Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2012

ФІЗИКА

УДК 536.764

А. В. Бабич

Критические размерности систем с анизотропной модуляцией параметров порядка

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины В. Ф. Клепиковым)

Предложена модель, позволяющая описывать критические явления в нелинейных системах, допускающих критические точки с анизотропной пространственной модуляцией параметров порядка. Найдены нижняя и верхняя критические размерности для такой модели. Обсуждаются возможные типы критического поведения в таких системах. Полученные результаты применяются при исследованиях фазовых переходов в анизотропных системах различной природы.

Фазовые переходы (ФП) второго рода являются одним из наиболее интенсивно исследуемых объектов теоретической физики. Большое число ФП наблюдалось и исследовалось в самых различных физических системах [1–3]. Изначально основным объектом применения теории ФП были различные конденсированные среды. Однако такие основные положения теории ФП как принцип спонтанного нарушения симметрии, теоретико-групповой подход позволяют использовать результаты теории ФП для описания явлений, имеющих, на первый взгляд, очень мало общего с вышеупомянутыми конденсированными системами. Одним из важнейших свойств систем вблизи критических точек (КТ) является аномальное возрастание критических флуктуаций [4]. Интенсивность флуктуаций, в свою очередь, зависит от размерности пространства. В современной теории критических явлений пространственная размерность d обычно рассматривается как непрерывная величина [5]. Она фигурирует в термодинамических соотношениях как один из параметров системы.

Как упоминалось выше, критическое поведение системы сильно от нее зависит. Одним из следствий такой зависимости является существование двух критических (или граничных) размерностей (КР). Нижней КР называется размерность пространства, ниже которой ФП невозможен при положительной температуре или, другими словами, при нижней КР голдстоуновские бозоны начинают сильно взаимодействовать [6]. Верхняя КР определяет границу применимости приближения среднего поля для описания критических явлений. Таким образом, если мы отложим на оси размерность системы, то пара критических размерностей делит ось размерности на три интервала (рис. 1). В первом сильные флуктуации парамет-

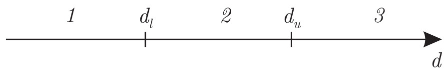

Рис. 1

ров порядка препятствуют возникновению упорядоченных состояний. Во втором (флуктуационная область) ФП возможен, но приближение среднего поля неприменимо. В третьем флуктуации подавлены, приближение среднего поля применимо.

Стоит отметить, что если в теории конденсированного состояния рассмотрение размерностей $d > 3$ является лишь искусственным приемом, позволяющим рассчитывать критические показатели с помощью ренормгрупповых методов, то в теории элементарных частиц и теории гравитации рассмотрение фазовых переходов в пространствах различной размерности является необходимым [7, 8]. Критические размерности важны не только как границы, определяющие степень влияния флуктуаций. Их значения также необходимы для вычисления критических показателей в флуктуационной области с помощью асимптотических методов, основанных на применении ренормгруппы.

Критические размерности. В простейшей модели, описывающей ФП, нижняя и верхняя КР равны 2 и 4 соответственно. В более сложных случаях, таких как системы с мультикритическими точками и точками Лифшица, КР зависит от параметров модели. Мы рассматриваем модель, описывающую ФП в системе с КТ, которая является обобщением моделей, позволяющих исследовать критическое поведение систем с точками Лифшица и мультикритичными точками. Данная модель была предложена в [9]. В ней учитываются как градиенты ПП произвольного порядка, так и произвольные нелинейности. В окрестности рассматриваемой критической точки эффективный гамильтониан может быть записан следующим образом:

$$H = \int d^m x_i d^{d-m} x_c \left\{ \frac{r}{2}\eta^2 + \frac{\gamma}{2}(\Delta_i^{1/2}\eta)^2 + \frac{\delta}{2}(\Delta_c^{1/2}\eta)^2 + \frac{\beta}{2}(\Delta_i^{p/2}\eta)^2 + u\eta^{N+1} \right\}, \tag{1}$$

