УДК 510.22 + 51-71

Я. І. Грушка

Мінливі множини та їх властивості

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Закладено основи теорії мінливих множин. На думку автора, дана теорія, в процесі свого розвитку і вдосконалення, зможе стати одним з інструментів розв'язання шостої проблеми Гільберта.

Незважаючи на величезні успіхи сучасної теоретичної фізики і потужність математичного апарату, який вона застосовує, відома шоста проблема Гільберта про математично строге формулювання основ теоретичної фізики, поставлена ще в 1900 р., остаточно не розв'язана і до сьогодні [1, 2]. Певні спроби формалізації окремих фізичних теорій було зроблено в роботах [3–6].

Головним недоліком зазначених робіт є відсутність абстрактно-системного підходу, а отже, як наслідок, недостатня гнучкість, обмеженість і штучність їхніх математичних конструкцій. На думку автора, однією з основних причин такого стану речей є відсутність абстрактного математичного середовища, в рамках якого можна було б строго формулювати закони фізики. У даній роботі робиться спроба побудови потрібного математичного середовища і з цією метою закладаються основи теорії мінливих множин.

1. Орієнтовані множини. З формальної точки зору мінливі множини є сукупностями об'єктів, які, на відміну від елементів звичайних (статичних) множин, можуть перебувати в процесі постійних змін, а також змінювати свої властивості залежно від точки зору на них (області сприймання). Найпримітивніша (стартова) модель сукупності мінливих об'єктів закладена в нижчеподаному означенні.

Означення 1. Нехай M — довільна непорожня множина. Довільне рефлексивне бінарне відношення $\Leftarrow$ на M (тобто таке, що $\forall\, x \in M\ x \Leftarrow x$) називатимемо *орієнтацією*, а пару $\mathcal{M} = (M, \Leftarrow)$ — *орієнтованою множиною.* При цьому множину M називатимемо **базовою**, або множиною всіх *елементарних станів* орієнтованої множини $\mathcal{M}$, і позначатимемо через $\mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, а відношення $\Leftarrow$ будемо називати *напрямним відношенням змін (трансформацій)* $\mathcal{M}$ і позначати через $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$.

У випадку, коли відомо, про яку орієнтовану множину $\mathcal{M}$ йде мова, в позначенні $\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$ символ $\mathcal{M}$ будемо опускати, вживаючи позначення "$\leftarrow$". Для елементів x, $y \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ запис $y \leftarrow x$ означає, що "елементарний стан y є результатом трансформацій, або "трансформаційним продовженням" елементарного стану x".

Означення 2. Підмножина $N \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ називається *транзитивною* в $\mathcal{M}$, якщо для довільних $x, y, z \in N$ з умови $z \leftarrow y$ і $y \leftarrow x$ випливає умова $z \leftarrow x$. Транзитивна множина $N \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ називається *максимально транзитивною* в $\mathcal{M}$, якщо не існує транзитивної множини $N_1 \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ такої, що $N \subset N_1$.

Транзитивна підмножина $L \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ називається *ланцюгом* в $\mathcal{M}$, якщо для довільних x, $y \in L$ має місце хоч одне із співвідношень $y \leftarrow x$ або $x \leftarrow y$. Ланцюг $L \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$

називається *максимальним ланцюгом* в $\mathcal{M}$, якщо не існує ланцюга $L_1 \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ такого, що $L \subset L_1$.

Твердження 1. *1. Для довільної транзитивної множини N в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимально транзитивна множина $N_{\max}$ така, що $N \subseteq N_{\max}$.*

2. Для довільного ланцюга L в орієнтованій множині $\mathcal{M}$ існує максимальний ланцюг $L_{\max}$ такий, що $L \subseteq L_{\max}$.

Твердження 1 доводиться за допомогою аксіоми вибору. Другий пункт твердження 1 є узагальненням принципу максимальності Хаусдорфа в рамках даної теорії.

