання по всіх СЕ ($\{\vec{K}\} = \sum\limits_\alpha \{\vec{K}\}_{[\alpha]}$, $[L] = \sum\limits_\alpha [L]_{[\alpha]}$, ${}^{[4]}[M] = \sum\limits_\alpha {}^{[4]}[M]_{[\alpha]}$) та мають такі компоненти:

$$\vec{K}_{[\alpha i]} = -p_{[\alpha]} \iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} (\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r})^{-1}_{[\alpha]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\, d\overset{0}{v}, \qquad L_{[\alpha ij]} = \iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} {}_1\Psi_{[\alpha]} \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha j]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\, d\overset{0}{v},$$

$$M_{[\alpha ijkl]} = \iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} {}_2\Psi_{[\alpha]} \left(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha j]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha k]}\right) \left(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha l]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]}\right) d\overset{0}{v},$$

де i, j, k — номери вузлів сітки; ${}_1\Psi_{[\alpha]}$ та ${}_2\Psi_{[\alpha]}$ — функції від інваріантів міри деформації з рівняння стану матеріалу α-го СЕ у формі Фінгера [2].

Дана робота присвячена побудові для системи (1) матриці Якобі $[\partial(\vec{A},B)/\partial(\vec{R},p)]$, яка необхідна для застосування ефективних методів розв'язання [3]. Ця задача значно полегшується, якщо зважати на структурованість системи (1): компонентами матриць, що її складають, можуть бути не лише числа, але й взагалі тензорні об'єкти різних рангів. Це приводить до залучення апарату диференціювання за тензорним аргументом. Порядок такого диференціювання описано в [2] на прикладі випадку, коли аргумент має 2-й ранг. Неважко поширити цей підхід на диференціювання за тензором 1-го рангу. Наприклад, для скалярної функції $a(\vec{r})$ можна записати:

$$\delta a = \frac{\partial a}{\partial r^s}\delta r^s = \frac{\partial a}{\partial r^s}\delta r^t \delta_t^s = \frac{\partial a}{\partial r^s}\delta r^t \vec{e}^{\,s}\cdot\vec{e}_t = \left(\frac{\partial a}{\partial r^s}\vec{e}^{\,s}\right)\cdot(\delta r^t \vec{e}_t) = \frac{da}{d\vec{r}}\cdot d\vec{r}.$$

Отже, похідні від скаляра й, таким чином, від тензорів 1-го та 2-го рангів будуть тензорами, відповідно, 1-го, 2-го та 3-го рангів:

$$\frac{da}{d\vec{r}} = \frac{\partial a}{\partial r^s}\vec{e}^{\,s}, \qquad \frac{d\vec{f}}{d\vec{r}} = \frac{\partial f^s}{\partial r^t}\vec{e}_s\vec{e}^{\,t}, \qquad \frac{d\mathbf{q}}{d\vec{r}} = \frac{\partial q^{st}}{\partial r^p}\vec{e}_s\vec{e}_t\vec{e}^{\,p}.$$

Зокрема,

$$\frac{d\vec{r}}{d\vec{r}} = \mathbf{1},$$

де $\mathbf{1} = \vec{e}^{\,s}\vec{e}_s$ — метричний тензор. З варіації скалярного добутку

$$\delta(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}) = (\delta\mathbf{p})\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{q} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}}\cdot\delta\vec{r}\right)\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{q}}{d\vec{r}}\cdot\delta\vec{r} =$$
$$= \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}}\cdot\mathbf{1}\cdot\delta\vec{r}\right)\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{q}}{d\vec{r}}\cdot\delta\vec{r} = \left(\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}}\cdot\vec{e}^{\,s}\right)\cdot\mathbf{q}\vec{e}_s + \mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{q}}{d\vec{r}}\right)\cdot\delta\vec{r}$$

випливає

$$\frac{d(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})}{d\vec{r}} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}}\cdot\vec{e}^{\,s}\right)\cdot\mathbf{q}\vec{e}_s + \mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{q}}{d\vec{r}}.$$

