УДК 517.927.6

В. В. Листопадова

Застосування проекційно-ітеративного методу до багатоточкових задач для диференціальних рівнянь з параметрами та запізненням

(Представлено академіком НАН України А. М. Самойленком)

Обгрунтовано застосування проекційно-ітеративного методу до розв'язання багатоточкових задач для диференціальних рівнянь з параметрами та запізненням.

У даний час багатоточкові задачі для диференціально-різницевих рівнянь з параметрами знаходять все більш широке застосування в різних областях природознавства. Оскільки побудувати точний розв'язок таких задач в більшості випадків неможливо, то вагомого значення набуває питання побудови ефективних наближених методів їх розв'язування. Серед них широке поширення отримали проекційно-ітеративні методи [1–3], які поєднують в собі ідеї як проекційних, так і ітеративних методів.

У даному повідомленні розглядається застосування проекційно-ітеративного методу до задачі

$$y^{(m)}(x) + \sum_{\tau=1}^{m} g_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x) + \sum_{\tau=1}^{m} d_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x-\Delta) = f(x) + c(x)\lambda, \quad x \in (a,b), \tag{1}$$

$$y(x_s) = \alpha_s, \qquad \alpha_s \in R, \qquad s = \overline{1,p}, \qquad a = x_1 < x_2 < \cdots < x_s < \cdots < x_p = b, \tag{2}$$

$$y(x-\Delta) = y'(x-\Delta) = \cdots = y^{(m-1)}(x-\Delta) = 0, \qquad x \in (a,c), \qquad c = a + \Delta, \tag{3}$$

в якій $c(x)\lambda$ — скалярний добуток вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ і вектор-функції

$$c(x) = (c_{1(x),} c_2(x), \ldots, c_l(x)), \qquad l = p - m.$$

Припустимо, що функції $c(x)$, $g_\tau(x)$, $d_\tau(x)$, $\tau = \overline{1,m}$, є неперервними на (a,b), $f \in L_2(a,b)$.

У роботі [4] відзначалося, що задачу (1)–(3) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} &(Ay)(x) = f(x) + c(x)\lambda + (By)(x), \\ &y(x_s) = \alpha_s, \qquad s = \overline{1,p}, \end{aligned} \tag{4}$$

де

$$(Ay)(x) = y^{(m)}(x) + \sum_{\tau=1}^{m} a_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x),$$

$$(By)(x) = \sum_{\tau=1}^{m} r_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x) - \begin{cases} 0, & x \in (a,c), \\ \displaystyle\sum_{\tau=1}^{m} d_\tau(x) y^{(m-\tau)}(x-\Delta), & x \in [c,b), \end{cases}$$

$$r_\tau(x) = a_\tau(x) - g_\tau(x), \qquad \tau = \overline{1,m}.$$

Також у [4] показано, що за допомогою заміни

$$(Ay)(x) = u(x), \qquad y(x_s) = \alpha_s, \qquad s = \overline{1,p}, \tag{5}$$

задача (4) зводиться до рівносильного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду.

Розглянемо, в чому полягає суть проекційно-ітеративного методу щодо задачі (1)–(3). Нехай $\{\psi_i(x)\}$, $i = \overline{1,n}$, — задана система лінійно незалежних функцій із $L_2(a,b)$. Наближені розв'язки задачі (1)–(3) визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} &(Ay_k)(x) = f(x) + c(x)\lambda_k + (Bz_k)(x),\\ &y_k(x_s) = \alpha_s, \qquad s = \overline{1,p}, \qquad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{6}$$

де

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + \alpha_k(x), \tag{7}$$

$$\alpha_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \eta_j(x), \tag{8}$$

невідомі коефіцієнти $a_j^k = a_j^k(n)$ знаходимо з умови

$$\int_a^b \{(Ay_k(x) - (Az_k)(x))\}\psi_i(x)\,dx = 0, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Системи функцій $\{\eta_j(x)\}$ і $\{\varphi_j(x)\}$, $j = \overline{1,n}$, зв'язані співвідношенням

$$(A\eta_j)(x) = \varphi_j(x), \qquad \eta_j(a) = \eta_j(b) = 0, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{10}$$

