УДК 539.421

А. О. Камінський, М. Ф. Селіванов, Ю. О. Чорноіван

Початковий етап руйнування в'язкопружної пластини з двома колінеарними тріщинами однакової довжини

(Представлено академіком НАН України В. Д. Кубенком)

Вивчається напружено-деформований стан нескінченного лінійно в'язкопружного ізотропного тіла, послабленого колінеарними тріщинами однакової довжини, під дією нормального до ліній тріщин навантаження, інтенсивність якого не змінюється з часом. На основі отриманого в рамках моделі Леонова–Панасюка–Дагдейла розкриття в зоні нелінійних деформацій побудовані рівняння докритичного зростання тріщин та наведено чисельний алгоритм їх розв'язання. Проаналізовано розв'язки рівнянь докритичного розвитку тріщин при визначенні тривалості початкового періоду зростання, протягом якого розкриття в кінцях тріщин досягає критичного.

Дослідженням кінетики зростання однієї тріщини в лінійно в'язкопружному тілі в рамках моделі Леонова–Панасюка–Дагдейла присвячено роботи [1, 2]. Значно менше розв'язано задач про розвиток систем тріщин у в'язкопружних тілах, хоча ця проблема дуже важлива, оскільки колінеарні тріщини при розвитку в умовах повзучості матеріалу можуть об'єднуватися у магістральну тріщину, яка призводить до повного руйнування в'язкопружного тіла. Розв'язок однієї з таких задач для двох колінеарних макротріщин однакової довжини у в'язкопружній пластині при розтязі наведено в [3]. Однак цю задачу розв'язано чисельним методом тільки для малих зон передруйнування на основі наближеного розв'язку пружнопластичної задачі, наведеного у роботі [4], причому було розглянуто лише деякі прості моделі в'язкопружних тіл. У даній роботі розглянуто аналогічну задачу, але для немалих зон передруйнування на основі точного розв'язку пружнопластичної задачі, наведеного у [5] з урахуванням сучасних прикладних моделей в'язкопружності. Метою роботи є побудова визначальних рівнянь для випадку зростання та злиття двох колінеарних тріщин у в'язкопружному тілі, а також визначення підходів до розв'язання визначальних рівнянь.

Постановка задачі. Нехай у лінійно в'язкопружному нескінченному ізотропному тілі вздовж однієї прямої розташовано систему двох тріщин, що перебувають під дією однорідного напруження p, прикладеного на нескінченності перпендикулярно до лінії тріщин. Введемо ортогональну декартову систему координат, вісь x якої спрямуємо вздовж лінії тріщин (рис. 1).

Будемо вважати, що області нелінійної поведінки матеріалу в околі вершин тріщин можна замінити розрізами, до берегів яких прикладено стискаючі напруження інтенсивністю σ_0. Відповідні позначення наведені на рис. 1.

Запишемо граничні умови поставленої задачі

$$v = 0, \qquad \tau_{12} = 0 \qquad \text{при} \qquad |x| < c \bigcup |x| > d;$$
$$\sigma_{22} = \sigma_0, \qquad \tau_{12} = 0 \qquad \text{при} \qquad c \leqslant x < a \bigcup b < |x| \leqslant d;$$
$$\sigma_{22} = -p, \qquad \tau_{12} = 0 \qquad \text{при} \qquad a \leqslant |x| \leqslant b,$$

