УДК 534-21:537.226.86

Член-кореспондент НАН України **М. О. Шульга, В. В. Левченко**

До теорії неосесиметричних електропружних коливань п'єзокерамічних пластин

Одержано загальний розв'язок задачі про неосесиметричні електромеханічні коливання п'єзокерамічної кільцевої пластини. У випадку вільних від механічних напружень границь для пластин з радіальними розрізами електродного покриття визначено власні частоти і форми коливань для перших гармонік за окружною координатою.

П'єзоелектричні тонкі пластинчасті перетворювачі з товщинною поляризацією використовуються в пристроях різного функціонального призначення [1–3]. У дискових і кільцевих вібраторах з суцільними електродами на лицьових площинах збуджуються осесиметричні коливання [2, 4]. Якщо ж електроди кільцевої пластини мають діаметральні розрізи і електропружні сектори збуджуються противофазно, то в ній виникають неосесиметричні за окружною координатою коливання. Форми цих коливань за цією координатою апріорі визначаються числом діаметральних розрізів електродів. Систематичне теоретичне дослідження частотного спектра, а також форм коливань за радіальною координатою відсутні [2, 4–6]. Цим питанням і присвячена дана робота.

Тонку п'єзокерамічну пластину товщиною h віднесемо до прямокутних декартових координат x, y, z, причому координатна площина $z = 0$ збігається з серединною площиною пластини. При товщинній поляризації скористаємося [1, 2] матеріальними залежностями у формі

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx} = s_{11}^E\sigma_{xx} + s_{12}^E\sigma_{yy} + s_{13}^E\sigma_{zz} + d_{13}E_z,\\
&\varepsilon_{yy} = s_{21}^E\sigma_{xx} + s_{11}^E\sigma_{yy} + s_{13}^E\sigma_{zz} + d_{13}E_z,\\
&\varepsilon_{zz} = s_{31}^E(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + s_{33}^E\sigma_{zz} + d_{33}E_z,\\
&2\varepsilon_{yz} = s_{55}^E\sigma_{yz} + d_{15}E_y, \qquad D_y = \varepsilon_{11}^T E_y + d_{15}\sigma_{yz},\\
&2\varepsilon_{xz} = s_{55}^E\sigma_{xz} + d_{15}E_x, \qquad D_x = \varepsilon_{11}^T E_x + d_{15}\sigma_{xz},\\
&2\varepsilon_{yx} = s_{66}^E\sigma_{yx}, \qquad D_z = \varepsilon_{33}^T E_z + d_{31}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + d_{33}\sigma_{zz},
\end{aligned} \tag{1}$$

причому $s_{66}^E = 2(s_{11}^E - s_{12}^E)$.

Якщо тонка п'єзокерамічна пластина з електродорованими лицьовими площинами $z = \pm h/2$ знаходиться в умовах плоского напруженого стану, то, прийнявши гіпотези $u_x = u_x(x, y, t)$, $u_y = u_y(x, y, t)$, $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$, $E_x = E_y = 0$, $E_z = E_z(x, y, t)$, із загальних матеріальних співвідношень (1) отримаємо [2] формули

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{s_{11}^E(1 - \nu_E^2)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu_E\frac{\partial u_y}{\partial y} - (1 + \nu_E)d_{31}E_z\right),$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{s_{11}^E(1-\nu_E^2)}\left(\nu_E \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} - (1+\nu_E)d_{31}E_z\right), \tag{2}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{2(1+\nu_E)s_{11}^E}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right),$$

в яких аналог коефіцієнта Пуассона $\nu_E = -s_{12}^E/s_{11}^E$. З трьох рівнянь механічних коливань при нехтуванні товщинними прискореннями залишаться тільки два

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}. \tag{3}$$

З формул (2), (3) після нескладних перетворень отримаємо рівняння коливань у переміщеннях

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu_E}{2}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}\right) - (1+\nu_E)d_{31}\frac{\partial E_z}{\partial x} = (1-\nu_E^2)s_{11}^E\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1-\nu_E}{2}\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y}\right) - (1+\nu_E)d_{31}\frac{\partial E_z}{\partial y} = (1-\nu_E^2)s_{11}^E\rho\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Розв'язок системи (4) подамо [5] у вигляді

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \qquad u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \tag{5}$$

