УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, Т. В. Єрмолкевич, І. Я. Субботін

Про будову періодичних груп, скінченно породжені підгрупи яких або переставні, або пронормальні

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. П. Моторним)

Розглянуто періодичні групи, в яких скінченно породжені підгрупи або переставні, або пронормальні. Отримано повний опис таких груп.

Вивчення впливу важливих природних систем підгруп на структуру групи було і є однією з найвагоміших задач теорії груп. За весь період її розвитку виникло декілька важливих підходів. Один з найстаріших підходів полягає в розгляді груп, усі власні підгрупи яких мають деяку спільну властивість. Він випливає з класичних робіт Р. Дедекінда [1], яким були повністю описані скінченні групи, всі підгрупи яких є нормальними, Г. Міллера та Х. Морено [2], які описали скінченні неабелеві групи, всі власні підгрупи яких є абелевими, та О. Ю. Шмідта [3], який описав скінченні групи, всі власні підгрупи яких нільпотентні. Вказані роботи зіграли дуже важливу роль у розвитку теорії груп. Вони мали численні продовження та узагальнення, в яких властивість, що визначає систему (власних) підгруп, ставала все ширшою, як у теорії скінченних груп (див., наприклад, [4, гл. VI), так і в теорії нескінченних груп (див., наприклад, [5]).

Однак треба зазначити, що ситуації, коли всі підгрупи групи мають одну, нехай навіть дуже широку, властивість, зустрічаються не так вже й часто. Значно частіше підгрупи можуть мати цілковито різні властивості, іноді навіть протилежні. Наприклад, групи можуть мати одночасно як субнормальні, так і самонормалізовані підгрупи, нормальні та абнормальні підгрупи і т. д. Говорячи образно, підгрупи та їх антиподи утворюють як би два полюси, навколо яких та між якими розташовані інші підгрупи. Чим менше таких проміжних підгруп, тим більш виразною, більш чіткою стає структура групи. Зокрема, природно розглянути ситуацію, коли серед підгруп групи присутні тільки підгрупи одного певного типу та їх антиподи. Одним з перших цей підхід почав реалізовувати А. Фаттахі у роботі [6], в якій були описані скінченні групи, кожна підгрупа яких або нормальна, або абнормальна. Нагадаємо, що підгрупа H групи G називається *абнормальною*, якщо для будь-якого елемента g із G підгрупа $\langle H, H^g\rangle$ містить цей елемент g. Г. Эберт та С. Бауман [7] узагальнили результати цієї роботи, розглянувши скінченні групи, всі підгрупи яких або субнормальні, або абнормальні. Вивчення нескінченних груп з цією властивістю проводилось пізніше у роботі М. де Фалько, Л. А. Курдаченка, І. Я. Субботіна [8]. У цій же роботі також були розглянуті групи, всі підгрупи яких або субнормальні, або контранормальні. Наслідуючи Д. Роуса [9], підгрупу H групи G будемо називати контранормальною, якщо $H^G = G$. Пізніше в роботі Л. А. Курдаченка та Х. Сміта [10] були розглянуті групи, всі підгрупи яких або субнормальні, або збігаються зі своїм нормалізатором. Абнормальні підгрупи є частковим випадком пронормальних підгруп. Підгрупа H групи G називається *пронормальною*, якщо для будь-якого елемента g з G підгрупи H та Hg спряжені в $\langle H, H^g\rangle$. Відзначимо, що між субнормальними і пронормальними підгрупами вже не існує такого різкого контрасту, як між субнормальними та абнормальними підгрупами. Пронормальна підгрупа може бути субнормальною, але у цьому випадку вона буде нормальною. В роботах П. Леговіні [11, 12] досліджувалися скінченні групи, всі підгрупи яких або субнормальні, або пронормальні. В роботі [13] було розпочато вивчення нескінченних груп такого роду. Нарівні з субнормальними, природним узагальненням нормальних підгруп будуть також і переставні підгрупи. Підгрупа H групи G називається переставною, якщо $HK = KH$ для кожної підгрупи K групи G. Вивчення переставних підгруп проводиться вже досить давно, у цій області отримано багато різноманітних цікавих результатів (див., наприклад, [14]). Ми розпочинаємо вивчати групи, кожна підгрупа яких або переставна, або пронормальна. Більш того, ми розглядаємо значно загальнішу ситуацію, точніше вивчаємо групи, скінченно породжені підгрупи яких або переставні, або пронормальні. Треба зазначити, що в групах, скінченно породжені підгрупи яких є переставними, всі підгрупи переставні. Групи, скінченно породжені підгрупи яких є пронормальними, вивчались І. Я. Субботіним та М. Ф. Кузенним [15]. У цій роботі ми досліджуємо локально скінченні групи, скінченно породжені підгрупи яких або переставні, або пронормальні.

Нехай G — група та нехай $M = \{H \mid H$ — нормальна підгрупа G, для якої G/H є локально нільпотентною$\}$.

Нагадаємо, що перетин L усіх підгруп системи M називається *локально нільпотентним резидуалом групи* G. Якщо група G є локально скінченною, то не важко побачити, що факторгрупа G/L є локально нільпотентною.