2. Означення часу. Примітивні мінливі множини. У теоретичній фізиці звикли вважати моменти часу дійсними числами. Але, оскільки абстрактна математика досліджує об'єкти як завгодно великої потужності, в наведеному нижче означенні як моменти часу використано елементи довільної лінійно упорядкованої множини. Таке розуміння часу близьке до філософського уявлення про час як певний "хронологічний порядок", узгоджений з процесами змін.

Означення 3. Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина і $(\mathbf{T}, \leqslant)$ — лінійно упорядкована множина. Відображення $\psi\colon \mathbf{T} \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ називається *часом* на $\mathcal{M}$ якщо:

1) для довільного $x \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ існує елемент $t \in \mathbf{T}$ такий, що $x \in \psi(t)$;

2) якщо $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$, то існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$ (тобто має місце часова роздільність послідовних неоднакових елементарних станів). При цьому елементи $t \in \mathbf{T}$ будемо називати *моментами часу*, а трійку $\mathcal{P} = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leqslant), \psi)$ — *примітивною мінливою множиною.*

На довільній орієнтованій множині завжди можна визначити час. Найпримітивніший спосіб — взяти лінійно упорядковану множину $(\mathbf{T}, \leqslant)$, що містить не менше двох елементів, і покласти $\psi(t) := \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$, $t \in \mathbf{T}$.

Означення 4. Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина. Довільну сім'ю множин $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ таку, що $\bigcup\limits_{A \in \mathbf{Y}} A = \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ будемо називати *одночасністю* на $\mathcal{M}$.

Якщо $\mathcal{P} = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leqslant), \psi)$ — примітивна мінлива множина, то, за означенням 3, одночасністю на $\mathcal{M}$ є сім'я множин $Y_\psi = \{\psi(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$. Час ψ на $\mathcal{M}$ називатимемо *породжуючим* для одночасності $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$, якщо $\mathbf{Y} = Y_\psi$.

Теорема 1. *Будь-яка одночасність на довільній орієнтованій множині $\mathcal{M}$ має породжуючий час.*

Породжуючий час одночасності в теоремі 1 є не єдиним. Нижче розглядається питання про єдиність (при певних обмеженнях) породжуючого часу одночасності.

Означення 5. Часи $\psi_1\colon \mathbf{T}_1 \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$, $\psi_2\colon \mathbf{T}_2 \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{M})}$ на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ будемо називати *хронологічно еквівалентними* (позначення $\psi_1 \Uparrow \psi_2$), якщо існує взаємно однозначна відповідність $\xi\colon \mathbf{T}_1 \mapsto \mathbf{T}_2$ така, що: 1) ξ є порядковим ізоморфізмом між $\mathbf{T}_1$ і $\mathbf{T}_2$ в сенсі [7, ст. 13]; 2) для довільного $t \in \mathbf{T}_1$ має місце рівність $\psi_1(t) = \psi_2(\xi(t))$.

Зауваження 1. Підкреслимо, що часи ψ_1 і ψ_2 в означенні 5 слід розуміти спільно з лінійно упорядкованими множинами $(\mathbf{T}_1, \leqslant_1)$ і $(\mathbf{T}_2, \leqslant_2)$, на яких вони задані.

Твердження 2. *Відношення $\Uparrow$ є відношенням еквівалентності на довільній множині часів довільної орієнтованої множини.*

Нехай $\mathcal{M}$ — орієнтована множина.

1. Для множин A, $B \subseteq \mathfrak{B}s(\mathcal{M})$ будемо вважати, що $B \leftarrow\!(\mathrm{m})\, A$, якщо існують такі елементи $x \in A$ і $y \in B$, що $y \leftarrow x$ і $x \not\leftarrow y$.

2. Нехай $\mathcal{Q} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ — деяка система підмножин множини $\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ і $A, B \in \mathcal{Q}$. Будемо вважати, що $B \overset{\mathcal{Q}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, A$, якщо існує така послідовність множин $C_0, C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{Q}$ $(n \in \mathbb{N})$, що $C_0 = A$, $C_n = B$ і $C_k \leftarrow(\mathrm{m})\, C_{k-1}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Означення 6. 1. Одночасність $\mathbf{Y} \subseteq 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ називатимемо *чітко неповторною*, якщо:

а) не існує множин $A, B \in \mathbf{Y}$ таких, що $A \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, B$ і $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, A$;

б) для довільних $x, y \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$ таких, що $y \leftarrow x$ і $x \neq y$ існують множини $A, B \in \mathbf{Y}$ такі, що $x \in A$, $y \in B$ і $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, A$ (це означає, що ця одночасність "чітко відчуває" всі зміни на орієнтованій множині $\mathcal{M}$).

