УДК 519

© 2012

М. В. Зельдіч

Надкритичні графічні квадратичні форми та слабонадкритичні турніри

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Шарком)

У класичній монографії К. Рінгеля [1] було введено поняття графічної цілої квадратичної форми, яке є узагальненням форми Тітса частково впорядкованої множини, та були описані всі критичні (тобто мінімальні неслабододатні) графічні цілі квадратичні форми у вигляді явного списку відповідних ним "переривчатих" графів (тобто неорієнтовних графів без петель та кратних ребер, усі ребра яких — переривчаті). У пропонованій роботі цей результат узагальнюється на випадок надкритичних (тобто мінімальних неслабоневід'ємних) графічних цілих квадратичних форм. Отриманий результат (разом з раніше одержаними результатами автора та К. Рінгеля) дозволяє дати явний опис слабокритичних та, відповідно, слабонадкритичних турнірів (зокрема, відповідних частково впорядкованих множин), тобто мінімальних турнірів (зокрема, частково впорядкованих множин), для яких відповідні форми Тітса не є додатно (відповідно, невід'ємно) визначеними.

У даній роботі використовуватимемо поняття, результати і термінологію робіт [1, 2]. В останній з них вивчалися слабокритичні та, відповідно, слабонадкритичні скінченні турніри, тобто скінченні множини з рефлексивними антисиметричними відношеннями (зокрема, частково впорядковані множини) і відповідні їм слабокритичні та слабонадкритичні графічні цілі квадратичні форми (форми Тітса таких турнірів), а також бієктивно пов'язані з останніми, відповідні графічним формам переривчаті графи (підлеглі графи таких турнірів), тобто неорієнтовні графи без петель та кратних ребер, усі ребра яких — переривчаті [1].

Нагадаємо, що турнір, за означенням, є слабокритичним (слабонадкритичним), якщо відповідна йому квадратична форма Тітса не є додатно (відповідно, невід'ємно) визначеною на відміну від усіх власних підтурнірів даного турніру, форми Тітса яких вже такими є.

У роботі [2] введено поняття **(0,1)** еквівалентності, тобто деякої явно визначеної еквівалентності на множині переривчатих графів, що відповідає певній лінійній цілочисельній еквівалентності (яка також позначається як **(0,1)** еквівалентність) на множині всіх графічних (цілих квадратичних) форм, причому ця еквівалентність зберігає властивості слабої критичності та слабої надкритичності турнірів, для яких підлеглі їм переривчаті графи є **(0,1)** еквівалентними. У теоремі 3 [2] доведено, що турнір (M, w) з рефлексивним антисиметричним відношенням w на скінченній множині елементів M є слабокритичним (відповідно, слабонадкритичним) тоді і лише тоді, коли підлеглий цьому турніру та відповідний його квадратичній формі Тітса $f = f_w$ переривчатий граф $\Gamma = \Gamma w = \Gamma_f$ є **(0,1)** еквівалентним переривчатому графу $\overline{\Gamma}$ деякої критичної (відповідно, надкритичної) **графічної** квадратичної форми $\overline{f}$ (або, що рівносильно, існує певна лінійна цілочислова еквівалентність, а саме **(0,1)** еквівалентність, між цілими квадратичними графічними формами f та $\overline{f}$).

Іншими словами, турнір (M, w) буде слабокритичним (відповідно, слабонадкритичним) тоді і тільки тоді, коли підлеглий йому переривчатий граф Γ є **(0,1)** еквівалентним пере-