Якщо функції $\Phi(x,y,t)$, $\Psi(x,y,t)$ визначити з хвильових рівнянь

$$\begin{aligned}
&\Delta\Phi - (1+\nu_E)d_{31}E_z = (1-\nu_E^2)s_{11}^E\rho\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},\\
&\Delta\Psi = 2(1+\nu_E)s_{11}^E\rho\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2},
\end{aligned} \tag{6}$$

то рівняння (4) будуть виконані. Для пластини з суцільними електродами на лицьових площинах $z = \pm h/2$ електричний потенціал (при нехтуванні впливом країв пластини) $\varphi = h^{-1}zV_0(t)$. Такому потенціалу відповідають [1] компоненти напруженості електричного поля $E_x = E_y = 0$, $E_z = h^{-1}V_0(t)$, а значить, у рівнянні (6), враховуючи (4), потрібно знехтувати величиною $(1+\nu_E)d_{31}E_z$. У полярних координатах $r\cos\theta = x$, $r\sin\theta = y$, вирази (5) для переміщень будуть такими:

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \tag{7}$$

Матеріальні залежності (2) для механічних напружень з урахуванням формул Коші для деформацій запишуться у вигляді

$$\begin{aligned}
&\sigma_{rr} = \frac{1}{(1-\nu_E^2)s_{11}^E}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} - (1+\nu_E)d_{31}E_z\right),\\
&\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{(1-\nu_E^2)s_{11}^E}\left(\nu_E\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - (1+\nu_E)d_{31}E_z\right),\\
&\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2(1+\nu_E)s_{11}^E}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

З формул (7), (8) одержимо такі вирази для механічних напружень через потенціали Φ, Ψ в полярних координатах:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{(1-\nu_E^2)s_{11}^E}\left[\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\right) + \nu_E\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\right) - \right.$$
$$\left. - (1+\nu_E)d_{13}E_z\right],$$
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{(1-\nu_E^2)s_{11}^E}\left[\nu_E\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right)\right) - \right. \tag{9}$$
$$\left. - (1+\nu_E)d_{13}E_z\right],$$
$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2(1+\nu_E)s_{11}^E}\left(\frac{2}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right).$$

Однорідні граничні умови для механічних переміщень і напружень (по дві умови при $r = r_0$ і $r = r_1$)) вибираються по одній з двох альтернативних пар ($j = 0, 1$)

$$u_r(r_j, \theta, t) = 0 \quad \wedge \quad \sigma_{rr}(r_j, \theta, t) = 0,$$
$$u_\theta(r_j, \theta, t) = 0 \quad \wedge \quad \sigma_{r\theta}(r_j, \theta, t) = 0. \tag{10}$$

Початкові умови при усталених гармонійних коливаннях не формулюються.

Розглянемо п'єзокерамічне кільце з внутрішнім r_0 і зовнішнім r_1 радіусами. Електродні покриття на лицьових площинах $z = \pm h/2$ розділені на $2N$ секторів з протифазними сусідніми підключеннями так, що $E_{za} = (-1)^{n-1}V_0/h$, $n = 1, \ldots, 2N$.

Розв'язок рівнянь (6) у полярних координатах r, θ, в першому з яких доданок $(1+\nu)d_{31}E_z$ потрібно брати рівним нулеві [5], при гармонійних коливаннях$f(r,\theta,t) = \operatorname{Re} f^a(r,\theta)\exp i\omega t$ з циклічною частотою ω вибираємо у вигляді [7]

$$\Phi(r,\theta,t) = R^2 \operatorname{Re}\sum_m \{A_{m1}J_m(k_1r) + A_{m2}Y_m(k_1r)\}\sin m\theta \exp i\omega t,$$
$$\Psi(r,\theta,t) = R^2 \operatorname{Re}\sum_m \{A_{m3}J_m(k_2r) + A_{m4}Y_m(k_2r)\}\cos m\theta \exp i\omega t. \tag{11}$$