2. Одночасність $\mathbf{Y}$ будемо називати *монотонно зв'язною*, якщо для довільних $A, B \in \mathbf{Y}$ таких, що $A \neq B$ виконується хоч одна з умов $A \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, B$ або $B \overset{\mathbf{Y}}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, A$.

3. Нехай $\mathcal{P} = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leqslant), \psi)$ — примітивна мінлива множина. Відображення $\mathbf{h}\colon \mathbf{T} \mapsto$ $\mapsto 2^{\mathfrak{Bs}(\mathcal{M})}$ називатимемо *хронометричним* процесом для часу ψ, якщо $\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t)$, $t \in \mathbf{T}$ і для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}$ умова $t < \tau$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{h}(\tau) \overset{\mathbf{h}(\mathbf{T})}{\twoheadleftarrow}(\mathrm{m})\, \mathbf{h}(t)$ і $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$, де $\mathbf{h}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{h}(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$.

4. Час ψ на орієнтованій множині $\mathcal{M}$ називатимемо *внутрішнім*, якщо для цього часу існує хоч один хронометричний процес.

Теорема 2. *Для довільної чітко неповторної і монотонно зв'язної одночасності* $\mathbf{Y}$ *існує єдиний з точністю до хронологічної еквівалентності внутрішній час* ψ *такий, що* $\mathbf{Y} = Y_\psi$.

Зміст терміну "внутрішній час" полягає в тому, що такий час можна "виміряти" за допомогою хронометричного процесу. Філософський зміст теореми 2 полягає в тому, що неповторність картин навколишньої дійсності, можливість бачити всі зміни в послідовних одночасних станах та зв'язність різних картин дійсності ланцюгами змін однозначно породжують хід внутрішнього часу в "нашому" світі.

3. Елементарно-часові стани та базові мінливі множини. Надалі для довільної примітивної мінливої множини $\mathcal{P} = (\mathcal{M}, (\mathbf{T}, \leqslant), \phi)$ будемо використовувати позначення $\mathfrak{Bs}(\mathcal{P}) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{M})$, $\mathbf{Tm}(\mathcal{P}) := \mathbf{T}$, $\underset{\mathcal{P}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}$, $\psi_{\mathcal{P}} := \phi$, $\leqslant_{\mathcal{P}} := \leqslant$. Коли не виникатиме непорозумінь, символ $\mathcal{P}$ в останніх трьох позначеннях опускатимемо.

Означення 7. Нехай $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина. Пару (t, x) $(x \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{P})$, $t \in$ $\in \mathbf{Tm}(\mathcal{P}))$ називатимемо *елементарно-часовим станом*, якщо $x \in \psi(t)$. Множину всіх елементарно-часових станів $\mathcal{P}$ будемо позначати через $\mathbb{B}s(\mathcal{P})$.

Для елементарно-часового стану $\omega = (t, x) \in \mathbb{B}s(\mathcal{P})$ введемо позначення

$$\mathsf{bs}(\omega) := x, \qquad \mathsf{tm}(\omega) := t.$$

Будемо вважати, що елементарно-часовий стан $\omega_2 \in \mathbb{B}s(\mathcal{P})$ *формально послідовний* елементарно-часовому стану $\omega_1 \in \mathbb{B}s(\mathcal{P})$, і використовувати позначення $\omega_2 \leftarrow(\mathrm{f})\omega_1$, якщо $\omega_1 = \omega_2$ або $\mathsf{bs}(\omega_2) \leftarrow \mathsf{bs}(\omega_1)$ і $\mathsf{tm}(\omega_1) < \mathsf{tm}(\omega_2)$.

