УДК 519.854.33

Академік НАН України **І. В. Сергієнко, В. О. Михайлюк**

Реоптимізація проблем про узагальнену виконуваність з предикатами розмірності 2

Припустимо, що виконується унікальна ігрова гіпотеза (UGC). Тоді для реоптимізації Max Cut (при добавленні довільного ребра) існує поліноміальний пороговий (оптимальний) $\varphi(\alpha_{\mathrm{GW}})$-наближений алгоритм, де $\varphi(\alpha_{\mathrm{GW}}) = 1/(2 - \alpha_{\mathrm{GW}}) \approx 0{,}891716$, при цьому $\alpha_{\mathrm{GW}} \approx 0{,}878567$ (константа Гоеманса–Уільямсона). Для реоптимізації Max 2-Sat (при добавленні довільної диз'юнкції) існує поліноміальний пороговий (оптимальний) $\varphi(\alpha^-_{\mathrm{LLZ}})$-наближений алгоритм, де $\varphi(\alpha^-_{\mathrm{LLZ}}) \approx 0{,}943544$, при цьому $\alpha^-_{\mathrm{LLZ}} \approx 0{,}940166$ (константа Левіна–Лівната–Звіка).

Один клас проблем, який містить багато цікавих і вже добре вивчених задач дискретної оптимізації, являють собою проблеми про узагальнену виконуваність, або CSP проблеми (Constraint Satisfaction Problems). В таких проблемах є множина з n змінних і множина обмежень (що задаються предикатами), кожне з яких залежить від деякого числа змінних, і мета полягає в тому, щоб знайти такі приписування значень змінних, які виконують максимальне число обмежень. Предикати від двох змінних є основними при вивченні властивостей узагальнених проблем про виконуваність. Визначення максимального числа виконаних обмежень в таких проблемах є NP-складним (NP-жорстким, NP-hard) і така проблема відома як Max 2-CSP. Ця проблема має два частинних найбільш добре вивчених випадки: Max Cut і Max 2-Sat проблеми.

Вирішити NP-складні оптимізаційні проблеми точно за допустимий час навряд чи можливо. Тому розглядаються ефективні наближені алгоритми для розв'язування таких задач. Для максимізаційної проблеми кажуть, що алгоритм є C-наближеним алгоритмом, якщо він для довільного екземпляра дає розв'язок зі значенням цільової функції не меншим, ніж $C \cdot OPT$, де OPT — глобальний оптимум. При цьому C називають відношенням апроксимації. Подібне означення можна дати для мінімізаційних проблем.

Фундаментальне питання для заданої NP-складної проблеми — це визначити, при яких значеннях C можна сподіватися на ефективний (поліноміальний) C-наближений алгоритм. Це велика дослідницька область у теоретичній информатиці зі своїми позитивними та негативними результатами.

Кажуть, що для проблеми Q встановлена верхня оцінка відношення апроксимації C, якщо існує поліноміальний C-наближений алгоритм для розв'язання Q. Для проблеми Q встановлена нижня оцінка відношення апроксимації c, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ не існує поліноміального наближеного алгоритму для Q, на якому досягається відношення апроксимації $c + \varepsilon$ (або строго більше c). Якщо $C = c$, то для проблеми Q встановлений *поріг відношення апроксимації* (що дорівнює $C = c$). Відповідний алгоритм називається *пороговим* або *оптимальним*.

Проблема встановлення нижніх оцінок відношення апроксимації (як і довільна проблема отримання нижніх оцінок складності) є дуже складною задачею. Для такої проблеми існує назва неапроксимованість (inapproximability) або складність апроксимації (hardness of approximation). Великий вплив на развиток методів одержання нижніх оцінок здійснила знаменита PCP теорема [1] і дискретний аналіз Фур'є для тестування властивостей проблем (property testing) [2].

Поряд зі звичайними детермінованими алгоритмами розглядають випадкові алгоритми, де оцінюється очікуване значення розв'язку. Протягом десятиліть випадковий алгоритм для проблем Max Cut і Max 2-Sat був найкращим і тільки в 1995 р. Гоеманс і Уільямсон (Goemans and Williamson) [3] запропонували 0,87856-наближені алгоритми для Max Cut і Max 2-Sat. Вони застосували техніку напіввизначеного програмування (semidefinite programming, SDP) для знаходження оптимального розв'язку з високою точністю (алгоритм внутрішньої точки), а потім "заокруглили" розв'язок до дискретного варіанта початкової проблеми. Цей підхід потім був успішно застосований до інших комбінаторних оптимізаційних проблем.