Тут $J_m(k_jr)$ та $J_m(k_jr)$ — циліндричні функції першого та другого роду m-го порядку [5], $k_1^2 = (1-\nu_E^2)s_{11}^E\rho\omega^2$, $k_2^2 = 2(1+\nu_E)s_{11}^E\rho\omega^2$. За формулами (11), (7) і (9) знаходимо механічні переміщення

$$u_r = R\operatorname{Re}\sum_m\left[A_{m1}\left(-m\frac{R}{r}J_m(k_1r) + k_1RJ_{m-1}(k_1r)\right) + A_{m2}\left(-m\frac{R}{r}Y_m(k_1r) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + k_1RY_{m-1}(k_1r)\right) + A_{m3}m\frac{R}{r}J_m(k_2r) - A_{m4}m\frac{R}{r}Y_m(k_2r)\right]\sin m\theta\exp i\omega t,$$
$$u_\theta = R\operatorname{Re}\sum_m\left[A_{m1}m\frac{R}{r}J_m(k_1r) + A_{m2}m\frac{R}{r}Y_m(k_1r) + A_{m3}\left(m\frac{R}{r}J_m(k_2r) - \right.\right. \tag{12}$$
$$\left.\left. - k_2RJ_{m-1}(k_2r)\right) + A_{m3}\left(m\frac{R}{r}Y_m(k_2r) - k_2RY_{m-1}(k_2r)\right)\right]\cos m\theta\exp i\omega t,$$

і механічні напруження

$$\sigma_{rr}(r,\theta,t) = -\operatorname{Re}\frac{1}{(1-\nu_E^2)s_{11}^E}\left\{\sum_m (a_{m1}(k_1r)A_{m1} + a_{m2}(k_1r)A_{m2} + a_{m3}(k_2r)A_{m3} + \right.$$

$$\left. + a_{m4}(k_2r)A_{m4})\sin m\theta + \frac{4}{\pi}V_0(1+\nu_E)d_{13} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin N(2n-1)\theta}{2n-1}\right\}\exp i\omega t,$$

$$\sigma_{\theta\theta}(r,\theta,t) = -\operatorname{Re}\frac{1}{(1-\nu_E^2)s_{11}^E}\left\{\sum_m (b_{m1}(k_1r)A_{m1} + b_{m2}(k_1r)A_{m2} + b_{m3}(k_2r)A_{m3} + \right. \qquad (13)$$

$$\left. + b_{m4}(k_2r)A_{m4})\sin m\theta + \frac{4}{\pi}V_0(1+\nu_E)d_{13}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin N(2n-1)\theta}{2n-1}\right\}\exp i\omega t,$$

$$\sigma_{r\theta}(r,\theta,t) = \operatorname{Re}\frac{1}{(1+\nu_E)s_{11}^E}\sum_m (c_{m1}(k_1r)A_{m1} + c_{m2}(k_1r)A_{m2} + c_{m3}(k_2r)A_{m3} +$$

$$+ c_{m4}(k_2r)A_{m4})\cos m\theta\exp i\omega t.$$

У формулах (13) використані позначення

$$a_{m1}(k_1r) = [(1-\nu_E)k_1rJ_{m-1}(k_1r) + (k_1^2r^2 - (1-\nu_E)m(m+1))J_m(k_1r)]\frac{R^2}{r^2},$$

$$a_{m2}(k_1r) = [(1-\nu_E)k_1rY_{m-1}(k_1r) + (k_1^2r^2 - (1-\nu_E)m(m+1))Y_m(k_1r)]\frac{R^2}{r^2},$$

$$a_{m3}(k_2r) = (1-\nu_E)m[k_2rJ_{m-1}(k_2r) - (m+1)J_m(k_2r)]\frac{R^2}{r^2},$$

$$a_{m4}(k_2r) = (1-\nu_E)m[k_2rY_m(k_2r) - (m+1)Y_m(k_2r)]\frac{R^2}{r^2},$$

$$b_{m1}(k_1r) = [-(1-\nu_E)k_1rJ_{m-1}(k_1r) + (\nu_Ek_1^2r^2 + (1-\nu_E)m(m+1))J_m(k_1r)]\frac{R^2}{r^2},$$

$$b_{m2}(k_1r) = [-(1-\nu_E)k_1rY_{m-1}(k_1r) + (\nu_Ek_1^2r^2 + (1-\nu_E)m(m+1))Y_m(k_1r)]\frac{R^2}{r^2},$$

$$b_{m3}(k_2r) = -(1-\nu_E)m[k_2rJ_{m-1}(k_2r) - (m+1)J_m(k_2r)]\frac{R^2}{r^2}, \qquad (14)$$