Відношення $\leftarrow(\mathrm{f})$ показує всі "потенційно можливі" трансформації елементарно-часових станів, які можна "вписати" в дану примітивну мінливу множину. Проте виявляється, що це відношення може "генерувати" такі "паразитичні трансформації", яких реально ніколи не було у фізичній системі. Тому, щоб описати реальні зміни елементарно-часових станів певної фізичної моделі, необхідно задати деяке "підвідношення" відношення $\leftarrow(\mathrm{f})$.

Означення 8. Нехай, $\mathcal{P}$ — примітивна мінлива множина. Відношення $\twoheadleftarrow \subseteq \leftarrow(\mathrm{f})$ на $\mathbb{B}s(\mathcal{P})$ називається *базою елементарних процесів* в $\mathcal{P}$, якщо:

1) $\forall\,\omega \in \mathbb{B}s(\mathcal{P})$ $\omega \twoheadleftarrow \omega$;

2) для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}s(\mathcal{P})$ таких, що $x_2 \leftarrow x_1$ існують $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}s(\mathcal{P})$ такі, що $\mathsf{bs}(\omega_i) = x_1$ $(i = 1, 2)$ і $\omega_2 \twoheadleftarrow \omega_1$.

Пару $\mathcal{B} = (\mathcal{P}, \twoheadleftarrow)$ називатимемо *базовою мінливою множиною.*

Легко бачити, що довільна примітивна мінлива множина $\mathcal{P}$ породжує базову мінливу множину $\mathcal{P}_{(f)} = (\mathcal{P}, \leftarrow(\mathrm{f}))$.

Надалі для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B} = (\mathcal{P}, \twoheadleftarrow)$ будемо використовувати позначення $\mathfrak{B}s(\mathcal{B}) := \mathfrak{B}s(\mathcal{P})$, $\mathbb{B}s(\mathcal{B}) := \mathbb{B}s(\mathcal{P})$, $\mathbf{Tm}(\mathcal{B}) := \mathbf{Tm}(\mathcal{P})$, $\leqslant_{\mathcal{B}} := \leqslant_{\mathcal{P}}$, $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{P}}{\leftarrow}$ $\psi_{\mathcal{B}} := \psi_{\mathcal{P}}$, а для елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}s(\mathcal{B})$ — $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ для констатації того факту, що $\omega_2 \twoheadleftarrow \omega_1$. Коли не виникатиме непорозумінь, символ $\mathcal{B}$ в останніх чотирьох позначеннях будемо опускати.

Твердження 3. *Для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ пара $(\mathbb{B}s(\mathcal{B}), \leftarrow)$ є орієнтованою множиною.*

Означення 9. Довільний максимальний ланцюг $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{B}s(\mathcal{B})$ називатимемо *лінією долі* $\mathcal{B}$. Множину всіх ліній долі $\mathcal{B}$ будемо позначати через $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$.

4. Базові мінливі множини, породжені системою абстрактних траєкторій. Нехай M — довільна множина і $(\mathbf{T}, \leqslant)$ — довільна лінійно упорядкована множина. Відображення $r\colon \mathfrak{D}(r) \mapsto M$ $(\mathfrak{D}(r) \subseteq \mathbf{T})$ називатимемо *абстрактною траєкторією* з $\mathbf{T}$ в M. *Системою абстрактних траєкторій* з $\mathbf{T}$ в M називатимемо довільну множину $\mathcal{R}$, елементами якої є абстрактні траєкторії з $\mathbf{T}$ в M, таку, що $\bigcup\limits_{r \in \mathcal{R}} \mathfrak{R}(r) = M$ (де $\mathfrak{D}(r)$ і $\mathfrak{R}(r)$ — відповідно область визначення і значень абстрактної траєкторії r).