Неважко отримати також й інші необхідні співвідношення для диференціювання складних функцій:

$$\frac{d(\mathbf{p}\cdot\cdot\mathbf{q})}{d\vec{r}} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}}\cdot\vec{e}^{\,s}\right)\cdot\cdot\mathbf{q}\vec{e}_s + \mathbf{p}\cdot\cdot\frac{d\mathbf{q}}{d\vec{r}}, \qquad \frac{d(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})}{d\vec{r}} = \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}}\cdot\vec{e}^{\,s}\right)\cdot\mathbf{p}\vec{e}_s + \mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}},$$

$$\frac{d(\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}\cdot\mathbf{p})}{d\vec{r}} = \left(\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}}\cdot\vec{e}^{\,s}\right)\cdot\mathbf{p} + \mathbf{p}\cdot\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}}\cdot\vec{e}^{\,s}\right)\right)\cdot\mathbf{p}\vec{e}_s + \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}},$$

$$\frac{d(\mathbf{p}^{-1})}{d\vec{r}} = -\mathbf{p}^{-1}\cdot\left(\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}}\cdot\vec{e}^{\,s}\right)\cdot\mathbf{p}^{-1}\vec{e}_s, \qquad \frac{d(a\mathbf{p})}{d\vec{r}} = \mathbf{p}\frac{da}{d\vec{r}} + a\frac{d\mathbf{p}}{d\vec{r}},$$

$$\frac{d(\vec{f}\vec{g})}{d\vec{r}} = \frac{d\vec{f}}{d\vec{r}}\cdot\vec{e}^{\,s}\vec{g}\vec{e}_s + \vec{f}\frac{d\vec{g}}{d\vec{r}}, \qquad \frac{d(a\vec{f})}{d\vec{r}} = \vec{f}\frac{da}{d\vec{r}} + a\frac{d\vec{f}}{d\vec{r}},$$

$$\frac{d(ab)}{d\vec{r}} = b\frac{da}{d\vec{r}} + a\frac{db}{d\vec{r}}, \qquad \frac{d(a^3)}{d\vec{r}} = 3a^2\frac{da}{d\vec{r}}.$$

При використанні цих співвідношень для побудови матриці Якобі системи (1) операцію тензорного диференціювання позначатимемо символом частинної похідної, оскільки самі тензори виступають тепер у ролі матричних компонент.

Матриця Якобі буде, очевидно, складатися з чотирьох блоків:

$$\left[\frac{\partial(\vec{A}, B)}{\partial(\vec{R}, p)}\right] = \begin{bmatrix} \left[\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{R}}\right] & \left[\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial p}\right] \\ \left[\dfrac{\partial B}{\partial\vec{R}}\right] & [0] \end{bmatrix}.$$

Отримаємо вирази для цих блоків. У блоці $\left[\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{R}}\right]$ позначимо

$$\left[\frac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{R}}\right] = \sum_\alpha\left(\left[\frac{\partial\vec{K}}{\partial\vec{R}}\right]_{[\alpha]} + 2\left(\left[\frac{\partial([L]\{\vec{R}\})}{\partial\vec{R}}\right]_{[\alpha]} + \left[\frac{\partial((({}^{[4]}[M]\{\vec{R}\})\cdot\{\vec{R}\})\{\vec{R}\})}{\partial\vec{R}}\right]_{[\alpha]}\right)\right) =$$
$$= \sum_\alpha([\mathbf{DK}]_{[\alpha]} + 2([\mathbf{DL}]_{[\alpha]} + [\mathbf{DM}]_{[\alpha]})).$$

Застосування апарату тензорного диференціювання та необхідних перетворень дає для матриць $[\mathbf{DK}]_{[\alpha]}$, $[\mathbf{DL}]_{[\alpha]}$ і $[\mathbf{DM}]_{[\alpha]}$ такі компоненти:

$$\mathbf{DK}_{[\alpha in]} = \frac{\partial\vec{K}_{[\alpha i]}}{\partial\vec{R}_{[n]}} = p_{[\alpha]}\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} (\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r})^{-1}_{[\alpha]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[an]}(\overset{0}{\vec{\nabla}}\vec{r})^{-1}_{[\alpha]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha i]}d\overset{0}{v},$$