$$b_{m4}(k_2r) = -(1-\nu_E)m[k_2rY_{m-1}(k_2r) - (m+1)Y_m(k_2r)]\frac{R^2}{r^2},$$

$$c_{m1}(k_1r) = m[k_1rJ_{m-1}(k_1r) - (m+1)J_m(k_1r)]\frac{R^2}{r^2},$$

$$c_{m2}(k_1r) = m[k_1rY_{m-1}(k_1r) - (m+1)Y_m(k_1r)]\frac{R^2}{r^2},$$

$$c_{m3}(k_2 r) = \left[k_2 r J_{m-1}(k_2 r) + \left(\frac{1}{2}k_2^2 r^2 - m(m+1)\right) J_m(k_2 r)\right] \frac{R^2}{r^2},$$

$$c_{m4}(k_2 r) = \left[k_2 r Y_{m-1}(k_2 r) + \left(\frac{1}{2}k_2^2 r^2 - m(m+1)\right) Y_m(k_2 r)\right] \frac{R^2}{r^2}.$$

Оскільки амплітуда $E_z^a = (-1)^{n-1} V_0 h^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots, 2N$, напруженості електричного поля $E_z = \operatorname{Re} E_z^a \exp i\omega t$ розкладається в ряд Фур'є за кутовою координатою θ

$$E_{za} = -\frac{2V_0}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin N(2n-1)\theta}{2n-1}, \tag{15}$$

то в формулах (12) та (13) індекс $m = N(2n-1)$, $n = 1, 2, \ldots$.

При резонансних коливаннях доцільно скористатися концепцією комплексних модулів [2, 6], згідно з якою в формулах (12)–(14) фізико-механічні матеріальні параметри будуть комплексними величинами $\widetilde{s}_{ij}^E = s_{ij}^E - i s_{ij}^{E\,\mathrm{Im}}$, $\widetilde{d}_{ij} = d_{ij} - i d_{ij}^{\mathrm{Im}}$, $\widetilde{\varepsilon}_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^T - i \varepsilon_{ij}^{T\,\mathrm{Im}}$.

При визначенні резонансних частот тангенсами малих кутів втрат можна знехтувати і користуватися дійсними значеннями фізико-механічних матеріальних параметрів.

Розглянемо коливання кільцевої пластини з вільними від механічних напружень границями $r = r_0$ і $r = r_1$

$$\sigma_{rr}(r_j, \theta, t) = 0, \qquad \sigma_{r\theta}(r_j, \theta, t) = 0, \qquad j = 0, 1. \tag{16}$$

З граничних умов (16), використовуючи вирази (13) для механічних напружень, отримаємо блочні системи алгебраїчних рівнянь для визначення безрозмірних сталих $A_{N(2n-1)}$, $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned}
&a_{N(2n-1),1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1).1} + a_{N(2n-1),2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1).2} + \\
&\quad + a_{N(2n-1),3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1).3} + a_{N(2n-1),4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1).4} = \\
&\quad = -\frac{4}{\pi} V_0 \frac{(1+\nu_E) d_{13}}{2n-1}, \\
&a_{N(2n-1),1}(k_1 r_1) A_{N(2n-1).1} + a_{N(2n-1),2}(k_1 r_1) A_{N(2n-1).2} + \\
&\quad + a_{N(2n-1),3}(k_2 r_1) A_{N(2n-1).3} + a_{N(2n-1),4}(k_2 r_1) A_{N(2n-1).4} = \\
&\quad = -\frac{4}{\pi} V_0 \frac{(1+\nu_E) d_{13}}{2n-1}, \\
&c_{N(2n-1),1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1).1} + c_{N(2n-1),2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1).2} + \\
&\quad + c_{N(2n-1),3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1).3} + c_{N(2n-1),4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1).4} = 0, \\
&c_{N(2n-1),1}(k_1 r_1) A_{N(2n-1).1} + c_{N(2n-1),2}(k_1 r_1) A_{N(2n-1).2} + \\
&\quad + c_{N(2n-1),3}(k_2 r_1) A_{N(2n-1).3} + c_{N(2n-1),4}(k_2 r_1) A_{N(2n-1).4} = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Таблиця 1

k	$N=0$ $\omega_{0,k}$	$N=1$ $\omega_{1,k}$	$N=2$ $\omega_{2,k}$	$N=3$ $\omega_{3,k}$	$N=4$ $\omega_{4,k}$
1	1,42334	1,6265	0,69281	1,54389	2,35656
2	3,31746	3,85103	2,34721	3,18735	4,01180
3	5,49151	5,20302	4,85053	4,97488	5,31515
4	6,05803	6,53165	5,05288	6,17078	7,31794
5	8,896337	8,88278	7,294018	7,983204	8,45249
6	10,59329	10,72654	8,93175	9,28126	10,06834
7	11,76887	11,81621	11,049	11,42551	11,84558