Як вже відзначалося, проблема неапроксимованості була успішно розв'язана для багатьох проблем завдяки PCP теоремі. Зокрема, Хастад (Hastad) [2] показав, що узагальнення Max Cut і Max 2-Sat від двох до трьох змінних, тобто Max-E3-Lin-2 і Max 3-Sat є NP-складними для апроксимації з відношеннями $1/2+\varepsilon$ і $7/8+\varepsilon$ відповідно. Це означає, що найпростіший випадковий алгоритм приписування є найкращим для цих проблем, якщо $P \neq NP$ або що відношення $1/2$ і $7/8$ є пороговими. В [4] показано (також за допомогою PCP теореми), що задача про покриття множинами має поріг відношення апроксимації, який дорівнює $\ln n$.

При вивченні проблеми неапроксимованості для проблем про узагальнену виконуваність з предикатами размірності 2 такий прогрес не був досягнутий. Найкращі результати за складністю апроксимації для Max 2-CSP, Max 2-Sat і Max Cut є відповідно $9/10+\varepsilon \approx 0{,}900$, $21/22+\varepsilon \approx 0{,}955$ і $16/17+\varepsilon \approx 0{,}941$ [2, 5]. Найбільш перспективний підхід до отримання сильних результатів (порогів відношень апроксимації) — це так звана *унікальна ігрова гіпотеза (Unique Games Conjecture, UGC)*, введена С. Кхотом [6]. UGC — це одна з найбільш важливих відкритих проблем у сучасній теоретичній информатиці завдяки великій кількості сильних результатів з неапроксимованості, які випливають з UGC.

Для Max 2-CSP проблем отримані такі результати. Кхот [7] показав, що з UGC випливає $\alpha_{\mathrm{GW}}+\varepsilon$ — результат за складністю апроксимації для Max Cut, де $\alpha_{\mathrm{GW}} \approx 0{,}87856$ — відношення апроксимації алгоритма Гоеманса–Уільямсона [3]. В [8, 15] показано, що з UGC випливає $\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}}+\varepsilon$ результат за складністю апроксимації для Max 2-Sat, де $\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}} \approx 0{,}94016$ — відношення апроксимації алгоритма Левіна–Лівната–Звіка (Lewin–Livnat–Zwick) [9]. Відомі інші роботи, де найкращі результати з неапроксимованості, основані на UGC, збігаються з відношенням апроксимації наближених алгоритмів, основаних на напіввизначеному програмуванні.

Поняття реоптимізації [10–12] полягає в наступному. Нехай Q — деяка NP-складна (можливо, NP-повна) проблема, I — початковий екземпляр проблеми Q, оптимальний розв'язок якого відомо. Пропонується новий екземпляр I' задачі Q, отриманий деякими "незначними" змінами екземпляра I. Виникає питання: як можна ефективно використати знання про оптимальний розв'язок I для обчислення точного або наближеного роз'язку екземпляра I'? Мета реоптимізації при використанні наближених методів — застосування знань про розв'язання початкового екземпляра I при умові: або досягнення кращої якості наближення (апроксимаційного відношення) I', або створення більш ефективного (за часом) алгоритму визначення оптимального або близького до нього розв'язку I', або виконання першого і другого пунктів.

Досліджувалися реоптимізаційні варіанти задач про узагальнену виконуваність з предикатами размірності 2.

Основні означення та позначення. Наведемо необхідні позначення і означення [2, 13]. Під предикатом P розмірності k будемо розуміти відображення $P\colon \{-1,1\}^k \to \{0,1\}$. Для зручності позначень вхідні дані зі значенням -1 інтерпретуємо як "істина", зі значенням 1 — як "хибність". Якщо предикат P *набуває вхідного значення* y, то $P(y)=1$, інакше $P(y)=0$. Таким чином, множина значень, що приймається предикатом P, позначається як $P^{-1}(1)$. Літерал — це булева змінна або її заперечення.

