Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

5 • 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 517.58/.5892

Н. О. Вірченко

Узагальнення конфлюентних гіпергеометричних функцій

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Запроваджено нове узагальнення класичних конфлюентних гіпергеометричних функцій. Подано деякі їх властивості, зокрема інтегральне зображення, застосування.

Як відомо [1–8], спеціальні функції з'являються при розв'язанні складніших диференціальних рівнянь при знаходженні власних функцій диференціальних операторів у деяких криволінійних системах координат та ін. Спеціальні функції відіграють важливу роль і в теорії інтегральних перетворень. Розв'язання багатьох задач математичної фізики, теорії диференціальних рівнянь, теорії імовірностей та математичної статистики, теорії теплопровідності, аеромеханіки, квантової механіки, астрофізики, астрономії, біомедицини та ін. приводить до спеціальних функцій різної природи та складності.

Різноманітність задач, що породжують спеціальні функції, веде до зростання кількості спеціальних функцій — від найпростіших функцій до гіпергеометричних функцій різної природи.

Гіпергеометричні функції відіграють особливо важливу роль як в теорії, так і в застосуваннях, при розв'язанні багатьох задач у різноманітних галузях прикладної математики та фізики. В останні десятиріччя посилився інтерес до узагальнення гіпергеометричних функцій, досліджуються частинні випадки, що мають не тільки теоретичне, але й практичне значення, зокрема узагальнені конфлюентні гіпергеометричні функції. Вони вже знаходять широке застосування у математичній та атомній фізиці, теорії ймовірностей, теорії кодування та ін., використовуються для обчислення невласних інтегралів, що відсутні в наявній та довідковій науковій літературі.

Конфлюентними (виродженими) гіпергеометричними функціями називають чотири функції [1]: функції Куммера ${}_1\Phi_1(a;c;z)$, $\bigcup(a;c;x)$ і дві функції Віттекера $M_{k,m}(x)$, $W_{k,m}(x)$. З цими функціями вперше зіткнулися фізики при розв'язанні рівняння вигляду

$$\nabla^2\Psi + \frac{8\pi^2 M}{h^2}\left(E + \frac{\mu}{r}\right)\Psi = 0,$$

де

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} > \Psi = \Psi(r, \theta, \Phi).$$

У цій роботі подамо *нове* узагальнення функцій ${}_1\Phi_1(a;c;z)$, $\bigcup(a;c;x)$, а саме: r-узагальнені конфлюентні гіпергеометричні функції: ${}^r_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$, ${}^r_1\Phi_1^{\tau}(a;c;x)$, ${}^r_1\Phi_1(a;c;x)$, ${}^r\bigcup^{\tau,\beta}(a;c;x)$, ${}^r\bigcup^{\tau}(a;c;x)$, ${}^r\bigcup(a;c;x)$, розглянемо їх основні властивості, інтегральні зображення, деякі застосування.

r-узагальнені конфлюентні гіпергеометричні функції.

1. Запровадимо r-узагальнену конфлюентну гіпергеометричну функцію ${}^r_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ у вигляді

$$ {}^r_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x) \equiv {}^r_1\widetilde{\Phi}_1(a;c;x) = \frac{1}{B(a,c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} e^{xt} \times $$

$$ \times\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right) dt, \tag{1}$$

де $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$, $\{\tau,\beta\} \subset R$, $\tau - \beta < 1$, $r > 0$, $B(\ldots)$ — бета-функція [1], $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$, $\{\alpha,\gamma\} \subset R$, ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots)$ — (τ,β)-узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [9]:

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta} = \frac{1}{B(a,c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\, {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c|c} (c;\tau); & \\ (c;\beta); & zt^{\tau} \end{array} \right] dt, \tag{2}$$

${}_1\Psi_1$ — узагальнена Fox–Wright функція [5].

Зауважимо, що при $\beta = \tau$ в (2) маємо функцію ${}_1\Phi_1^{\tau}$, водночас із (1) — функцію ${}^r_1\Phi_1^{\tau}$; при $\tau = \beta = 1$, $r = 0$ (1) дає класичну конфлюентну гіпергеометричну функцію ${}_1\Phi_1(a;c;x)$.

Вивчимо властивості ${}^r_1\Phi_1^{\tau,\beta}$.

Теорема 1 (зображення функції ${}^r_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ рядом). *При виконанні умов* $r > 0$, $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0$, $\{\tau,\beta\} \subset R$, $\tau - \beta < 1$, $\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0$ *зображення рядом для функції* ${}^r_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ *матиме вигляд*

$$ {}^r_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x) = \frac{1}{B(a,c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{\tau,\beta}B_{\alpha}^{\gamma}(a+n, c-a; r) \frac{x^n}{n!}, \tag{3}$$

${}_{\tau,\beta}B_{\alpha}^{\gamma}$ – (τ,β) — *узагальнена бета-функція [7]:*

$$ {}_{\tau,\beta}B_{\alpha}^{\gamma}(x,y;r;\delta;\omega) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t^{\delta}(1-t)^{\omega}}\right) dt, \tag{4}$$

тут $\operatorname{Re} x > 0$, $\operatorname{Re} y > 0$, $\delta > 0$, $\Omega > 0$, ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ — *функція вигляду* (2).