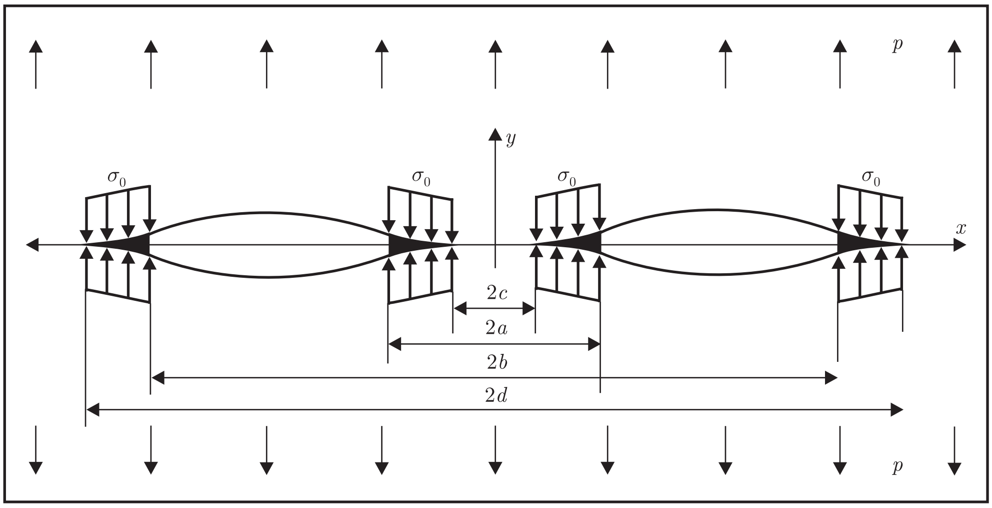

Рис. 1

причому координати кінців розрізів слід визначати з умови скінченності напружень у вершинах тріщин.

Через симетрію задачі про поширення колінеарних тріщин будемо визначати координати фізичних кінців однієї (на рис. 1 — правої) тріщини a і b як функції часу. Кінець $x = a$, ближчий до початку координат, будемо називати лівим, кінець $x = b$ — правим. Покладаємо початкову безрозмірну довжину тріщини $b_0 - a_0$ рівною одиниці.

Як і у випадку поширення однієї тріщини, час закінчення інкубаційного періоду розкриття двох колінеарних тріщин є моментом початку збільшення довжини тріщин. Кінець першого етапу зростання колінеарних тріщин визначимо умовою досягнення розкриттям в лівому і правому кінцях фізичної тріщини ($\delta(a_0, t)$ і $\delta(b_0, t)$ відповідно) критичного значення δ^* або злиттям тріщин до досягнення критичного розкриття в правому кінці. Пружне розкриття в лівому кінці завжди перевищуватиме розкриття в правому.

В'язкопружне розкриття двох колінеарних тріщин рівної довжини.

В роботах [1, 2] запропоновано рівняння для визначення фізичного розміру тріщини у в'язкопружному анізотропному тілі у формі

$$L_0 v[a(t), a(t)] + \int\limits_0^t L'(t-\tau) v[a(t); a(\tau)]\,\mathrm{d}\tau = L_0 v^*, \tag{1}$$

де $Lv(x; a)$ — пружне розкриття тріщини довжиною a в точці x, $L = 2/E$ для випадку ізотропного матеріалу з модулем Юнга E, $\delta^* = L_0 v^*$ — критичне розкриття тріщини. Критичне розкриття для кожного матеріалу визначається експериментально і є однією з основних характеристик тріщиностійкості. Ліва частина визначального рівняння (1) є виразом для розкриття $\delta(x, t)$ в точці $x = a(t)$ на лінії тріщини в момент часу t, записаною в формі інтеграла Больцмана спадкової пружності.

Подібно до випадку однієї тріщини у в'язкопружному ізотропному тілі, навантаженому перпендикулярним до лінії тріщини навантаженням на нескінченності, можна довести, що у поставленій задачі, якщо довжина тріщин не зменшується з часом, можливе застосування принципу Вольтерра. Отже розв'язок в'язкопружної задачі побудуємо на основі наведеного у роботі [5] розв'язку пружної задачі.