Означення 1. Нехай $P\colon \{-1,1\}^k \to \{0,1\}$ є предикат. Екземпляр проблеми Max-CSP-P складається з m обмежень з вагами, кожне з яких є k-кортеж літералів $(z_{i_1},\ldots,z_{i_k})$ з множини $\{x_1,\ldots,x_n,\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_n\}$. Всі змінні в цьому кортежі вважаються різними. Обмеження виконано тоді і тільки тоді, коли P *приймає* цей кортеж. Розв'язок є приписування значень істиності до $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Значення розв'язку є $\sum\limits_{i=1}^{m} w_i P(z_{i_1},\ldots,z_{i_k})$, де w_i — (невід'ємна) вага i-го обмеження. Мета полягає в максимізації цього значення. Коли P залежить від не більше ніж k літералів Max-CSP-P, будемо називати Max-kCSP-P, якщо в P рівно k літералів — то Max-EkCSP-P.

Нехай $w_{\mathrm{opt}}(I)$ — значення оптимального розв'язку екземпляра I.

Означення 2. Алгоритм A є C-наближений алгоритм для максимізаційної проблеми, якщо для всіх екземплярів I проблеми $w(A,I) \geqslant C w_{\mathrm{opt}}(I)$, де $w(A,I)$ — значення розв'язку алгоритму A на вході I. При цьому кажуть, що A має апроксимаційне відношення C. Для ймовірнісних алгоритмів $w(A,I)$ — очікуване значення (математичне сподівання) серед випадкових виборів алгоритму A.

У подальшому розглядатимемо випадок $k=2$. Введемо предикати $AND(x_1,x_2)=x_1 \wedge \wedge x_2$, $XOR(x_1,x_2)=x_1 \oplus x_2$ і $OR(x_1,x_2)=x_1 \vee x_2$. Можна показати, що вони описують всі предикати розмірності 2 з точністю до еквівалентності задач виконуваності.

Означення 3 (Max Cut). Для даного неорієнтованого графа $G=(V,E)$ із множиною вершин V і ребер E Max Cut є проблема знаходження розбиття $C=(V_1,V_2)$ вершин V ($V = = V_1 \bigcup V_2, V_1 \bigcap V_2 = \varnothing$), яке максимізує розмір множини $(V_1 \times V_2) \bigcap E$. Для заданої вагової функції $w\colon E \to R^+$ Max Cut проблема з вагами полягає в максимізації $\sum\limits_{e\in(V_1\times V_2)\cap E} w(e)$.

Означення 4 (Max 2-Sat). Екземпляр Max 2-Sat проблеми є множина змінних і множина диз'юнкцій від двох літералів, де літерал є змінна або її заперечення. Проблема полягає в приписуванні змінним значень так, що число виконаних диз'юнкцій максимально. Для заданої невід'ємної вагової функції над множиною диз'юнкцій Max 2-Sat проблема з вагами полягає в максимізації сум вагів всіх виконаних диз'юнкцій.

Згідно з введеним означенням, проблема Max 2-Sat у нашому випадку буде позначатися як Max-E2CSP-OR, а проблема Max Cut — як Max-E2CSP-XOR.

Напіввизначене програмування (SDP) і проблеми Max Cut та Max 2-Sat. Основна техніка для отримання ефективних наближених алгоритмів для Max-CSP-P — це напіввизначене програмування, запропоноване Гоемансом та Уільямсоном [3]. Оскільки базовий алгоритм є красивим і досить простим для Max Cut, наведемо його коротко.

Формалізуємо Max Cut як задачу квадратичного цілочислового програмування:

$$\max_{x\in\{-1,1\}^n} \sum_{(i,j)\in E} \frac{1-x_i x_j}{2}. \qquad (1)$$

Ця сума точно відповідає розміру максимального розрізу, оскільки кожний терм 1, якщо ребро належить розрізу, і 0 — інакше. Послабимо (1) введенням змінних y_{ij} для добутків $x_i x_j$, отримаємо

$$\max_y \sum_{(i,j)\in E} \frac{1-y_{ij}}{2}.$$

Припустимо, що змінні y_{ij} формують додатну симетричну напіввизначену матрицю з одиницями на діагоналі. Запишемо це таким чином:

$$\max_{y\geqslant 0,\ y_{ii}=1} \sum_{(i,j)\in E} \frac{1-y_{ij}}{2}. \tag{2}$$

Відзначимо, що це релаксація початкової проблеми, оскільки $y_{ij} = x_i x_j$ і, дійсно, матриця задовольняє умови. Оптимізаційна проблема (2) може бути розв'язана поліноміальним алгоритмом внутрішньої точки з довільною точністю. Для простоти будемо вважати, що знайдений точний оптимум. Запишемо (2) інакше. Відомо, що $n\times n$-матриця Y симетрично додатно напіввизначена тоді і тільки тоді, коли існує інша $n\times n$-матриця V така, що $Y = V^T V$. Звідси випливає, що знайдуться вектори (стовпці V) такі, що $y_{ij} = (v_i, v_j)$ і вимога $y_{ii} = 1$ еквівалентна тому, що v_i — одиничний вектор. Таким чином, (2) еквівалентно