где η — скалярный ПП; d — размерность физического пространства; r, γ, δ, β, u — материальные параметры. Физическое пространство разбито на два подпространства с размерностями m и $d-m$, в одном из которых лежат волновые векторы модуляции, а в другом — нет. Они обозначены индексами i и c, соответственно. Мы будем считать m и d непрерывными величинами; Δ_c и Δ_i — операторы Лапласа, действующие в соответствующих подпространствах. При этом $\Delta^l = \Delta(\Delta^{l-1})$, для нецелых значений l соответствующие операторы определяются с помощью обратного фурье-преобразования. В КТ $r = \gamma = 0$. Далее старший порядок градиентов p будем называть порядком точки Лифшица.

Основными параметрами, определяющими критическое поведение системы, описываемой моделью (1), является порядок высших градиентов p, степень нелинейности модели N и параметр m, определяющий степень анизотропии.

Нижняя критическая размерность d_l определяется следующим требованием: в пространстве с $d < d_l$ невозможно возникновение упорядочения при ненулевой температуре. С точки зрения термодинамики это означает, что при приближении к точке ФП флуктуационный вклад в энтропию ведет себя сингулярным образом [10]. Пусть вблизи точки ФП температурная зависимость флуктуационного вклада в энтропию имеет вид

$$S_{fl} = s\tau^{\sigma(d)}, \tag{2}$$

где $\tau = (T - T_c)/T_c$ — приведенная температура, а $\sigma(d)$ рассматривается как функция размерности пространства, s от температуры не зависит. Мы интересуемся критическим поведением S_{fl}, поэтому несложно увидеть, что

$$\lim_{\tau\to 0} S_{fl} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \sigma(d) < 0, \\ \infty, & \text{если} \quad \sigma(d) > 0. \end{cases}$$

Таким образом, в зависимости от знака $\sigma(d)$ флуктуационный вклад в энтропию при $T \longrightarrow T_c$ будет либо расходиться, либо стремиться к нулю. Таким образом, d_l может быть найдена из условия

$$\sigma(d_l) = 0. \tag{3}$$

Для определения $\sigma(d)$ найдем зависимость флуктуационного вклада в энтропию от температуры:

$$S_{fl}(\tau) = \frac{\partial G_{fl}}{\partial \tau}, \tag{4}$$

где G_{fl} — флуктуационная часть термодинамического потенциала, которую для рассматриваемой модели можно вычислить по формуле

$$G_{fl} = A \int d^m q_i d^{d-m} q_c \left(\ln \frac{\beta q_i^{2p} + \delta q_c^2 + \alpha\tau}{\pi T} \right). \tag{5}$$

Здесь A — не зависящий от температуры коэффициент. Подставляя (7) в (6), получаем для S_{fl}:

$$S_{fl} = \alpha A \int d^m q_i d^{d-m} q_c (\beta q_i^{2p} + \delta q_c^2 + \alpha\tau)^{-1}, \tag{6}$$

преобразуем выражение (6) к виду

$$S_{fl} = \tau^{-1} \alpha A \int d^m q_i d^{d-m} q_c^2 \{\beta (q_i \tau^{-1/(2p)})^{2p} + \gamma (q_c \tau^{-1/2})^2 + \alpha\}^{-2}. \tag{7}$$

После замены переменных $\kappa_i = q_i \tau^{-1/(2p)}$, $\kappa_c = q_c \tau^{-1/2}$ окончательное выражение для S_{fl} принимает следующий вид

$$S_{fl} = \tau^{\sigma(d)} I(\kappa_i, \kappa_c). \tag{8}$$

Здесь $\sigma(d) = 2 - (m/2p + (d-m)/2)$, а функция $I(\kappa_i, \kappa_c)$ не зависит от t. Окончательно для $\sigma(d)$