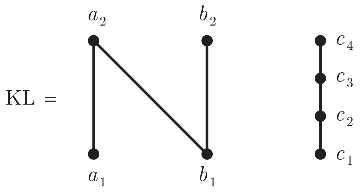

Рис. 1

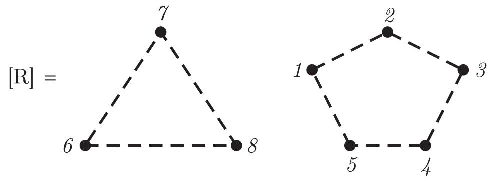

Рис. 2

ривчатому графу $\overline{\Gamma}$ деякого критичного (відповідно, надкритичного) турніру $(M, \overline{w})$, тобто такого турніру $(M, \overline{w})$, форма Тітса $\overline{f} \triangleq f_{\overline{w}}$ якого є критичною (відповідно, надкритичною) графічною квадратичною формою. (Зауважимо, між іншим, що з результатів [3, 4] випливає, що у випадку, коли $\overline{w}$ є відношенням часткового порядку на множині M, критичність та, відповідно, надкритичність форми Тітса $f_{\overline{w}}$ є необхідною та достатньою умовою критичності та, відповідно, надкритичності частково впорядкованої множини $(M, \overline{w})$ у класичному сенсі теорії зображень, тобто в тому сенсі, що $(M, \overline{w})$ є мінімальною частково впорядкованою множиною, яка має нескінченний та, відповідно, неручний зображувальний тип.)

Як відомо, список **KR** усіх критичних графічних квадратичних форм у вигляді списку [**KR**] віповідних їм переривчатих графів був вперше отриманий та опублікований у класичній монографії К. Рінгеля [1]. Це — підлеглі переривчаті графи критичних частково впорядкованих множин з відомого списку Клейнера [5] $\mathbf{K} = \{(1,1,1,1);(2,2,2);(1,3,3);(1,2,5)$ та $\mathbf{KL}\}$, де означення частково впорядкованої множини **KL** наведено нижче (список зазначених підлеглих графів на честь М. Клєйнера позначимо для зручності через [**K**]), а також ще один новий (переривчатий) граф — "граф Рінгеля" — [**R**] (зображення якого див. на рис. 2), який не відповідає жодній частково впорядкованій множині, тобто при будь-якій орієнтації його переривчатих ребер ми отримаємо турніри (їхню скінченну множину на честь К. Рінгеля будемо позначати через **R**) з відношеннями, які не є відношеннями часткового порядку (отже, якщо коротко, $[\mathbf{KR}] = [\mathbf{K}] \bigcup \{[\mathbf{R}]\}$). (Зауважимо, що вище ми через $(l_1, \ldots, l_m)$ позначаємо частково впорядковану множину, яка є кардинальною сумою m лінійно впорядкованих множин, що складаються відповідно з $l_1, \ldots, l_m$ елементів, а зображене на рис. 1 — частково впорядкована множина $\mathbf{KL} = \{a_1 < a_2 > b_1 < b_2; c_1 < c_2 < c_3 < c_4\}$.) Щодо надкритичних графічних форм та відповідних їм переривчатих графів, то їхній явний список, подібно списку Рінгеля, який у випадку критичності необхідний для явного опису слабокритичних турнірів (зокрема, відповідних частково впорядкованих множин), аналогічним чином є необхідним для опису слабонадкритичних турнірів (зокрема, відповідних частково впорядкованих множин). Його явне знаходження, яке, подібно списку К. Рінгеля, становить, безумовно, самостійний інтерес і важливе з точки зору теорії цілочисельних квадратичних форм, а також частково подальше застосування обох списків до досліджуваного питання опису слабокритичних та слабонадкритичних турнірів (зокрема, відповідних частково впорядкованих множин) і є метою та змістом дослідження автора, результати якого анонсовані в [6] і наведені в цій роботі.

Головний результат досліджень відображений в теоремі 1.

Теорема 1. *Нехай M — n-елементна скінченна множина з рефлексивним антисиметричним відношенням w на M (турнір) з підлеглим (переривчатим) графом Γ; $f = f_w$ — квадратична форма Тітса турніру (M, w), яка відповідає переривчатому графу Γ $(f_w = f_\Gamma = f(x_0, x_1, \ldots, x_n))$.*

Рівносильні такі умови: 1) (M, w) — надкритичний турнір;