$$\max_{(\|v_i\|=1)_{i=1}^n} \sum_{(i,j)\in E} \frac{1-(v_i, v_j)}{2}. \tag{3}$$

У такій постановці (3) — строге узагальнення (1), оскільки можна інтерпретувати x_i як одиничний вектор. В цьому разі розв'язок з високою розмірністю використовується для визначення розв'язку розмірності 1. Пропонується така процедура заокруглення з використанням випадкової гіперплощини. Нормальні вектори цих випадкових гіперплощин рівномірно разподілені на n-вимірній сфері. Отже, вектор $r\in\mathbb{R}^n$ вибираємо випадково і рівномірно і покладемо $x_i = \operatorname{sign}((r, v_i))$ (при $(r, v_i) = 0$ покладемо $x_i = 1$).

Проаналізуємо цю процедуру заокруглення. Припустимо кут між v_i і v_j є θ_{ij}. Тоді внесок в цільову функцію буде $(1-\cos\theta_{ij})/2$, а ймовірність, що ребро належить розрізу, тобто $\operatorname{sign}((r, v_i)) \neq \operatorname{sign}((r, v_j))$ є θ_{ij}/π. Визначимо дійсне число α_{GW} так:

$$\alpha_{\mathrm{GW}} = \min_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} \frac{\theta/\pi}{(1-\cos\theta)/2}.$$

Числове значення α_{GW} приблизно дорівнює 0,87856. Маємо такий ланцюжок нерівностей:

$$E\left[\sum_{(i,j)\in E} \frac{1-x_i x_j}{2}\right] = \sum_{(i,j)\in E} \frac{\theta_{ij}}{\pi} \geqslant \alpha_{\mathrm{GW}} \sum_{(i,j)\in E} \frac{1-\cos\theta_{ij}}{2} \geqslant \alpha_{\mathrm{GW}} OPT.$$

Остання нерівність випливає з того, що максимум релаксації не менший, ніж дійсний максимум. Таким чином, даний алгоритм є α_{GW}-наближеним алгоритмом.

Аналогічно будується SDP релаксація Max 2-Sat (або Max-$E2$ CSP-OR). Задача розв'язується з адитивною відносною помилкою ε за час, поліноміальний від $\log 1/\varepsilon$ [14]. Для техніки заокруглення застосовуються цілі схеми (конфігурації) заокруглення, які залежать від вибору функції заокруглення. В результаті був отриманий $\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}}$-наближений алгоритм [9, 8] для розв'язання Max 2-Sat, де $|\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}} - 0{,}94016567245| \leqslant 5 \cdot 10^{-11}$ (слід відзначити, що для визначення $\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}}$ використовувався чисельний алгоритм; аналітичні доведення не були наведені).

Унікальна ігрова гіпотеза (UGC). UGC була введена Кхотом (Khot) [6] як можливий спосіб одержання нових сильних результатів з неапроксимованості. Сформулюємо цю гіпотезу в термінах проблеми про покриття міток (Label Cover problem).

Означення 5. Екземпляр $X = (V, E, w, [L], \{\sigma_e^v, \sigma_e^w\}_{e=\{v,w\}\in E})$ унікальної проблеми про покриття міток (Unique Label Cover, ULC) визначається таким чином: заданий граф $G = (V, E)$ з ваговою функцією $w\colon E \to [0,1]$, множина $[L] = \{1, 2, \ldots, L\}$ допустимих міток і для кожного ребра $e = \{v, w\} \in E$ дві перестановки σ_e^v, $\sigma_e^w \in \Sigma_L$ такі, що $\sigma_e^w = (\sigma_e^v)^{-1}$, тобто вони взаємно обернені. Будемо говорити, що функція $\ell\colon V \to [L]$ (яка називається маркіровкою вершин) задовольняє ребро $e = (v, w)$, якщо $\sigma_e^v(\ell(v)) = \ell(w)$ або еквівалентно, якщо $\sigma_e^w(\ell(w)) = \ell(v)$. Значення ℓ — це загальна вага ребер, які вона задовольняє, тобто $Val_X(\ell) = \sum\limits_e w(e)$, де сума береться по всіх e так, що ℓ задовольняє e. Значення X є максимальна частина ребер, що задовольняються, за всіма маркіровками, тобто $Val(X) = \max\limits_{\ell}\{Val_X(\ell)\}$.