Доведення. Скористаємось означенням (τ,β)-узагальненої бета-функції (4), її властивостями, зображенням рядом, можливістю перестановки операцій інтегрування і підсумовування, матимемо

$$ {}^r_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x) = \frac{1}{B(a,c-a)} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} e^{xt}\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right) dt = $$

$$= \frac{1}{B(a,c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xt)^n}{n!} \int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1} {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{B(a,c-a)} \sum_{n=0}^{\infty} {}_{\tau,\beta}B_{\alpha}^{\gamma}(a+n,c-a;r)\frac{x^n}{n!}.$$

Теорема 2 (диференціальні співвідношення для ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}$). *При умовах існування функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}$ справедливі формули*

$$\frac{d\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)}{dx} = \frac{a}{c}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a+1;c+1;x), \tag{5}$$

$$\frac{d^n\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)}{dx^n} = \frac{(a)_n}{(c)_n}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a+n;c+n;x). \tag{6}$$

Теорема 3 (інтегральні зображення функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}$). *При умовах існування функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}$ справедливі такі інтегральні зображення:*

$${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x) = \frac{e^x}{B(a,c-a)} \int\limits_0^1 w^{c-a-1}(1-w)^{a-1}e^{-xw}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma,-\frac{r}{w(1-w)}\right)dw, \tag{7}$$

$${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x) = \frac{x^{1-c}}{B(a,c-a)} \int\limits_0^x v^{a-1}(x-v)^{c-a-1}e^{v}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma,-\frac{rx^2}{v(x-v)}\right)dv, \tag{8}$$

$${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x) = \frac{\exp\left(-\frac{cx}{(d-c)}\right)}{B(a,c-a)}(d-c)^{1-c} \int\limits_c^d (u-c)^{a-1}(d-u)^{c-a-1} \times$$
$$\times \exp\left(\frac{xu}{(d-c)}\right){}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma,-\frac{r(d-c)}{(u-c)(d-u)}\right)du, \tag{9}$$

$${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x) = \frac{2}{B(a,c-a)} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{2a}\varphi(\cos\varphi)^{2c-1}e^{z\sin^2\varphi}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma,-\frac{4r}{\sin^2 2\varphi}\right)d\varphi, \tag{10}$$

$${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x) = \frac{2}{B(a,c-a)} \int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^{2a-1}\omega}{\operatorname{ch}^{2c-1}\omega}e^{x\operatorname{th}^2\omega}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma,-\frac{r\operatorname{ch}^4\omega}{\operatorname{sh}^2\omega}\right)d\omega. \tag{11}$$

Доведення. Для перевірки цих інтегральних зображень скористаємося означенням функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$ (формули (1)), виконаємо відповідно заміни змінних: $w = 1-t$; $v = tx$; $u = c+(d-c)t$; $t = \sin^2\varphi$; $t = \operatorname{sh}^2\omega/\operatorname{ch}^2\omega$. Після перетворень отримаємо відповідно формули (7)–(11).

Теорема 4 (про зв'язок функції ${}_1^r\widetilde{\Phi}_1$ з класичною виродженою (конфлюентною) гіпергеометричною функцією). *При умовах існування функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$, а також при $s > 0$,*

$\alpha > s$; $\gamma > s$ справедлива формула

$$\int\limits_0^\infty r^{s-1}{}^r_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)\,dr = \frac{\Gamma(s)B(s,\alpha-s)}{B(a,c-a)B(s,\gamma-s)}\Phi(a+s;c+2s;x), \tag{12}$$

де $\Phi(\ldots)$ — класична конфлюентна гіпергеометрична функція [1].

Доведення. Застосуємо до функції ${}^r_1\widetilde{\Phi}_1$ інтегральне перетворення Мелліна:

$$\int\limits_0^\infty r^{s-1}{}^r_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)dr = \frac{1}{B(a,c-a)}\int\limits_0^\infty r^{s-1}dr\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{xt}\times$$

$$\times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt = \int\limits_0^\infty r^{s-1}dr\frac{1}{B(a,c-a)}\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{xt}\times$$

$$\times\frac{1}{B(\alpha,\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1\omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\gamma-\alpha-1}e^{-\frac{r}{t(1-t)}\omega}d\omega =$$

$$= \frac{1}{B(a,c-a)B(\alpha,\gamma-\alpha)}\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{xt}\int\limits_0^1\omega^{\alpha-1}(1-\omega)^{\gamma-\alpha-1}d\omega\int\limits_0^\infty r^{s-1}e^{-\frac{r}{t(1-t)}\omega}dr.$$

Застосувавши до останнього інтеграла формулу [1]

$$\int\limits_0^\infty e^{-st}t^\nu dt = \Gamma(1+\nu)s^{-1-\nu},$$

використавши прості перетворення, врахувавши, що

$$\int\limits_0^1\omega^{\alpha-s-1}(1-\omega)^{\gamma-\alpha-1}d\omega = B(\alpha-s,\gamma-\alpha),$$

одержимо (12).