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема А. *Нехай G — локально скінченна група, L — її локально нільпотентний резидуал та D — локально нільпотентний радикал G. Якщо кожна скінченно породжена підгрупа G є пронормальною або переставною, то виконуються такі умови:*

(i) комутант $[G, G]$ є абелевою підгрупою;

(ii) $D = L \times Z$, де Z — верхній гіперцентр групи G;

(iii) силовська p-підгрупа L є силовською p-підгрупою усієї групи G для кожного простого числа $p \in \prod(L)$;

(iv) $[L, G] = L$, $C_L(G) = \langle 1 \rangle$ та кожна підгрупа L є G-інваріантною;

(v) G/L є гіперцентральною і кожна підгрупа G/L переставна.

Більш того:

(vi) якщо множина $\prod(G/D)$ містить два різних простих числа, то G/L є дедекіндовою групою; у цьому випадку кожна скінченно породжена підгрупа G пронормальна;

(vii) якщо факторгрупа G/D є нескінченною p-групою для деякого простого числа p, то G/L є дедекіндовою групою; у цьому випадку кожна скінченно породжена підгрупа G пронормальна;

(viii) якщо факторгрупа G/D є скінченною p-групою для деякого простого числа p, а факторгрупа G/L не є дедекіндовою, тоді $G = A \leftthreetimes P$, де P — силовська p-підгрупа G, A — дедекіндова група, а також P є обмеженою та скінченною над центром і $P/C_P(A)$ — скінченна.

Наслідок А1. *Якщо G — локально скінченна група, кожна скінченно породжена підгрупа якої є пронормальною або переставною, то кожна зростаюча підгрупа переставна.*

Наслідок А2. *Якщо G — локально скінченна група, кожна скінченно породжена підгрупа якої є пронормальною або переставною, то переставність є транзитивним відношенням для групи G.*

Наслідок А3. *Якщо G — локально скінченна група, кожна скінченно породжена підгрупа якої є пронормальною або переставною, то кожна скінченно породжена підгрупа G пронормальна або G — група типу (viii) з теореми А.*

Наслідок А4. *Якщо G — локально скінченна група, кожна підгрупа якої є пронормальною або переставною, то кожна підгрупа G є пронормальною або G — група типу (viii) з теореми А.*

1. *Dedekind R.* Über Gruppen, deren sammtliche Teiler Normalteilersind // Math. Ann. – 1897. – **48**. – P. 548–561.
2. *Miller G. A., Moreno H.* Non-abelian groups in which every subgroup is abelian // Amer. Math. Soc. – 1903. – **4**. – P. 389–404.
3. *Schmidt O. Yu.* Groups whose all subgroups are special // Math. Sb. – 1924. – **31**. – P. 366–372.
4. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – Москва: Наука, 1978. – 278 с.
5. *Dixon M. R., Subbotin I. Ya.* Groups with finiteness conditions on some subgroup systems // Algebra and discrete mathematics. – 2009. – No 4. – P. 29–54.
6. *Fattahi A.* Groups with only normal and abnormal subgroups // J. Algebra. – 1974. – **28**, No 1. – P. 15–19.
7. *Ebert G., Bauman S.* A note of subnormal and abnormal chains // Ibid. – 1975. – **36**. – P. 287–293.
8. *De Falco M., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Groups with only abnormal and subnormal subgroups // Atti Semin. Mat. e Fis. Univ. Modena. – 1998. – **47**. – P. 435–442.
9. *Rose J. S.* Nilpotent subgroups of finite soluble groups // Math. Z. – 1968. – **106**. – P. 97–112.
10. *Kurdachenko L. A., Smith H.* Groups with all subgroups either subnormal or self-normalizing // J. Pure and Appl. Algebra. – 2005. – **196**. – P. 271–278.
11. *Legovini P.* Gruppi finite i cue sottogruppi sono o subnormali o pronormali // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. – 1977. – **58**. – P. 129–147.
12. *Legovini P.* Gruppi finite i cue sottogruppi sono o subnormali o pronormali // Ibid. – 1981. – **65**. – P. 47–51.
13. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya., Chupordya V. A.* On some near to nilpotent groups // Fund. and appl. math. – 2008. – **14**, No 6. – P. 121–134.
14. *Schmidt R.* Subgroups lattices of groups. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
15. *Kuzennyi N. F., Subbotin I. Ya.* New characterization of locally nilpotent IH-groups // Ukr. Mat. J. – 1988. – **40**. – P. 322–326.

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

Надійшло до редакції 20.04.2011

Л. А. Курдаченко, Т. В. Ермолкевич, И. Я. Субботин

Про структуру периодических групп, конечно порожденные подгруппы которых или переставляемые, или пронормальные

Рассмотрены периодические группы, у которых конечно порожденные подгруппы или переставляемые, или пронормальные. Получено полное описание таких групп.

L. A. Kurdachenko, T. V. Ermolkevich, I. Ya. Subbotin

On the structure of periodic groups whose finitely generated subgroups are either permutable or pronormal

We consider periodic groups, whose finitely generated subgroups are either permutable or pronormal. The complete description of such groups is given.