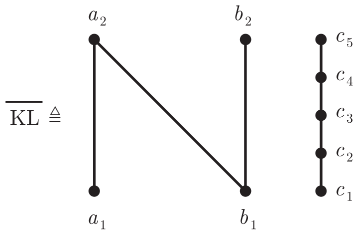

Рис. 3

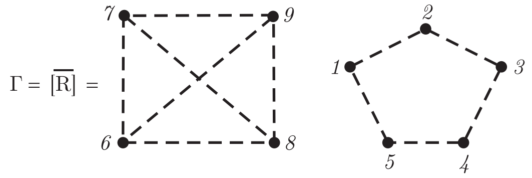

Рис. 4

2) $f_w = f_\Gamma$ *— надкритична графічна квадратична форма;*

3) Γ *— або підлеглий (переривчатий) граф однієї з надкритичних частково впорядкованих множин з відомого списку* $\overline{K} = \{(1,1,1,1,1); (2,2,3); (1,2,6); (1,1,1,2)$ *та* $\overline{KL} = \{a_1 < < a_2 > b_1 < b_2; c_1 < c_2 < c_3 < c_4 < c_5\}$ *(див. рис. 3) Назарової–Завадського [7, 4], який, по суті, складається з деяких природних одноточкових розширень частково впорядкованих множин зі списку* $\mathbf{K}$ *М. Клейнера (список зазначених підлеглих графів природно позначити через* $\overline{[\mathbf{K}]}$*), або ж* Γ *є "розширеним графом Рінгеля", що зображений на рис. 4: (граф, підлеглий для турнірів з відповідної скінченної множини* $\overline{\mathbf{R}}$*, які не є частково впорядкованими множинами при будь-якій орієнтації* Γ*). При цьому (що рівносильно) відповідна (переривчатому) графу* Γ *та турніру* (M, w) *графічна ціла квадратична форма* $f_w = f_\Gamma$ *або є формою Тітса деякої надкритичної частково впорядкованої множини (з відомого списку* $\overline{\mathbf{KR}}$ *останніх Назарової–Завадського [7, 4]), або ж* $f_w = f_\Gamma$ *є формою Тітса всіх турнірів з множини* $\overline{\mathbf{R}}$ *(і які не є частково впорядкованими множинами), тобто в останньому випадку* $f_w = f_\Gamma$ *є графічною формою, відповідною розширеному графу Рінгеля* $\overline{[\mathbf{R}]}$.

Іншими словами, коротко можна перефразувати п. 3 теореми так:

$$\Gamma \in \overline{[\mathbf{KR}]} = \overline{[\mathbf{K}] \bigcup \{[\mathbf{R}]\}} \triangleq \overline{[\mathbf{K}]} \bigcup \{\overline{[\mathbf{R}]}\}$$

(де рисочка вгорі позначає деякі одноточкові розширення графів), *тобто* Γ *є природним одноточковим розширенням деякого критичного (переривчатого) графу з класичного списку* $[\mathbf{KR}] = [\mathbf{K}] \bigcup \{[\mathbf{R}]\}$ *Рінгеля переривчастих графів, відповідних критичним графічним квадратичним формам [1].*

Наведемо короткий начерк доведення цього результату.

1 $\Rightarrow$ **2**. Умова 1 означає, що f є центронадкритичною [2], тобто всі її власні підформи $f|_{x_i=0}$ окрім, можливо, підформи $f|_{x_0=0}$, що відповідає, центральній змінній x_0 (єдиній змінній, що не відповідає вершинам графу Γ), — слабоневід'ємні. Але $f|_{x_0=0}$ — слабоневід'ємна, зважаючи на те, що всі ребра графу Γ — переривчаті. Тому, насправді, f є надкритичною.

2 $\Rightarrow$ **1**. Очевидно, якщо f — надкритична, то вона тим більше буде центронадкритичною, тобто (M, w) — надкритичний турнір.

3 $\Rightarrow$ **2**. Якщо $\Gamma \in \overline{[\mathbf{K}]}$, то Γ — підлеглий (переривчатий) граф деякої надкритичної (у сенсі теорії зображень) частково впорядкованої множини $\mathfrak{M} = (M, \leqslant)$, а тому $f = f_\Gamma = = f_w$ — надкритична, як форма Тітса надкритичної частково впорядкованої множини $\mathfrak{M}$ [4]. Якщо ж $\Gamma = \overline{[\mathbf{R}]}$ (див. рис. 4), то легко перевірити, що $f_\Gamma(x_0, x_1, \ldots, x_9)$ — надкритична графічна форма (де для $i = 1, \ldots, 9$ нумерація змінних x_i відповідає нумерації вершин переривчатого графа $\Gamma = \overline{[\mathbf{R}]}$ на рис. 4, а x_0 — центральна змінна, яка не відповідає жодній вершині переривчатого графа Γ).