Запишемо основний закон спадкової пружності у такій формі:

$$\sigma_{ij}(t) = \int\limits_0^t R_{ijkl}(t-\tau)\,\mathrm{d}\varepsilon_{kl}(\tau), \qquad (2)$$

де R — функції релаксації матеріалу (у випадку ізотропного матеріалу незалежних функцій — дві, наприклад, модуль Юнга E і коефіцієнт Пуассона ν). Ці функції з необхідною точністю можна описати фізично обгрунтованою моделлю [6]

$$R(t) = R_0 - \sum_i \lambda_k [1 - \mathrm{E}_{\delta,1}(-b_i t^\delta)], \qquad (3)$$

де R_∞ і R_0 — довготривале і миттєве значення механічної характеристики,

$$\mathrm{E}_{\delta,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\delta n + \gamma)} \quad - \qquad (4)$$

функція Міттаг–Леффлера; Γ — гамма-функція Ейлера. При $\delta = 1$ і $\gamma = 1$ функція (4) перетворюється на експоненту.

Для якісного дослідження при врахуванні релаксаційних властивостей матеріалу будемо використовувати лише один доданок в (3). У цьому випадку модуль Юнга E, який входить у вираз для пружного розв'язку з роботи [5] в області зміни часу подамо у вигляді

$$E(t) = E_\infty + (E_0 - E_\infty)\mathrm{E}_{\delta,1}(-bt^\delta). \qquad (5)$$

Для побудови розв'язку в області часу для розкриття тріщини скористаємося принципом пружно-в'язкопружної аналогії [7], замінюючи залежну від часу характеристику релаксації (5) відповідною перетвореною величиною

$$\widetilde{E}(s) = E_\infty + (E_0 - E_\infty)\frac{s^\delta}{s^\delta + b},$$

де $\widetilde{E}(s) = s\mathcal{L}\{E(t)\}$ — перетворення Лапласа–Карсона функції часу $E(t)$; s — параметр перетворення.

Беручи до уваги властивості функції Міттаг–Леффлера, в області зміни часу отримаємо для повзучості і швидкості повзучості:

$$\frac{1}{2}L(t) = D_0 + (D_\infty - D_0)[1 - \mathrm{E}_{\delta,1}(-\beta t^\delta)], \qquad (6)$$

$$\frac{1}{2}L'(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\widetilde{L}(s) - \widetilde{L}_\infty\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{D_0\lambda}{s^\delta + \beta}\right\} = D_0\lambda t^{\delta-1}\mathrm{E}_{\delta,\delta}(-\beta t^\delta). \qquad (7)$$

Розкриття в напрямку осі Oy в точці з координатою $(x, 0)$ як функцію від часу можна, як і співвідношення між напруженнями і деформаціями в спадковому тілі, записати у формі інтеграла Больцмана

$$\delta(x,t) = L_0 v[x; a(t), b(t)] + \int\limits_0^t L'(t-\tau) v[x; a(\tau), b(\tau)]\,\mathrm{d}\tau. \qquad (8)$$

У рівнянні (8) $L(t)$ і $L'(t)$ визначаються виразами (6) та (7) відповідно, а пружне вертикальне переміщення берегів тріщини, у позначення якого ми ввели координати кінців тріщини $v(x; a, b) = Ev(x)$, де $v(x)$ відповідає виразу вертикального переміщення берегу тріщини з роботи [5].

Аналогом рівняння докритичного зростання однієї тріщини або (1) у випадку двох колінеарних тріщин рівної довжини буде система рівнянь

$$\begin{cases} \delta(x = a(t), t) = \delta^*, \\ \delta(x = b(t), t) = \delta^*. \end{cases} \tag{9}$$

Підставляючи в систему вираз для $\delta(x, t)$ з (8) і $\delta^* = L_0 v^*$, отримаємо систему нелінійних інтегральних рівнянь у такому вигляді:

$$\begin{cases} v[a(t); a(t); b(t)] + \int\limits_0^t l'(t - \tau) v[a(t); a(\tau); b(\tau)] \, \mathrm{d}\tau = v^*, \\ v[b(t); a(t); b(t)] + \int\limits_0^t l'(t - \tau) v[b(t); a(\tau); b(\tau)] \, \mathrm{d}\tau = v^*, \end{cases} \tag{10}$$

де $l(t) = L(t)/L_0$. Будемо визначати час інкубаційного періоду як момент початку зростання довжини тріщин. З огляду на те, що пружне розкриття в лівому кінці тріщини перевищує розкриття у правому кінці, час інкубаційного періоду t_0 визначатиметься умовою досягнення розкриттям в лівому кінці критичного значення:

$$L(t_0) v(a_0; a_0, b_0) = \delta^*. \tag{11}$$

За час t_0 розкриття в правому кінці зросте до величини $L(t_0) v(b_0; a_0, b_0)$, яка не перевищуватиме δ^*.