Нехай

$$\vartheta_k(x) = f(x) + (By_{k-1})(x), \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{11}$$

$$\gamma_j(x) = (B\eta_j)(x), \qquad j = \overline{1,n}. \tag{12}$$

Тоді формула (6) з урахуванням (11), (12) набуде вигляду

$$\begin{aligned} &(Ay_k)(x) = \vartheta_k(x) + c(x)\lambda_k + \sum_{j=1}^{n} a_j^k \gamma_j(x),\\ &y_k(x_s) = \alpha_s, \qquad s = \overline{1,p}. \end{aligned} \tag{13}$$

Нехай $\mu_j(x)$, $\zeta_k(x)$, $\xi(x)$ — розв'язки таких допоміжних задач відповідно:

$$(A\mu_j)(x) = \gamma_j(x), \qquad \mu_j(x_s) = 0, \qquad s = \overline{1,p}, \qquad j = \overline{1,n}, \tag{14}$$

$$(A\zeta_k)(x) = \vartheta_k(x), \qquad \zeta_k(x_s) = \alpha_s, \qquad s = \overline{1,p}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

$$(A\xi)(x) = c(x), \qquad \xi(x_s) = 0, \qquad s = \overline{1,p}. \tag{16}$$

На основі формул (14)–(16) шукане наближення, яке визначаємо із задачі (13), матиме вигляд

$$y_k(x) = \zeta_k(x) + \xi(x)\lambda_k + \sum_{j=1}^{n} a_j^k \mu_j(x). \tag{17}$$

Підставивши (17) у співвідношення (9) і врахувавши умову

$$\alpha_s = y_k(x_s) = \zeta_k(x_s) + \xi(x_s)\lambda_k + \sum_{j=1}^{n} a_j^k \mu_j(x_s), \qquad s = \overline{2, p-1},$$

яка випливає з умови задачі і виразу (17), для визначення невідомих коефіцієнтів a_j^k, $j = \overline{1, n}$, і параметрів λ_k одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$P\overline{\rho_k} = \overline{\theta_k}, \tag{18}$$

в якій

$$P = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} & l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1e} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} & l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2e} \\ & & \vdots & & & & \vdots & \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} & l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{ne} \\ \overline{\beta_{11}} & \overline{\beta_{12}} & \dots & \overline{\beta_{1n}} & \overline{l_{11}} & \overline{l_{12}} & \dots & \overline{l_{1e}} \\ \overline{\beta_{21}} & \overline{\beta_{22}} & \dots & \overline{\beta_{2n}} & \overline{l_{21}} & \overline{l_{22}} & \dots & \overline{l_{2e}} \\ & & \vdots & & & & \vdots & \\ \overline{\beta_{e1}} & \overline{\beta_{e2}} & \dots & \overline{\beta_{en}} & \overline{l_{e1}} & \overline{l_{e2}} & \dots & \overline{l_{ee}} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\overline{\rho_k} = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_e^k)^{\perp}, \qquad \overline{\theta_k} = (b_1^k, b_2^k, \dots, b_n^k, d_1^k, d_2^k, \dots, d_e^k)^{\perp}, \tag{20}$$

$$\beta_{ij} = \int_a^b \{\varphi_i(x) - \gamma_j(x)\}\psi_i(x)\,dx, \qquad i, j = \overline{1, n}, \tag{21}$$

$$l_{i\nu} = -\int_a^b c_\nu(x)\psi_i(x)\,dx, \qquad i = \overline{1, n}, \qquad \nu = \overline{1, l}, \tag{22}$$

$$\overline{\beta_{sj}} = \mu_j(x_{s+1}), \qquad \overline{l_{s\nu}} = \xi_\nu(x_{s+1}), \qquad s = \overline{1, l}, \tag{23}$$

$$b_i^k = \int_a^b \varepsilon_k(x)\psi_i(x)\,dx, \qquad \varepsilon_k(x) = \vartheta_k(x) - (Ay_{k-1})(x), \tag{24}$$

$$d_s^k = \alpha_{s+1} - \zeta_k(x_{s+1}). \tag{25}$$

Якщо система рівнянь (18) має єдиний розв'язок, то функція $z_k(x)$ і параметр λ_k визначаються однозначно. Підставивши їх значення в (6) і розв'язавши вказану задачу, одержимо шукане наближення $y_k(x)$.