Теорема 3. *Для довільної системи абстрактних $\mathcal{R}$ траєкторій з $(\mathbf{T}, \leqslant)$ в M існує, причому єдина, базова мінлива множина $\mathcal{A}t(\mathcal{R})$ така, що:*

1) $\mathbf{Tm}(\mathcal{A}t(\mathcal{R})) = \mathbf{T}$, $\leqslant_{\mathcal{A}t(\mathcal{R})} = \leqslant$; 2) $\mathbb{B}s(\mathcal{A}t(\mathcal{R})) = \bigcup\limits_{r \in \mathcal{R}} r$; 3) для довільних $\omega_1, \omega_2 \in$ $\in \mathbb{B}s(\mathcal{A}t(\mathcal{R}))$ умова $\omega_2 \underset{\mathcal{A}t(\mathcal{R})}{\leftarrow} \omega_1$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathsf{tm}(\omega_1) \leqslant \mathsf{tm}(\omega_2)$ і існує траєкторія $r \in \mathcal{R}$ така, що $\omega_1, \omega_2 \in r$ (де $r = \{(t, r(t)) \mid t \in \mathfrak{D}(r)\}$).

Теорема 4. *Для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ $\mathbb{L}d(\mathcal{B})$ є системою абстрактних траєкторій з $\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ в $\mathfrak{B}s(\mathcal{B})$. При цьому $\mathcal{A}t(\mathbb{L}d(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$.*

5. Мінливі системи і процеси. Нехай $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина.

Означення 10. Будь-яку підмножину $S \subseteq \mathbb{B}s(\mathcal{B})$ називатимемо *мінливою системою* $\mathcal{B}$. Довільне відображення $s : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \mapsto 2^{\mathfrak{B}s(\mathcal{B})}$ таке, що $s(t) \subseteq \psi(t)$, $t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ називатимемо *процесом* $\mathcal{B}$.

Поняття мінливої системи можна розглядати, як абстрактне узагальнення поняття фізичного тіла, склад якого, взагалі кажучи, не є постійним.

Нехай $S \subseteq \mathbb{B}s(\mathcal{B})$ — мінлива система. Процес

$$S^{\sim}(t) := \{x \in \mathfrak{B}s(\mathcal{B}) \mid (t, x) \in S\}, \qquad t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B}),$$

будемо називати *процесом трансформацій* мінливої системи S. Якщо s — довільний процес в $\mathcal{B}$, то $s = S^{\sim}$, де $S := \{(t, x) \mid t \in \mathbf{Tm}(\mathcal{B}), x \in s(t)\}$. Отже, довільний процес завжди є процесом трансформацій певної мінливої системи. Процес трансформацій $\mathcal{L}^{\sim}$, породжений лінією долі $\mathcal{L} \in \mathbb{L}d(\mathcal{B}) \subseteq 2^{\mathbb{B}s(\mathcal{B})}$, будемо називати *елементарним процесом.* У певному сенсі елементарний процес є аналогом елемента звичайної (статичної) множини, оскільки з елементарних процесів, користуючись теоремою 4, можна відновити всю базову мінливу множину.

6. Загальне означення мінливої множини.

Означення 11. Нехай $\overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — довільна індексована сім'я базових мінливих множин, де $\mathcal{A}$ — деяка множина індексів. Система відображень $\overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$, $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} \colon 2^{\mathbb{B}s(\mathcal{B}_\alpha)} \longmapsto 2^{\mathbb{B}s(\mathcal{B}_\beta)}$, $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ називається *уніфікацією сприймання* на $\overleftarrow{\mathcal{B}}$, якщо:

1) $\mathfrak{U}_{\alpha\alpha} A \equiv A$ для довільних $\alpha \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{B}s(\mathcal{B}_\alpha)$ (де $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A := \mathfrak{U}_{\beta\alpha}(A)$);

2) для довільних $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ і $A, B \subseteq \mathbb{B}s(\mathcal{B}_\alpha)$ з умови $A \subseteq B$ випливає, що $\mathfrak{U}_{\beta\alpha} A \subseteq \mathfrak{U}_{\beta\alpha} B$ (тобто відображення $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ є монотонним);

3) для довільних $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{B}s(\mathcal{B}_\alpha)$ має місце включення

$$\mathfrak{U}_{\gamma\beta} \mathfrak{U}_{\beta\alpha} A \subseteq \mathfrak{U}_{\gamma\alpha} A. \tag{1}$$

При цьому відображення $\mathfrak{U}_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ будемо називати *відображеннями уніфікації*, а трійку $\mathcal{Z} = (\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}})$ — *мінливою множиною.*

Відображення уніфікації визначають, якою ми "будемо бачити" задану мінливу систему в іншій області сприймання. У випадку класичної механіки або спеціальної теорії відносності співвідношення (1) переходить у рівність. Заміна знаку рівності на включення зумовлена тим, що абстрактній ситуації допускається можливість "не бачити" деякі елементарно-часові стани іншої області сприймання.