З моменту часу t_0 довжина тріщини починає зростати. Поки виконується умова

$$\delta(x = b_0, t) < \delta^*, \tag{12}$$

координати лівого кінця визначатиме з першого з рівнянь системи (10). Момент часу t_{b0} відповідає досягненню розкриття в правому кінці тріщини критичного значення. З t_{b0} почнеться наступний етап поширення тріщин, який не є предметом дослідження цієї роботи.

Чисельне розв'язання рівнянь зростання тріщин. Для аналізу розв'язку задачі, не маючи експериментально визначеного параметра тріщиностійкості матеріалу пластини δ^*, введемо модельний параметр k_δ, що характеризує рівень критичного розкриття тріщини в пластині з цього матеріалу. Досліджуватимемо розв'язки задачі при рівнях зовнішнього навантаження, що відповідають зміні модельного параметра ρ_2, в межах від 6 до 10. Розглянемо одну тріщину одиничної довжини, розкриття, в вершинах якої можна визначити як $Lv(0{,}5; 0; 0{,}5)$, що залежить від параметра ρ_2. Обчислимо

$$v_{\min} = \min_{t, \rho_2} \left\{ \frac{L(t)}{L_0} v(0{,}5; 0; 0{,}5) \right\}, \qquad v_{\max} = \max_{t, \rho_2} \left\{ \frac{L(t)}{L_0} v(0{,}5; 0; 0{,}5) \right\}.$$

Розглядатимемо рівні критичного розкриття $\delta^* = L_0 v^*$, де v^* визначається рівнем деякого параметра задачі k_δ таким чином:

$$\lg v^* = \lg v_{\min} + k_\delta(\lg v_{\max} - \lg v_{\min}).$$

Тоді при $0 < k_\delta < 1$ одиночна тріщина обов'язково почне докритичне зростання.

Для чисельного розв'язання рівнянь системи (10) розіб'ємо відрізок на продовженні тріщини від точки a_0 до точки a_* на N відрізків. Тоді з першого з рівнянь системи (10) можна послідовно визначати час проходження тріщиною i-го вузла розбиття $a_i = a(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. У межах кожного часового інтервалу подаємо розв'язок $a(t)$ у формі показникової функції

$$a(t) = a_{i-1}\left(\frac{a_i}{a_{i-1}}\right)^{(t-t_{i-1})/(t_i-t_{i-1})},$$

яка задовольняє умови $a(t_{i-1}) = a_{i-1}$, $a(t_i) = a_i$.

Тривалість інкубаційного періоду t_0 визначимо з рівняння (11). Моменти часу t_i проходження i-го вузла розбиття визначатимемо з рівняння

$$v(a_i; a_i; b_0) + \int\limits_0^{t_i} l'(t_i - \tau) v(a_i; a(\tau); b_0)\, \mathrm{d}\tau = v^*. \tag{13}$$

При $a_i < c_0$

$$v(a_i; a(\tau); b_0) = 0, \qquad \tau < t',$$

де t' задовольняє рівняння $c(t') = a_i$, і інтегрування в (13) можна проводити не від нуля, а від t'.

Визначивши кожний наступний момент часу t_i, перевіряємо виконання умови (12). У разі виконання умови переходимо до визначення наступного t_i, якщо умова не виконується, визначаємо час t_{b0} закінчення першого етапу розвитку двох колінеарних тріщин з системи рівнянь двох змінних, а саме, t_{b0} та a_{b0} — координати лівого кінця в момент часу t_{b0}.