Дійсно, покладаючи $x_0 = 8$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_8 = 2$, $x_9 = 1$, маємо:

$$f(x_0, \ldots, x_9) = -1 < 0.$$

В цей же час, при $i = 6, 7, 8, 9$ $f_{|x_i=0}$ — графічна форма, що відповідає переривчатому графу, ізоморфному критичному графу Рінгеля $[\mathbf{R}]$ (див. рис. 2), а при $i = 1, 2, 3, 4, 5$ $f|_{x_i=0}$ — графічна форма, яка відповідає підлеглому графу критичної "кривої" (тобто єдиної не примітивної) клейнеровської частково впорядкованої множини **KL** (див. рис. 1).

Таким чином, в обох випадках $f|_{x_i=0}$ — критична, а тому — слабоневід'ємна форма. Отже, ми пересвідчилися, що всі форми f_Γ для $\Gamma \in \overline{[\mathbf{K}]} \bigcup \{\overline{[\mathbf{R}]}\}$ — надкритичні.

2 $\Rightarrow$ **3**. Це — важка частина доведення теореми, що означає повноту списку $\overline{[\mathbf{K}]} \bigcup \{\overline{[\mathbf{R}]}\}$ надкритичних графічних форм.

Нам знадобиться ряд попередніх фактів, встановлених у роботах автора [8, 9], які разом з їх доведенням наводились у [2] і які для зручності ми з'єднаємо в такому твердженні.

Твердження 1. *Нехай f — критична (відповідно, надкритична) квадратична форма з дійсними коефіцієнтами. Тоді:*

1) усі власні підформи форми f — додатно (відповідно невід'ємно) визначені;

2) форма f може набувати недодатних (відповідно від'ємних) значень лише на векторах з координатами одного знаку, а на векторах $\vec{x}$ з координатами x_i, x_j різних знаків ($x_i \cdot x_j < 0$) форма f набуває лише додатних значень: $f(\vec{x}) > 0$.

Звідси, як зазначив фон Хьоне [10], випливають такі властивості надкритичних цілих форм, які ми для зручності з'єднаємо в одне твердження.

Твердження 2. *Якщо $f(x_1, \ldots, x_n)$ — ціла надкритична квадратична форма, $n > 2$, то:*

1) сигнатура форми f дорівнює $(n-1, 1)$, тобто додатний індекс інерції дорівнює $n-1$, а від'ємний дорівнює 1 (зокрема, f — невироджена квадратична форма);

2) будь-яка власна підформа $f^i \triangleq f|_{x_i=0}$, або додатно визначена, або є критичною, причому останній випадок завжди реалізується для деякої власної підформи $f^i = f|_{x_i=0}$.

Таким чином, біграф [1] будь-якої надкритичної цілої квадратичної форми f є одноточковим розширенням біграфа деякої критичної цілої форми (з точністю до перенумерації змінних або відповідних вершин біграфа без втрати загальності ми можемо вважати, що саме форма $f^n = f|_{x_n=0}$ — критична);

3) якщо $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ — стандартна канонічна база $\mathbb{R}^n$, форма $f^n = f|_{x_n=0}$ — критична, $\vec{r} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} r_i, \vec{e}_i$ мінімальний (а насправді найменший) додатний цілочисельний радикальний вектор критичної форми f^n, то $(\overline{r}, \overline{e}_n) < 0$ (де (,) означає симетричну білінійну форму на $\mathbb{R}^n$, асоційовану з f), а вектор $2\overline{r} + \overline{e}_n$ — надкритичний для f, тобто це — цілочисельний додатний вектор, на якому форма f набуває від'ємного значення: $f(2\overline{r} + \overline{e}_n) \leqslant -1 < 0$.