$$\mathbf{DL}_{[\alpha in]} = \frac{\partial([L]_{[\alpha]}\{\vec{R}\})_{[i]}}{\partial\vec{R}_{[n]}} = \sum_j \vec{R}_{[j]}\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}}\left(\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha j]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha i]}\right)\frac{\partial_1\Psi_{[\alpha]}}{\partial\vec{R}_{[n]}}d\overset{0}{v} + \mathbf{1}L_{[\alpha in]},$$

$$\mathbf{DM}_{[\alpha in]} = \frac{\partial}{\partial\vec{R}_{[n]}}((({}^{[4]}[M]_{[\alpha]}\{\vec{R}\})\cdot\{\vec{R}\})\{\vec{R}\})_{[i]} =$$
$$= \sum_k\sum_j\left((\vec{R}_{[k]}\cdot\vec{R}_{[j]})\left(\sum_l\vec{R}_{[l]}\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}}\left(\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha l]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha k]}\right)\left(\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha j]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha i]}\right)\frac{\partial_2\Psi_{[\alpha]}}{\partial\vec{R}_{[n]}}d\overset{0}{v} +\right.\right.$$
$$+ \mathbf{1}\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} {}_2\Psi_{[\alpha]}\left(\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha n]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha k]}\right)\left(\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha j]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha i]}\right)d\overset{0}{v}\Bigg) +$$
$$+ \vec{R}_{[k]}\vec{R}_{[j]}\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}} {}_2\Psi_{[\alpha]}\left(\left(\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha k]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha n]}\right)\left(\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha j]}\cdot\overset{0}{\vec{\nabla}}N_{[\alpha i]}\right) +\right.$$

$$+\left(\overset{0}{\vec\nabla}N_{[\alpha k]}\cdot\overset{0}{\vec\nabla}N_{[\alpha j]}\right)\left(\overset{0}{\vec\nabla}N_{[\alpha n]}\cdot\overset{0}{\vec\nabla}N_{[\alpha i]}\right)\Bigg)d\overset{0}{v}\Bigg).$$

Блок $\left[\dfrac{\partial\vec A}{\partial p}\right]$ з урахуванням того, що $\left[\dfrac{\partial\vec A}{\partial p}\right]=\left[\dfrac{\partial\vec K}{\partial p}\right]=\dfrac{\partial}{\partial\{p\}}\sum\limits_\alpha\{\vec K\}_{[\alpha]}=\dfrac{\partial}{\partial\{p\}}\sum\limits_\beta\{\vec K\}_{[\beta]}$, має такі компоненти:

$$\left(\frac{\partial\vec A}{\partial p}\right)_{[i\alpha]}=\frac{\partial\sum_\beta\vec K_{[\beta i]}}{\partial p_{[\alpha]}}=\frac{\partial\vec K_{[\alpha i]}}{\partial p_{[\alpha]}}=-\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}}(\overset{0}{\vec\nabla}\vec r)^{-1}_{[\alpha]}\cdot\overset{0}{\vec\nabla}N_{[\alpha i]}\,d\overset{0}{v},$$

Нарешті, блок $\left[\dfrac{\partial B}{\partial\vec R}\right]$ знайдемо для двох варіантів розрахунку.

Загальний тривимірний випадок. Детермінант градієнта місця має вигляд

$$III((\overset{0}{\vec\nabla}\vec r)_{[\alpha]})=S_1^1S_2^2S_3^3+S_1^2S_2^3S_3^1+S_1^3S_3^2S_2^1-S_1^1S_2^3S_3^2-S_2^2S_1^3S_3^1-S_3^3S_1^2S_2^1,$$