Резонансні частоти визначаються з умови рівності нулю визначників четвертого порядку однорідної (при $V_0 = 0$) системи алгебраїчних рівнянь (17)

$$\begin{vmatrix} a_{m1}(k_1r_0) & a_{m2}(k_1r_0) & a_{m3}(k_2r_0) & a_{m4}(k_2r_0) \\ a_{m1}(k_1r_1) & a_{m2}(k_1r_1) & a_{m3}(k_2r_1) & a_{m4}(k_2r_1) \\ c_{m1}(k_1r_0) & c_{m2}(k_1r_0) & c_{m3}(k_2r_0) & c_{m4}(k_2r_0) \\ c_{m1}(k_1r_1) & c_{m2}(k_1r_1) & c_{m3}(k_2r_1) & c_{m4}(k_2r_1) \end{vmatrix} = 0, \qquad (18)$$

в яких азимутний індекс $m = N(2n-1)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, — число діаметральних розрізів електродного покриття.

Із граничних умов (16) для напружень і частотного рівняння (18) випливають такі загальні властивості частотного спектра. При коливаннях пластини з одним діаметральним розрізом ($N = 1$, два електроди) виникають резонанси на частотах $f_{1,k}$, $f_{3,k}$, $f_{5,k}$, $\ldots$; з двома діаметральними розрізами ($N = 2$, чотири електроди) — резонанси на частотах $f_{2,k}$, $f_{6,k}$, $f_{10,k}$, $\ldots$; з трьома діаметральними розрізами ($N = 3$, шість електродів) — резонанси на частотах $f_{3,k}$, $f_{9,k}$, $f_{15,k}$, $\ldots$; з чотирма діаметральними розрізами ($N = 4$, вісім розрізів) — резонанси на частотах $f_{4,k}$, $f_{12,k}$, $f_{20,k}$, $\ldots$; з п'ятьма діаметральними розрізами ($N = 5$, десять електродів) — резонанси на частотах $f_{5,k}$, $f_{15,k}$, $f_{25,k}$, $\ldots$; з шістьма діаметральними розрізами ($N = 6$, дванадцять електродів) — резонанси на частотах $f_{6,k}$, $f_{18,k}$, $f_{30,k}$, $\ldots$; з сімома діаметральними розрізами ($N = 7$, чотирнадцять електродів) — резонанси на частотах $f_{7,k}$, $f_{21,k}$, $f_{35,k}$, $\ldots$; з вісьмома діаметральними розрізами ($N = 8$, шістнадцять електродів) — резонанси на частотах $f_{8,k}$, $f_{24,k}$, $f_{40,k}$, $\ldots$. У прийнятій нумерації частот f_{mk} перший індекс відповідає номеру гармоніки за азимутним кутом θ (номер форми за азимутом), а другий індекс k є порядковим номером кореня відповідного частотного рівняння (18).

Результати чисельних розрахунків ілюструє табл. 1, в якій наведені значення безрозмірної частоти $\bar{\omega} = \sqrt{(1-\nu_E^2)s_{11}^E\rho}\,\omega r_1$ власних коливань кільцевої пластини при $r_0/r_1 = 0{,}4$. Матеріал пластини — п'єзокераміка ЦТС-19 з такими значеннями матеріальних параметрів: $\rho = 7{,}74$ кг/м^3, $s_{11}^E = 15{,}2 \cdot 10^{-12}$ м^2/Н, $s_{12}^E = -5{,}8 \cdot 10^{-12}$ м^2/Н, $d_{31} = -125 \cdot 10^{-12}$ Кл/Н.