Наслідок. *Переривчатий граф $\overline{\Gamma}$ будь-якої надкритичної графічної форми $\overline{f} = \overline{f}(x_0, x_1 \ldots, x_n, x_{n+1})$ (де змінна x_0 є центральною, тобто, на відміну від інших, не відповідає вершинам графа $\overline{\Gamma}$) є одноточковим розширенням переривчатого графа Γ деякої критичної графічної форми $f = \overline{f}|_{x_i=0}$, $i \neq 0$ (з точністю до ізоморфізму графів можна вважати, що $i = n+1$, тобто $f = f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \overline{f}|_{x_{n+1}=0}$). Таким чином, $\overline{\Gamma}$ є одноточковим розширенням деякого переривчатого графа Г зі списку* **[KR]** *К. Рінгеля [1].*

Дійсно, згідно з твердженням 2, для деякого $i = 0, 1, \ldots, n, n+1$ форма $f = \overline{f}|_{x_i=0}$ є критичною. Але при $i = 0$ у форми $\overline{f}|_{x_i=0}$ всі коефіцієнти невід'ємні, а коефіцієнти при квадратах змінних — одиничні. Отже, вона є слабододатною і тому не може бути критичною. Звідси $i \neq 0$, але тоді відповідна критична форма $f = \overline{f}|_{x_i=0}$, очевидно, є графічною.

Тепер, аби переконатися у повноті списку $\overline{[\mathbf{K}]} \bigcup \{\overline{[\mathbf{R}]}\}$ переривчатих графів надкритичних графічних форм, нам достатньо оглянути всі можливі переривчаті графи $\overline{\Gamma}$, які є одноточковими розширеннями відповідних переривчатих графів зі списку К. Рінгеля $[\mathbf{K}] \cup \{[\mathbf{R}]\}$. При цьому ключову роль відіграють факти, які ми для зручності об'єднаємо в таке

Твердження 3. *Нехай переривчатий граф* $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_{\overline{f}}$ *графічної форми* $\overline{f} = \overline{f}(x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ *є одноточковим розширенням переривчатого графа* $\Gamma = \Gamma_f$ *графічної форми* f $(f = \overline{f}|_{x_i=0}$*, де* $i \neq 0)$*. Тоді:*

1) якщо Γ *є підлеглим графом деякої примітивної частково впорядкованої множини (зокрема, якщо* $\Gamma \in [\mathbf{K}] \backslash \{[\mathbf{KL}]\}$*), то* $\overline{\Gamma}$ *також є підлеглим графом деякої частково впорядкованої множини (але, взагалі кажучи, необов'язково примітивної);*

2) якщо Γ *— підлеглий граф непримітивної частково впорядкованої множини* $\mathbf{KL}$ *(див. рис. 1) зі списку Клейнера [5], а відповідна графу* $\overline{\Gamma}$ *графічна форма* $\overline{f}$ *є надкритичною, то або* $\overline{\Gamma}$ *є підлеглим (переривчатим) графом частково впорядкованої множини* $\overline{\mathbf{KL}}$ *(яка є природним одноточковим розширенням "кривої", тобто єдиної непримітивної частково впорядкованої множини* $\mathbf{KL}$ *зі списку М. Клейнера) (див. рис. 3), або ж* $\overline{\Gamma}$ *є розширеним графом Рінгеля:* $\overline{\Gamma} \cong \overline{[\mathbf{R}]}$ *(див. рис. 4);*

3) якщо $\Gamma = [\mathbf{R}]$ *(див. рис. 2), тобто, якщо* Γ *є графом Рінгеля, а відповідна* $\overline{\Gamma}$ *графічна форма* $\overline{f}$ *є надкритичною, то* $\overline{\Gamma} \cong \overline{[\mathbf{R}]}$ *— розширений граф Рінгеля (див. рис. 4).*

Нарешті, можна завершити доведення повноти списку $\overline{[\mathbf{K}]} \bigcup \overline{[\mathbf{R}]}$ переривчатих графів надкритичних графічних форм (а з ним — і теореми 1 у цілому).

Дійсно, з твердження 3 та наслідку твердження 2, взятих у сукупності, випливає, що переривчатий граф $\overline{\Gamma}$ будь-якої надкритичної графічної форми $\overline{f}$ або є ізоморфним розширеному графу Рінгеля $\overline{[\mathbf{R}]}$, або ж є підлеглим графом деякої частково впорядкованої множини з надкритичною квадратичною формою Тітса. Але ж в останньому випадку, згідно з [4], всі ці частково впорядковані множини є надкритичними (у сенсі теорії зображень) і складають відомий список $\overline{\mathbf{K}}$ ([7, 4]) Назарової–Завадського. Отже, $\overline{\Gamma}$ або є ізоморфним $\overline{[\mathbf{R}]}$, або є підлеглим графом деякої надкритичної частково впорядкованої множини зі списку $\overline{\mathbf{K}}$. Це завершує доведення повноти наведеного списку (переривчатих) графів надкритичних графічних квадратичних форм, а разом з тим — і теореми 1.