Всі розв'язки наведено для матеріалу пластини з такими реологічними параметрами моделі (5):

$$E_0 = 4000 \text{ МПа}, \qquad E_\infty = 40 \text{ МПа}, \qquad \delta = 0{,}5, \qquad b = 0{,}1 \text{ с}^{-\delta}.$$

На рис. 2 для значень параметрів задачі $a_0 = 0{,}1$, $\rho_2 = 6$ і $k_\delta = 0{,}3$ наведені графіки вертикальних переміщень берегів тріщини в правій і лівій зонах нелінійних деформацій в моменти часу $t = t_i$ проходження лівим кінцем i-го вузла розбиття

$$v(x) = v(x; a_i, b_0) + \int\limits_0^{t_i} l'(t_i - \tau) v(x; a(\tau), b_0)\, \mathrm{d}\tau,$$

$c_i \leqslant x \leqslant a_i$ — для лівої зони нелінійних деформацій, $b_0 \leqslant x \leqslant d_i$ — для правої.

Розбиття побудовано таким чином, щоб один з вузлів збігся з точкою $x = c_0$ на продовженні тріщини. Так можна зробити, взявши довжину кожного наступного інтервалу

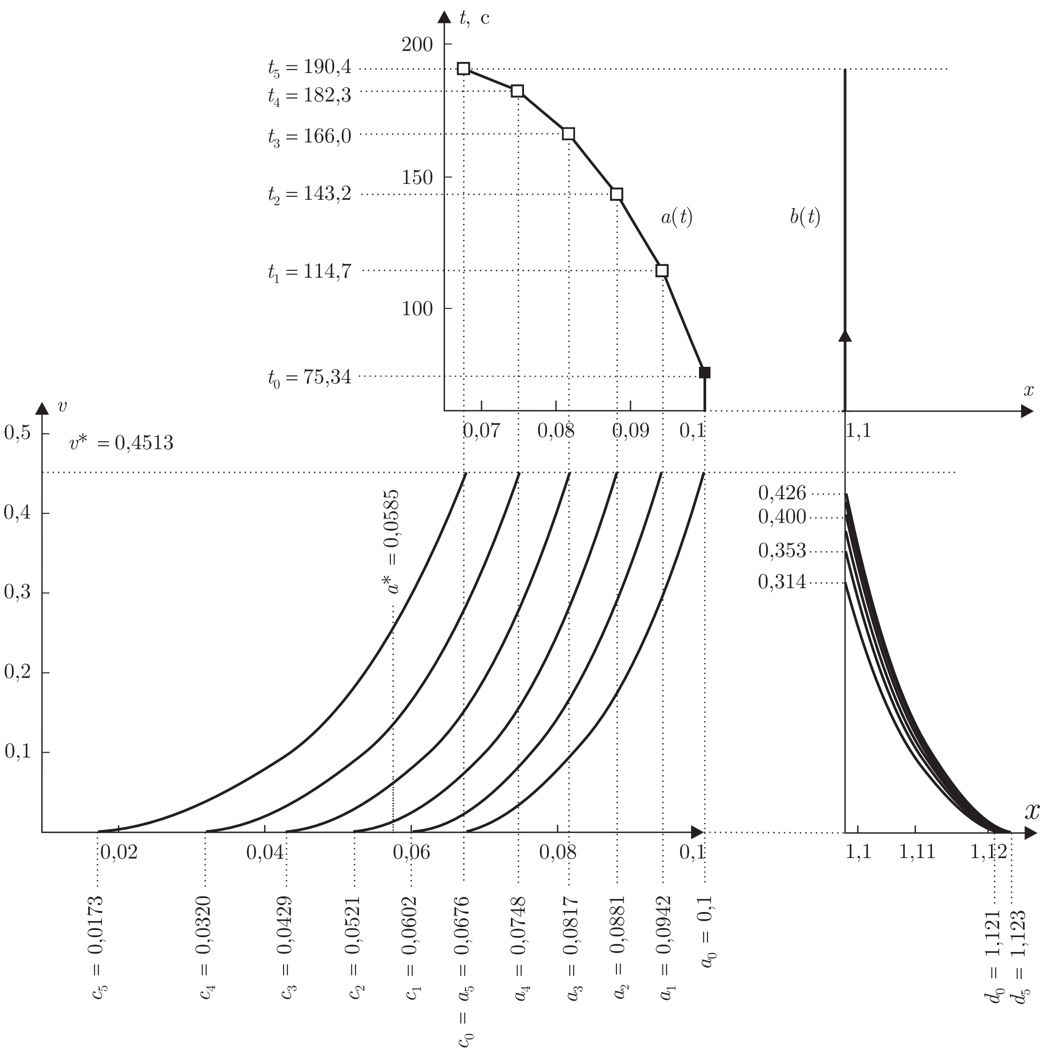

Рис. 2

розбиття в $q > 1$ разів більшою за довжину попереднього інтервалу. Такий вибір вузлів виявляється оптимальнішим за розбиття на інтервали однакової довжини з тієї причини, що швидкість зростання розміру тріщини збільшується з часом.

Для наведеного на рис. 2 розв'язку етап злиття починається в момент часу $t = t_5 = 190{,}4$ с (звичайно, це значення можна уточнювати шляхом збільшення числа вузлів розбиття N). Вертикальне переміщення в правій вершині тріщини ($v(b_0; a_5, b_0) = 0{,}426$) не досягло критичного значення ($v^* = 0{,}4513$) до початку етапу злиття. Також відзначимо, що для дослідженої комбінацій вихідних параметрів не відбулося злиття зон передруйнування до початку етапу злиття ($c_5 = 0{,}0173 > 0$).

Викладений у цій роботі підхід до розв'язання задачі про початковий етап розвитку двох колінеарних тріщин може бути використано для визначення характеристик розвитку тріщин протягом основного етапу, а також визначення довговічності елементів конструкцій з тріщинами.

1. *Каминский А. А., Гаврилов Д. А.* Длительное разрушение полимерных и композитных материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.
2. *Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Чорноіван Ю. О.* Про докритичний розвиток тріщини зсуву в композиті з в'язкопружними компонентами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 99–108.