де введено позначення $S_p^q=\sum\limits_i\overset{0}{\nabla}_pN_{[\alpha i]}R^q_{[i]}$. Застосування тензорного диференціювання $\partial S_p^q/\partial\vec R_{[n]}=\overset{0}{\nabla}_pN_{[\alpha n]}\overset{0}{\vec e}{}^q$ та необхідних перетворень дає

$$\left(\frac{\partial B}{\partial\vec R}\right)_{[\alpha n]}=\frac{\partial B_{[\alpha]}}{\partial\vec R_{[n]}}=\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}}\frac{\partial III((\overset{0}{\vec\nabla}\vec r)_{[\alpha]})}{\partial\vec R_{[n]}}=\sum_i\sum_j\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}}\Big(\overset{0}{\nabla}_1N_{[\alpha n]}\Big(\overset{0}{\nabla}_2N_{[\alpha i]}\overset{0}{\nabla}_3N_{[\alpha j]}-$$

$$-\overset{0}{\nabla}_3N_{[\alpha i]}\overset{0}{\nabla}_2N_{[\alpha j]}\Big)+\overset{0}{\nabla}_2N_{[\alpha n]}\Big(\overset{0}{\nabla}_3N_{[\alpha i]}\overset{0}{\nabla}_1N_{[\alpha j]}-\overset{0}{\nabla}_1N_{[\alpha i]}\overset{0}{\nabla}_3N_{[\alpha j]}\Big)+\overset{0}{\nabla}_3N_{[\alpha n]}\times$$

$$\times\Big(\overset{0}{\nabla}_1N_{[\alpha i]}\overset{0}{\nabla}_2N_{[\alpha j]}-\overset{0}{\nabla}_2N_{[\alpha i]}\overset{0}{\nabla}_1N_{[\alpha j]}\Big)\Big)d\overset{0}{v}\Big(R^2_{[i]}R^3_{[j]}\overset{0}{\vec e}{}^1+R^3_{[i]}R^1_{[j]}\overset{0}{\vec e}{}^2+R^1_{[i]}R^2_{[j]}\overset{0}{\vec e}{}^3\Big).$$

Для випадку *плоскої деформації* градієнт місця має вигляд $(\overset{0}{\vec\nabla}\vec r)_{[\alpha]}=S^{\bar q}_{\bar p}\overset{0}{\vec e}{}^{\bar p}\overset{0}{\vec e}_{\bar q}+\overset{0}{\vec e}{}^3\overset{0}{\vec e}_3$ (за індексами з рискою підсумовувати до 2). Тому $III((\overset{0}{\vec\nabla}\vec r)_{[\alpha]})=S_1^1S_2^2-S_1^2S_2^1$ та

$$\left(\frac{\partial B}{\partial\vec R}\right)_{[\alpha n]}=\sum_i\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}}(\overset{0}{\nabla}_1N_{[\alpha n]}\overset{0}{\nabla}_2N_{[\alpha i]}-\overset{0}{\nabla}_2N_{[\alpha n]}\overset{0}{\nabla}_1N_{[\alpha i]})(R[i]^2\overset{0}{\vec e}{}^1-R[i]^1\overset{0}{\vec e}{}^2)=$$

$$=\sum_i\iiint\limits_{\overset{0}{v}_{[\alpha]}}\Big(\overset{0}{\vec\nabla}N_{[\alpha n]}\cdot\overset{0}{\vec\nabla}N_{[\alpha i]}\Big)^3d\overset{0}{v}\Big(\overset{0}{\vec e}{}^{\bar s}\overset{0}{\vec e}_{\bar s}\cdot\vec R_{[i]}\Big)\overset{0}{\vec e}_3.$$

Диференціювання інваріантів міри деформації. В отриманих виразах для компонент підматриці $\left[\dfrac{\partial\vec A}{\partial\vec R}\right]$ зустрічаються похідні функцій ${}_1\Psi$ і ${}_2\Psi$ від інваріантів міри деформації $I(\mathbf{b})$ і $II(\mathbf{b})$. Для відшукання цих похідних необхідно продиференціювати $I(\mathbf{b})$ і $II(\mathbf{b})$. Диференціювання міри деформації Фінгера після спрощень дає

$$\frac{\partial}{\partial \vec{R}_{[n]}} \mathbf{b}_{[\alpha]} = \frac{\partial\Big((\overset{0}{\vec{\nabla}} \vec{r})^T_{[\alpha]} \cdot (\overset{0}{\vec{\nabla}} \vec{r})_{[\alpha]} \Big)}{\partial \vec{R}_{[n]}} = \sum_i \Big(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha n]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]} \Big) \Big(\overset{0}{\vec{e}}{}^s \vec{R}_{[i]} \overset{0}{\vec{e}}_s + \vec{R}_{[i]} \mathbf{1} \Big),$$