$$\sigma(d) = \frac{m}{2p} + \frac{d-m}{2} - 1. \tag{9}$$

Из (3) и (9) получаем

$$d_l = m\left(1 - \frac{1}{p}\right) + 2. \tag{10}$$

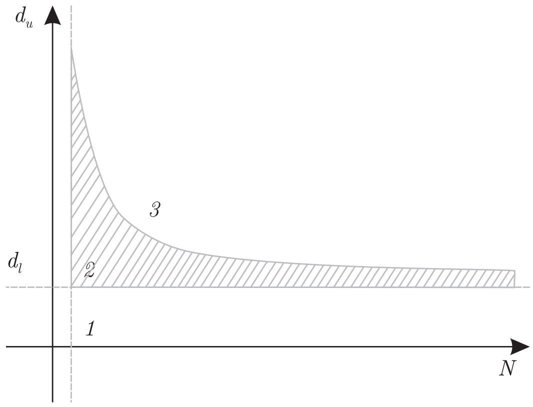

Рис. 2

Верхняя КР в модели (1) может быть вычислена несколькими способами. Первый подобен тому, которым была найдена нижняя КР. Необходимо сравнить флуктуационный вклад в термодинамическую величину (например теплоемкость) с ее равновесным значением. В [9] верхняя КР была найдена из условия устойчивости неподвижной точки соответствующего РГ преобразования. Зависимость d_u от параметров модели имеет вид

$$d_u = m\left(1 - \frac{1}{p}\right) + 2\frac{N+1}{N-1}. \tag{11}$$

Одним из основных свойств систем с точками Лифшица является анизотропный скейлинг. В пространстве с размерностью, равной верхней КР [9], рассматриваемая система инвариантна относительно масштабных вариационных преобразований с генератором

$$X = \frac{N-1}{2}\frac{\partial}{\partial x_c} + \frac{N-1}{2p}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial \varphi}. \tag{12}$$

Вариационная инвариантность модели является крайне важной при интегрировании соответствующих вариационных уравнений. В изотропном случае ($m = d$) соответствующие вариационные уравнения в пространстве с размерностью d_u инвариантны относительно конформной группы.

Обсуждение результатов. Сравнивая выражения (10) и (11), находим зависимость размеров флуктуационной области от степени нелинейности модели:

$$\Delta d \equiv d_u - d_l = \frac{4}{N-1}. \tag{13}$$

Видно, что

$$\lim_{N\to\infty}(d_u - d_l) = 0. \tag{14}$$

То есть интервал Δd, в котором для описания критических явлений неприменима теория среднего поля, уменьшается с возрастанием степени нелинейности модели (рис. 2). Это соответствует физическим представлениям о том, что в системах с более сильной связью флуктуации должны быть подавлены сильнее, чем в слабосвязных изотропных и однородных системах.

Таблица 1. Критические размерности для различных типов критических точек (ТЛ — точка Лифшица, МКТ — мультикритическая точка)

Тип точки	Нижняя КР	Верхняя КР
Простая КТ	2	4
m-Осная-ТЛ $N = 3$, $m = 2$	$2 + \dfrac{m}{2}$	$4 + \dfrac{m}{2}$
Изотропная ТЛ порядка p	$2p$	$2p\dfrac{N+1}{N-1}$
МКТ	2	$2\dfrac{N+1}{N-1}$
Общий случай	$2 + m\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$	$m\left(1 - \dfrac{1}{p}\right) + 2\dfrac{N+1}{N-1}$

Сравним полученные результаты с известными частными случаями (табл. 1). Как упоминалось выше, для простой критической точки ($N = 3$, $p = 1$, $m = 0$) нижняя и верхняя критические размерности равны 2 и 4 соответственно. Критические размерности для m-осной точки Лифшица ($N = 3$, $p = 2$) линейно зависят от m (некоторые частные случаи в 3- и 4-мерных пространствах обсуждаются ниже). Особый интерес представляет система с точкой Лифшица порядка p (в соответствующем гамильтониане учитываются производные с порядком до p включительно). Вариационное уравнение в такой модели совпадает с многомерным поливолновым уравнением, которое является конформно инвариантным [11].