Нехай $\mathcal{Z} = (\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}})$ — мінлива множина. Для довільного індексу $\alpha \in \mathcal{A}$ пару $l = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha)$ називатимемо *областю сприймання*, або *системою відліку* $\mathcal{Z}$. Множину всіх областей сприймання мінливої множини $\mathcal{Z}$ позначатимемо через $\mathcal{L}k(\mathcal{Z})$. Для довільної області сприймання $l = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ через $l^\wedge$ позначатимемо базову мінливу множину $\mathcal{B}_\alpha$. Надалі в позначеннях $\mathfrak{B}s(l^\wedge)$, $\mathbb{B}s(l^\wedge)$, $\mathbf{Tm}(l^\wedge)$, $\psi_{l^\wedge}$, $\underset{l^\wedge}{\leftarrow}$ та ін. символ "$^\wedge$" будемо опускати. Для областей сприймання $l = (\alpha, \mathcal{B}_\alpha)$, $m = (\beta, \mathcal{B}_\beta) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ відображення уніфікації $\mathfrak{U}_{\beta\alpha}$ будемо позначати через $\langle m \leftarrow l, \mathcal{Z} \rangle$, або через $\langle m \leftarrow l \rangle$. Зокрема, включення (1) на мові зазначених позначень перепишеться у вигляді $\langle m \leftarrow p \rangle \langle m \leftarrow l \rangle A \subseteq \langle m \leftarrow p \rangle A$; $l, m, p \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, $A \subseteq \mathbb{B}s(l)$.

7. Видимість у мінливих множинах.

Означення 12. Нехай $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива множина і $l, m \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$. Будемо говорити, що мінлива система $A \subseteq \mathbb{B}s(l)$ є:

1) *видимою* з області сприймання m, якщо $\langle m \leftarrow l \rangle A \neq \varnothing$;

2) *нормально видимою* з області сприймання m, якщо будь-яка непорожня підсистема $B \subseteq A$ мінливої системи A є видимою з m;

3) *чітко видимою* з m, якщо A є нормально видимою з m і для довільної сім'ї $\{A_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\} \subseteq 2^A$ мінливих підсистем A такої, що $\bigsqcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha = A$ має місце рівність $\langle m \leftarrow l \rangle A = \bigsqcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} \langle m \leftarrow l \rangle A_\alpha$, де знак $\bigsqcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ означає диз'юнктне об'єднання, тобто таке об'єднання, при якому $A_\alpha \bigcap A_\beta = \varnothing$, $\alpha \neq \beta$;

4) *невидимою* з області сприймання m, якщо $\langle m \leftarrow l \rangle A = \varnothing$.

Будемо говорити, що область сприймання $l \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ є *видимою* (*нормально видимою*, *чітко видимою*) з області сприймання $m \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ (позначення $l \succ m$ $(l \succ! \, m,\ l \succ!! \, m)$ відповідно), якщо множина $\mathbb{B}s(l)$ є видимою (нормально видимою, чітко видимою) з m відповідно.

Будемо говорити, що мінлива множина $\mathcal{Z}$ є *видимою* (*нормально*, *чітко видимою*), якщо для довільних $l, m \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ виконується співвідношення $l \succ m$ ($l \succ! \, m$, $l \succ!! \, m$) відповідно. Очевидно, що довільна нормально видима мінлива множина є видимою. Обернене твердження, взагалі кажучи, не вірне.

Теорема 5. *Мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою тоді і тільки тоді, коли вона є нормально видимою.*

Враховуючи теорему 5, терміном "нормально видима мінлива множина" надалі користуватись не будемо.