звідки похідна лінійного інваріанту міри Фінгера дорівнює

$$\frac{\partial}{\partial \vec{R}_{[n]}} I(\mathbf{b}_{[\alpha]}) = \mathbf{1} \cdot \cdot \frac{\partial \mathbf{b}_{[\alpha]}}{\partial \vec{R}_{[n]}} = 2 \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha n]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} \vec{r}_{[\alpha]},$$

а похідна квадратичного інваріанту —

$$\frac{\partial}{\partial \vec{R}_{[n]}} II(\mathbf{b}_{[\alpha]}) = \frac{1}{2} \frac{\partial (I(\mathbf{b}_{[\alpha]})^2 - I(\mathbf{b}^2_{[\alpha]}))}{\partial \vec{R}_{[n]}} = 2 \sum_i \sum_j \sum_k \Big(\Big(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha n]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha k]} \Big) \times$$

$$\times \Big(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha j]} \Big) - \Big(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha n]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha i]} \Big) \Big(\overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha j]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha k]} \Big) \Big) (\vec{R}_{[i]} \cdot \vec{R}_{[j]}) \vec{R}_{[k]}.$$

Щоб визначити та продиференціювати самі функції ${}_1\Psi$ і ${}_2\Psi$, необхідно задати використовувану модель матеріалу.

Диференціювання функцій моделі матеріалу здійснимо на прикладі матеріалу Муні [4, 5]:

$${}_1\Psi = {}_1C + I(\mathbf{b})\, {}_2C, \qquad {}_2\Psi = -{}_2C.$$

З використанням наведених вище виразів для похідних від інваріантів $\mathbf{b}$ виходить

$$\frac{\partial {}_1\Psi_{[\alpha]}}{\partial \vec{R}_{[n]}} = 2\, {}_2C \overset{0}{\vec{\nabla}} N_{[\alpha n]} \cdot \overset{0}{\vec{\nabla}} \vec{r}_{[\alpha]}, \qquad \frac{\partial {}_2\Psi_{[\alpha]}}{\partial \vec{R}_{[n]}} = 0.$$

Таким чином, за допомогою апарату диференціювання за тензорним аргументом одержано аналітичні вирази для компонент матриці Якобі системи (1). Використання цих співвідношень дозволяє істотно покращити якість та збільшити швидкість розрахунків, оскільки при їх відсутності доведеться або застосовувати методи, які не використовують матрицю Якобі, або апроксимувати цю матрицю через скінченні різниці (що значно знижує швидкість розрахунку). Наприклад, при розв'язанні задачі про вивертання циліндра [1] аналітичне обчислення матриці Якобі порівняно з скінченнорізницевим прискорило розрахунок приблизно в 60 разів (з однієї години до однієї хвилини).

1. *Чехов В. В.* Матричное уравнение метода конечных элементов для несжимаемого материала при больших деформациях // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 10. – С. 71–77.
2. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. – Москва: Наука, 1980. – 512 с.
3. *Дэннис Дж. (мл.), Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений: Пер. с англ. – Москва: Мир, 1988. – 440 с.
4. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – Москва: Мир, 1976. – 466 с.

5. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – Киев: Наук. думка, 1973. – 272 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 06.07.2011

В. В. Чехов

Дифференцирование уравнений метода конечных элементов для больших деформаций в тензорно-матричной форме

Получены аналитические выражения для компонент матрицы Якоби тензорно-матричной системы уравнений МКЭ, описывающей большие деформации несжимаемого упругого тела. При выведении использовался аппарат дифференцирования по тензорному аргументу. Результат получен для случаев общего трехмерного расчета, а также для плоской деформации.

V. V. Chekhov

Differentiation of the equations of the finite element method for large strains in the tensor-matrix form

An analytical expression for components of the Jacobian matrix for a tensor-matrix system of equations within the finite element method describing large strains of an incompressible elastic body has been derived with the use of the apparatus of a tensor differentiation. The result has been obtained for cases of the common three-dimensional analysis and of the plane strain.