Визначалися сім перших власних частот при перших гармоніках за азимутом (тобто $\cos\theta$ при $N = 1$, $\cos 2\theta$ при $N = 2$, $\cos 3\theta$ при $N = 3$, $\cos 4\theta$ при $N = 4$). Випадок $N = 0$ відповідає осесиметричним коливанням пластини, які досліджувалися в [4]. З табл. 1 видно, що при зростанні номера частоти k відносна різниця частот, які відповідають різним значенням N, зменшується (при $k = 7$ різниця в частотах менше п'яти відсотків).

Власні форми $u_{r,m,7} = u_{r,m,7}(\bar{r})\sin m\theta$, $u_{\theta,m,7} = u_{\theta,m,7}(\bar{r})\cos m\theta$ визначалися для власних частот $\bar{\omega}_{m,7}$ при $m = 1$ $(N = 1)$, $m = 2$ $(N = 2)$, $m = 3$ $(N = 3)$, $m = 4$ $(N = 4)$.

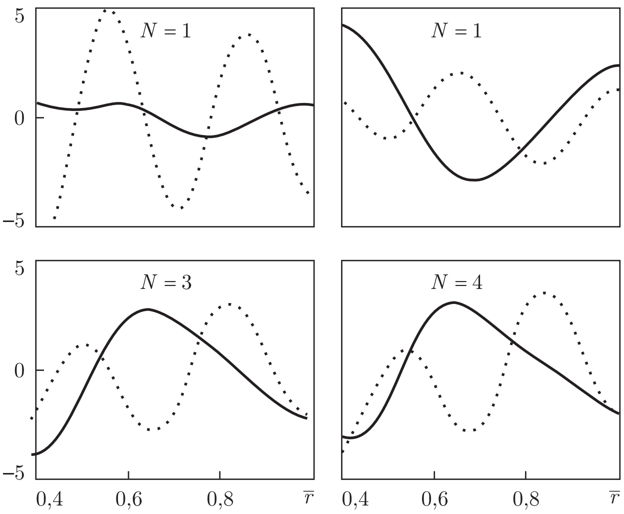

Рис. 1

На рис. 1 показані залежності множників $u_{r,m,7}(\bar{r})$ для радіальних переміщень (суцільні лінії) та множників $u_{\theta,m,7}(\bar{r})$ для азимутальних переміщень (пунктирні лінії) від радіуса $\bar{r} = r/r_1$. Основний висновок, який випливає з рис. 1, полягає в тому, що при різних значеннях N множник $u_{r,m,7}(\bar{r})$ для радіальних переміщень має дві вузлові точки, тоді як множник $u_{\theta,m,7}(\bar{r})$ для азимутальних переміщень — чотири вузлові точки.

1. *Механика* связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / Под ред. В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульги. Отв. ред. А. Н. Гузь. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с.
2. *Шульга Н. А., Болкисев А. М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – Киев: Наук. думка, 1990. – 228 с.
3. *Mason W. P.* Piezoelectricity, its history and applications // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – **70**, No 6. – P. 1561–1566.
4. *Shul'ga N. A., Bezverkhii O. I., Mekievskii O. I.* Resonant frequencies of electroelastic vibrations of piezoceramic plates // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46,** No 9. – P. 1031–1038.
5. *Шульга М. О.* До теорії електромеханічних неосесиметричних коливань п'єзокерамічних пластин з товщинною поляризацією // Системні технології. – 2007. – Вип. 7. – С. 63–68.
6. *Шульга М. О., Карлаш В. Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – Київ: Наук. думка, 2008. – 272 с.
7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1972. – 736 с.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ

Надійшло до редакції 07.07.2011

Член-корреспондент НАН Украины **Н. А. Шульга, В. В. Левченко**

К теории неосесимметричных электромеханических колебаний пьезокерамических пластин

Получено общее решение задачи о неосесимметричных электромеханических колебаниях пьезокерамической кольцевой пластины. В случае свободных от механических напряжений границ для пластин с радиальными разрезами электродного покрытия определены собственные частоты и формы колебаний для первых гармоник по окружной координате.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **M. O. Shul'ga, V. V. Levchenko**

To the theory of nonaxisymmetric electroelastic vibrations of piezoceramic plates

The general solution of the problem of nonaxisymmetric electromechanical vibrations of a piezoceramic ring plate is obtained. For the plates with boundaries free from mechanical stresses and with radial cuts of the electrode covering, the eigenfrequencies and the forms of vibrations for the first harmonics on the circular coordinate are determined.