2. Запровадимо r-узагальнену конфлюентну функцію Трікомі у вигляді

$${}^r\bigcup{}^{\tau,\beta}(a;c;x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int\limits_0^\infty t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}e^{-xt}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t^\delta}\right)dt, \tag{13}$$

де $\operatorname{Re}a > \operatorname{Re}c > 0$, $\{\tau,\beta\}\subset R$; $\tau > 0$; $\tau-\beta < 1$, $\{a,c\}\subset C$; $\delta > 0$, $r > 0$, $\operatorname{Re}\alpha > \operatorname{Re}\gamma > 0$; $\Gamma(a)$ — гамма-функція [1], ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots)$ — (τ,β)-узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [9].

Зауважимо, що при $r = 0$ матимемо класичну конфлюентну гіпергеометричну функцію $\bigcup(a;c;x)$ [1], при $\beta = \tau$ матимемо r-узагальнену конфлюентну функцію з ${}_1\Phi_1^\tau(\ldots)$ в ядрі (13).

Теорема 5 (про зв'язок функції ${}^{r}\bigcup^{\tau,\beta}(a;c;x)$ з функцією Віттекера $W_{k,m}(x)$). *При умовах існування функції* ${}^{r}\bigcup^{\tau,\beta}(a;c;x)$ *та при умовах*

$$\operatorname{Re} x > 0, \qquad \operatorname{Re}(a - \delta n) > 0$$

справедлива формула

$$ {}^{r}\bigcup^{\tau,\beta}(a;c;x) = \frac{e^{x} x^{-\frac{c}{2}} \Gamma(\gamma)}{\Gamma(a)\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\tau n)}{\Gamma(\gamma+\beta n)} \frac{(-r)^{n}}{n!} x^{\frac{\delta n}{2}} \Gamma(a-\delta n) W^{(x)}_{\frac{1-a+\delta n}{2}, \frac{c-\delta n-1}{2}}. \tag{14}$$

Примітка. Формулу (14) при тих самих умовах можна переписати у вигляді

$$ {}^{r}\bigcup^{\tau,\beta}(a;c;x) = \frac{e^{x} x^{-a+\frac{1}{2}} \Gamma(\gamma)}{\sqrt{\pi}\Gamma(a)\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+\tau n)}{\Gamma(\gamma+\beta n)} \frac{(-r)^{n}}{n!} x^{\delta n} \Gamma(a-\delta n) K_{\frac{1}{2}-a+\delta n}\left(\frac{x}{2}\right). \tag{15}$$

Тут $K_{\frac{1}{2}-a+\delta n}\left(\frac{x}{2}\right)$ — функція Макдональда [1].

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – Москва: Наука, 1965. – 296 с.
2. *Aomoto K.* Hypergeometric functions: the past, today and . . . (from the complex analytic point of view) // Sugaku Expositions. – 1996. – **9**. – P. 99–116.
3. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. – Москва: Физматгиз, 1963. – 358 с.
4. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. – Москва: Наука, 1965. – 588 с.
5. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-Transforms. – London: Chapman and Hall, 2004. – 390 p.
6. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – Москва: Мир, 1980. – 608 с.
7. *Вірченко Н. О.* Узагальнені спеціальні функції та їх застосування // Наук. вісті НТУ України "КПІ". – 2006. – № 4. – С. 42–49.
8. *Virchenko N. O., Kalla S. L., Al-Zamel A.* Some results on a generalized hypergeometric function // J. Integral transforms and special function. – 2001. – **12**, No 1. – P. 89–100.
9. *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its application // J. Fract. Calculus and Appl. Anal. – 2006. – **9**, No 2. – P. 101–108.

НТУ України "Київський політехнічний інститут"
Надійшло до редакції 04.11.2011

Н. А. Вирченко

Обобщение конфлюэнтных гипергеометрических функций

Введено новое обобщение классических конфлюэнтных гипергеометрических функций. Даны их некоторые свойства, в частности интегральные изображения, применения.

N. O. Virchenko

A generalizaion of the confluent hypergeometric functions

A new generalization of the classical confluent hypergeometric functions is introduced. Some properties, in particular, integral representations and applications of these functions, are given.