3. *Каминский А. А.* Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1990. – 312 с.
4. *Витвицкий П. М.* Полосы скольжения при растяжении тонких пластин с прямолинейными разрезами // Концентрация напряжений. – Киев: Наук. думка, 1965. – С. 77–85.
5. *Камінський А. О., Селіванов М. Ф., Чорноіван Ю. О.* Дослідження переміщення берегів двох колінеарних тріщин рівної довжини // Доп. НАН України. – 2011. – № 11. – С. 70–75.
6. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – Москва: Наука, 1977. – 384 с.
7. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – Москва: Мир, 1982. – 336 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 01.08.2011

А. А. Каминский, М. Ф. Селиванов, Ю. А. Черноиван

Начальный этап разрушения вязкоупругой пластины с двумя коллинеарными трещинами одинаковой длины

Изучается напряженно-деформированное состояние бесконечного линейно вязкоупругого изотропного тела, ослабленного коллинеарными трещинами одинаковой длины, под действием нормального к линии трещин нагружения, интенсивность которого не изменяется со временем. На основе полученного в рамках модели Леонова–Панасюка–Дагдейла раскрытия в зоне нелинейных деформаций построены уравнения докритического роста трещин и приведен численный алгоритм их решения. Проанализированы решения уравнений докритического развития трещин при определении длительности начального периода роста, на протяжении которого раскрытие в концах трещин достигает критического.

A. A. Kaminsky, M. F. Selivanov, Yu. O. Chornoivan

The initial stage of fracture of a viscoelastic plate with two collinear cracks of the same length

We study the stress-strain state of the infinite linear viscoelastic isotropic body weakened by two collinear cracks of equal lengths under a stable loading normal to the crack line. The equations of subcritical crack growth are derived, and a numerical algorithm of their solution is given using the solution for the opening in the zone on nonlinear deformations for the Leonov–Panasyuk–Dugdale crack model. The solutions of crack growth equations are analyzed for the initial (subcritical) crack growth period determination.