Для дослідження збіжності проекційно-ітеративного методу зведемо алгоритм (6)–(10) до проекційно-ітеративного методу для інтегрального рівняння Фредгольма. Для цього зробимо заміну

$$(Ay_k)(x) = u_k(x), \qquad y_k(x_s) = \alpha_s, \qquad s = \overline{1,p}. \tag{26}$$

Врахувавши формули (7), (8), (10), (26), матимемо співвідношення

$$(Az_k)(x) = u_{k-1}(x) + \omega_k(x), \qquad z_k(x_s) = \alpha_s, \qquad s = \overline{1,p}, \tag{27}$$

де

$$\omega_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k \varphi_j(x). \tag{28}$$

Знайдемо розв'язок задачі (27)

$$z_k(x) = h(x) + \int\limits_a^b G(x,t)[u_{k-1}(t) + \omega_k(t)]\,dt, \qquad x \in (a,b),$$

і підставимо його у співвідношення (6), (9), після чого одержимо

$$u_k(x) = l(x) + c(x)\lambda_k + \int\limits_a^b K(x,t)[u_{k-1}(t) + \omega_k(t)]\,dt, \tag{29}$$

$$\int\limits_a^b G(x_s,t)u_k(t)dt = \alpha_s - h(x_s), \qquad s = \overline{2,p-1}, \tag{30}$$

$$\int\limits_a^b \{u_k(x) - u_{k-1}(x) - \omega_k(x)\}\psi_i(x)\,dx = 0, \qquad i = \overline{1,n}, \tag{31}$$

де

$$l(x) = f(x) + (Bh)(x),$$

$$K(x,t) = \sum_{\tau=1}^{m} r_\tau(x)G^{(m-\tau)}(x) - \begin{cases} 0, & x \in (a,c), \\ \sum\limits_{\tau=1}^{m} d_\tau(x)G^{(m-\tau)}(x-\Delta,t), & x \in [c,b), \ t \in (a,b). \end{cases}$$

Підставивши (29) в (30), матимемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$C\lambda_k = d_k,$$

де

$$C = \{c_{s\tau}\}, \quad c_{s\tau} = \int\limits_a^b G(x_{s+1},t)c_\tau(t)\,dt, \quad s = \overline{1,l}, \quad \tau = \overline{1,l}, \quad d_k = (d_1^k, d_2^k, \ldots, d_l^k),$$

$$d_{sk} = \alpha_{s+1} - h(x_{s+1}) - \int\limits_a^b G(x_{s+1}, t) l(t)\, dt - \int\limits_a^b\int\limits_a^b G(x_{s+1}, t) K(t, \zeta)\{u_{k-1}(\zeta) + \omega_k(\zeta)\}\, d\zeta dt,$$

$$s = \overline{1, l}.$$

Виключимо з неї параметр λ_k

$$\lambda_k = C^{-1} d_k,$$

і підставимо його в (29), одержимо

$$u_k(x) = g(x) + \int\limits_a^b M(x, t)\{u_{k-1}(t) + \omega_k(t)\}\, dt, \tag{32}$$

де

$$g(x) = l(x) + c(x) C^{-1} p, \qquad M(x, t) = K(x, t) + c(x) C^{-1} D(t),$$

$p, D(t)$ — вектор і вектор-функція відповідно, компоненти яких мають вигляд

$$p_s = \alpha_{s+1} - h(x_{s+1}) - \int\limits_a^b G(x_{s+1}, t) l(t)\, dt,$$

$$D_s(t) = -\int\limits_a^b G(x_{s+1}, \zeta) K(\zeta, t)\, d\zeta, \qquad s = \overline{1, l}.$$

Таким чином, збіжність проекційно-ітеративного методу (6)–(10) розв'язання задачі (1)–(3) зводиться до збіжності проекційно-ітеративного методу (32), (28), (31) розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Використавши результати [3], одержимо таке твердження.