Рассмотрим, какие типы анизотропных систем допускают существование упорядоченных состояний для $d > d_l$. В 3-мерном пространстве возможны два типа систем с упорядочением: 1) обычная критическая точка ($d_l = 2$) и 2) 1-осная точка Лифшица ($d_l = 2{,}5$).

В других случаях $d_l \geqslant 3$. В случае 4-мерного пространства: 1) обычная критическая точка ($d_l = 2$); 2) 1-,2-,3-осные точки Лифшица порядка 2 ($d_l = 2{,}5$; 3; 3,5) соответственно; 3) 1-,2 -осные точки Лифшица порядка $p > 2$ ($d_l = 3 - 1/p$; $4 - 1/p$). В других случаях $d_l \geqslant 4$.

В общем случае для некоторого данного порядка точки Лифшица p возможно упорядочение в пространстве с размерностью $d > 2p$ с произвольным типом анизотропии. В случае $d \leqslant 2p$ требуется дополнительное рассмотрение.

Полученные результаты верны для систем с классическими критическими точками. Как известно из теории квантовых ФП, в системах с квантовыми КТ эффективная размерность системы в критической области всегда больше размерности пространства. Поэтому в случае систем с квантовыми КТ возможно большее число типов анизотропного упорядочения. В частности, полученные результаты не противоречат существованию 2-мерных квантовых ФП.

1. *Толедано Ж., Толедано П.* Теория Ландау фазовых переходов. – Москва: Мир, 1994. – 461 с.
2. *Брус А., Каули Р.* Структурные фазовые переходы. – Москва: Мир, 1984. – 408 с.
3. *Olemskoi A. I., Klepikov V. F.* The theory of spatiotemporal patterns in nonequilibrium systems // Phys. Rep. – 2000. – **338**. – P. 571–677.
4. *Patashinskii A. Z., Pokrovskii V. L.* Fluctuation theory of phase transition. – New York: Pergamon, 1979. – 330 p.
5. *Ма Ш.* Современная теория критических явлений. – Москва: Мир, 1980. – 297 с.
6. *Поляков А. М.* Калибровочные поля и струны. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 1999. – 313 с.
7. *Meierovich B. E.* Vector order parameter in general relativity: covariant equations // Phys. Rev. – 2010. – **D82**. – 024004, 6 p.

8. *Bronnikov K. A., Rubin S. G., Svadkovsky I. V.* Multidimensional world, inflation, and modern acceleration // Phys. Rev. – 2010. – **D81**. – 084010, 8 p.
9. *Babich A. V., Berezovsky S. V., Klepikov V. F.* Spatial modulation of order parameters and critical dimensions // Int. J. Mod. Phys. – 2008. – **B22**. – P. 851–857.
10. *Babich A. V., Kitcenko L. N., Klepikov V. F.* Critical dimensions of systems with joint multicritical and Lifshitz-point-like behavior // Mod. Phys. Lett. – 2011. – **B25**. – P. 1839–1845.
11. *Fushchych W., Shtelen W., Serov N.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer, 1993. – 460 p.

Институт электрофизики и радиационных технологий НАН Украины, Харьков

Поступило в редакцию 20.10.2011

А. В. Бабіч

Критичні розмірності систем з анізотропною модуляцією параметрів порядку

Запропоновано модель, яка дозволяє досліджувати критичні явища в нелінійних системах з критичними точками з анізотропною модуляцією параметрів порядку. Знайдено нижчу та верхню критичні розмірності для такої моделі. Обговорюються можливі типи критичної поведінки в таких системах. Одержані результати застосовуються для дослідження фазових перетворень в анізотропних системах різноманітної природи.

A. V. Babich

Critical dimensions of systems with anisotropic modulation of order parameters

A model that allows one to study critical phenomena in nonlinear systems with anisotropic critical points is introduced. Lower and upper critical dimensions of such systems are calculated. Possible types of critical behavior in such systems are discussed. The obtained results are used for the investigation of phase transitions in anisotropic systems of various types.