Отриманий результат з урахуванням вищенаведеної теореми 3 з роботи автора [2] дозволяє описати не лише критичні, а й надкритичні турніри. Випадок частково впорядкованих множин розглянуто також В. М. Бондаренком та М. В. Стьопочкіною в роботах [11, 12].

1. *Ringel C. M.* Tame algebras and integral quadratic forms // Lecture Notes in Mathematics. – Berlin: Springer, 1984. – 376 p.
2. *Зельдіч М. В.* Про маятникову еквівалентність біграфів і мінімальні незнаковизначені цілі квадратичні форми // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 4. – С. 33–42.
3. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ. – 1974. – **8**, вып. 3. – С. 34–42.
4. *Завадский А. Т., Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества ручного типа // Матричные задачи. – Киев: Изд. Ин-та математики АН УССР, 1977. – С. 122–143.
5. *Клейнер М. М.*Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. научн. семинаров ЛОМИ АН СССР. – 1972. – **28**. – С. 32–42.
6. *Зельдич М. В.* Сверхкритические графические квадратичные формы и минимальные турниры с незнакоопределенной формой Титса. – http://www.imath.kiev.ua/~congress2009/Abstracts/Zeldych.html.
7. *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1975. – **39**, № 5. – С. 963–991.
8. *Зельдич М. В.* Критерий слабой положительности квадратичных форм // Линейная алгебра и теория представлений. – Киев: Изд. Ин-та математики НАН Украины 1983. – С. 135–137.
9. *Zeldich M. V.* Integral critical and hypercritical quadratic forms // Comm. in Algebra. – 1994. – **22**, No 9. – P. 3629–3634.

10. *Hohne J. V.* On weakly non-negative unit forms and tame algebras // Proc. London Math. Soc. – 1996. – **73**. – P. 47–67.
11. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min,max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Тр. Ин-та математики НАН Украины. – 2005. – **2**, № 3. – С. 18–58.
12. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 5. – С. 611–624.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 14.11.2011

М. В. Зельдич

Сверхкритические графические квадратичные формы и слабосверхкритические турниры

В классической монографии К. Рингеля [1] было введено понятие графической целой квадратичной формы, которое является обобщением формы Титса частично упорядоченного множества, и были описаны все критические (т. е. минимальные неслабоположительные) графические целые квадратичные формы в виде явного списка соответствующих им "прерывистых" графов (т. е. неориентированных графов без петель и кратных ребер, все ребра которых — прерывистые). В предлагаемой работе этот результат обобщается автором на случай сверхкритических (т. е. минимальных неслабонеотрицательных) графических целых квадратичных форм. Полученный результат (вместе с ранее полученными результатами автора и К. Рингеля) позволяет дать явное описание слабокритических и, соответственно, слабосверхкритических турниров (в частности, частично упорядоченных множеств), т. е. минимальных турниров (в частности, частично упорядоченных множеств), для которых соответствующие формы Титса не являются положительно (соответственно, неотрицательно) определенными.

M. V. Zeldich

Hypercritical graphical quadratic forms and weakly hypercritical tournaments

In the classic monograph of C. Ringel [1], the concept of a graphical integral quadratic form, which is a generalization of the notion of the Tits form of a partially ordered set was introduced, and the all critical (i. e. minimal non-weakly positive) graphical integral quadratic forms in the shape of an explicit list of "dotted" graphs (i. e. undirected graphs without loops and multiple edges, the all ones of which are dotted) corresponding to them where described. Here this result is generalized to the case of hypercritical (i. e. minimal non-weakly non-negative) graphical integral quadratic forms. The obtained results (together with earlier results of author and C. Ringel) allow us to give an explicit description of all weakly critical and, respectively, weakly hypercritical tournaments (in particular, of corresponding partially ordered sets), that is the minimal ones, for which Tits forms are not positive or, respectively, nonnegative definite.