Теорема 6. *Мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою тоді і тільки тоді, коли для довільних $l, m, p \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ справедлива рівність $\langle m \leftarrow p \rangle \langle m \leftarrow l \rangle = \langle m \leftarrow p \rangle$.*

Теорема 6. *Якщо мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою, то для довільних $l, m \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і $A \subseteq \mathbb{B}s(l)$ множини A і $\langle m \leftarrow l \rangle A$ є рівнопотужні, причому $\langle m \leftarrow l \rangle A = \bigsqcup_{\omega \in A} \langle m \leftarrow l \rangle \{\omega\}$. При цьому $\langle m \leftarrow l \rangle \mathbb{B}s(l) = \mathbb{B}s(m)$.*

Нехай $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива множина і l, $m \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$. Вважатимемо, що $l \prec\!\succ m$, якщо виконується хоч одна з таких умов: $l \succ m$ або $m \succ l$. Вважатимемо, що області сприймання $l, m \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ *зв'язані видимістю* в $\mathcal{Z}$ (позначення $l \widehat{\equiv} m$), якщо існує послідовність $l_0, l_1, \ldots, l_\nu \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ ($\nu \in \mathbb{N}$) така, що, $l_0 = l$; $l_\nu = m$; $l_i \prec\!\succ l_{i-1}$ ($i \in \{1, \ldots, \nu\}$). Легко перевірити, що відношення $\succ!!$ (а отже, і відношення $\succ!$ та $\succ$) є рефлексивним на $\mathcal{L}k(\mathcal{Z})$. Тому, згідно з [8, твердження 5.8, 5.9; теорема 5.8], *відношення $\widehat{\equiv}$ є відношенням еквівалентності на $\mathcal{L}k(\mathcal{Z})$*. Класи еквівалентності, на які розбиває відношення еквівалентності $\widehat{\equiv}$ множину $\mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, будемо називати *класами видимості $\mathcal{Z}$*.

Отже, якщо існують $l, m \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ такі, що $l \not\widehat{\equiv} m$, то сукупність областей сприймання $\mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ розпадається на "спаралелені світи" (класи видимості). Причому будь-який клас видимості є повністю невидимим з інших класів видимості.

1. *Гладун А. Д.* Шестая проблема Гильберта // Потенциал. – 2006. – № 3. – (http://potential.org.ru/Home/ProblemGilbert).
2. *Petunin Yu. I., Klyushin D. A.* A structural approach to solving the 6th Hilbert problem // Theory Probab. and Math. Statistics. – 2005. – No 71. – P. 165–179.
3. *McKinsey J. C. C., Sugar A. C., Suppes P.* Axiomatic foundations of classical particle mechanics // J. Ration. Mech. and Anal. – 1953. – No 2. – P. 253–272.
4. *Schutz J. W.* Foundations of special relativity: kinematic axioms for Minkowski space-time. – Lecture Notes in Mathematics. Vol. 361. – Berlin; New York: Springer, – 1973. – 314 p.
5. *da Costa N. C. A., Doria F. A.* Suppes predicates for classical physics // The Space of Mathematics: Proc. of the Intern. Symp. on Structures in Mathematical Theories (San Sebastian, Spain 1990). – Berlin; New York: W. de Gruyter, 1992. – P. 168–191.
6. *Sant'Anna A. S.* The definability of physical concepts // Bol. Soc. Paran. Mat. (3s.). – 2005. – **23**, No 1–2. – P. 163–175.
7. *Биркгоф Г.* Теория решеток. – Москва: Наука, 1984. – 567 с.
8. *Карнаух Т. О., Ставровський А. Б.* Вступ до дискретної математики. – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2006. – 109 с.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 04.08.2011

Я. И. Грушка

Изменчивые множества и их свойства

Заложены основы теории изменчивых множеств. По мнению автора, данная теория, в процессе своего развития и совершенствования, сможет стать одним из инструментов решения шестой проблемы Гильберта.

Ya. I. Grushka

Changeable sets and their properties

The work lays the foundations of the theory of changeable sets. In author's opinion, this theory, in the process of its development and improvement, can be one of the tools of solving the sixth Hilbert problem.