Теорема. *Якщо одиниця не є точкою спектра інтегрального оператора* $(Mu)(x) = \int\limits_a^b M(x, t) u(t)\, dt$, *системи функцій* $\{\varphi_i(x)\}$ *і* $\{\psi_i(x)\}$ *задовольняють умову Польського і перша система є повною в* $L_2(a, b)$, *то знайдеться такий номер* n, *при якому проекційно-ітеративний метод* (6)–(10) *збігається, і швидкість збіжності збільшується зі зростанням* n.

Обчислення за алгоритмом (6)–(10) можна провести таким чином. Задаємо лінійно незалежні системи функцій $\{\varphi_i(x)\}$, $\{\psi_i(x)\}$, $i = \overline{1, n}$, і з задачі (10) знаходимо систему функцій $\{\eta_j(x)\}$. Обчислюємо функції

$$\gamma_j(x) = (B\eta_j)(x).$$

Розв'язуючи допоміжні задачі (14), (16), знаходимо $\mu_j(x)$, $\xi(x)$. Обчислюємо елементи β_{ij}, l_{iv}, $\overline{\beta_{sj}}$, $\overline{l_{sv}}$ матриці P за формулами (21)–(23) і знаходимо її обернену P^{-1}. Після цього переходимо до реалізації основної обчислюваної схеми.

Нехай наближення $y_{k-1}(x)$ вже побудовано. Обчислюємо функцію $u_{k-1}(x) = (Ay_{k-1})(x)$. Виконавши ітерацію

$$\vartheta_k = f(x) + (By_{k-1})(x),$$

розв'язуємо допоміжну задачу

$$(A\zeta_k)(x) = \vartheta_k(x), \qquad \zeta_k(x_s) = \alpha_s, \qquad s = \overline{1, p},$$

і знаходимо нев'язку

$$\varepsilon_k(x) = \vartheta_k(x) - u_{k-1}(x).$$

Формуємо вектор $\overline{\theta_k} = (b_1^k, b_2^k, \ldots, b_n^k, d_1^k, d_2^k, \ldots, d_l^k)^{\perp}$, координати якого обчислюємо за формулами (24), (25).

Складаємо систему рівнянь $P\overline{\rho_k} = \overline{\theta_k}$, знаходимо її розв'язок

$$\overline{\rho_k} = P^{-1}\overline{\theta_k} = (a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k, \lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_l^k)^{\perp}$$

і будуємо шукане наближення

$$y_k(x) = \zeta_k(x) + \xi(x)\lambda_k + \sum_{j=1}^{n} a_j^k \mu_j(x).$$

Виконавши нескладні перетворення, можна встановити рівносильність даної обчислюваної схеми алгоритму (6)–(10).

1. *Соколов Ю. Д.* Метод осреднения функциональных поправок. – Киев: Наук. думка, 1967. – 336 с.
2. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1968. – 244 с.
3. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.
4. *Листопадова В. В.* Про одну багатоточкову задачу для диференціальних рівнянь з відхиленням аргумента і параметрами // Доп. НАН України. – 2011. – № 4. – С. 30–33.

НТУ України "Київський політехнічний інститут"

Надійшло до редакції 30.06.2011

В. В. Листопадова

Применение проекционно-итеративного метода к многоточечным задачам для дифференциальных уравнений с параметрами и запаздыванием

Обосновано применение проекционно-итеративного метода к решению многоточечных задач для дифференциальных уравнений с параметрами и запаздыванием.

V. V. Listopadova

Application of the projection-iteration method to multipoint problems for parametric differential equations with delay

The application of the projection-iterative method to the multipoint problems for parametric differential equations with delay is substantiated.