ULC проблема, де G — дводольний граф, може бути інтерпретована як одHораундова гра двох гравців, в якій приймаючий предикат перевіряючого такий, що для даної відповіді одного з гравців завжди існує *унікальна* відповідь для іншого гравця така, що перевіряючий приймає. Ймовірність, що перевіряючий приймає, якщо гравці притримуються оптимальної стратегії, тоді дорівнює $Val(X)$. Звідси термін "унікальна ігрова гіпотеза". Будемо притримуватися *розривної версії ULC проблеми (gap version)*, яку можна визначити так.

Означення 6. $Gap - ULC_{\eta,\gamma,L}$ є проблема для даного екземпляра X ULC проблеми з множиною міток $[L]$ визначити: або $Val(X) \geqslant 1 - \eta$, або $Val(X) \leqslant \gamma$.

Унікальна ігрова гіпотеза (UGC) [8]. Для довільних $\eta > 0$, $\gamma > 0$ існує константа $L > 0$ така, що $Gap - \mathrm{ULC}_{\eta,\gamma,L}$ є NP-складною.

Таким чином, UGC стверджує, що *розривна версія* ULC важкорозв'язна для довільних достатньо малих η і γ з достатньо великим L.

Справедливі такі результати.

Теорема 1 [3]. *Припустимо, що справедлива унікальна ігрова гіпотеза (UGC). Тоді для довільного $-1 < \rho < 0$ і $\varepsilon > 0$ є NP-складним відрізнити екземпляри Max Cut, які не менше ніж $((1 - \rho)/2)$-виконані, від екземплярів, які не більше ніж $((\arccos\rho)/\pi + \varepsilon)$-виконані. Зокрема, вибираючи $\rho = \rho^*$, де*

$$\rho^* = \operatorname*{arg\,min}_{-1<\rho<0} \left\{ \frac{\dfrac{\arccos\rho}{\pi}}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\rho} \right\} \approx -0{,}689,$$

отримаємо, що NP-складно апроксимувати Max Cut з довільним відношенням, більшим, ніж $\alpha_{\mathrm{GW}} \approx 0{,}878567$.

Оскільки $\alpha_{\mathrm{GW}} = \min\limits_{-1<\rho<0} \left\{ \dfrac{(\arccos\rho)/\pi}{(1-\rho)/2} \right\} = \min\limits_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} \left\{ \dfrac{\theta/\pi}{(1-\cos\theta)/2} \right\}$, то оптимальний вибір θ — розв'язок рівняння $\theta = \mathrm{tg}(\theta/2)$, $\theta^* \approx 2{,}33 \approx 134^\circ$, $\alpha_{\mathrm{GW}} = 2/(\pi \sin\theta^*)$.

Теорема 2 [8]. *Припустимо, що справедлива унікальна ігрова гіпотеза (UGC). Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ є NP-складним апроксимувати Max 2-Sat з відношенням, не меншим ніж $\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}} + \varepsilon$, де $\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}} \approx 0{,}94017$ (апроксимаційне відношення алгоритму Левіна–Літвана–Звіка).*

Згідно з теоремою 1, можна стверджувати, що, приймаючи UGC, відношення апроксимації α_{GW} є пороговим для проблеми Max Cut (алгоритм Гоеманса–Уільямсона — оптимальний). Те ж саме можна стверджувати (згідно з теоремою 2) щодо відношення апроксимації $\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}}$. Воно є пороговим для Max 2-Sat (алгоритм Левіна–Літвана–Звіка — оптимальний).

Поріг відношення апроксимації для реоптимізації Max Cut і Max 2-Sat. Нехай Max-$E2$CSP-P довільна безвагова CSP проблема з m обмеженнями ($w_i = 1$, $i \in [m]$). Нехай I — довільний екземпляр проблеми Max-$E2$CSP-P, екземпляр I' проблеми отримається з екземпляра I добавленням довільного $(m+1)$-го обмеження $z^{(m+1)} = (z^{(m+1)}_{i_1}, z^{(m+1)}_{i_2})$ ($z^{(m+1)}_{i_j} \in \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}, j = 1, 2$). Визначимо реоптимізаційний варіант проблеми Max-$E2$CSP-P.

Проблема Ins-Max-$E2$CSP-P. **Вхідні дані.** Довільний екземпляр Iпроблеми Max-$E2$CSP-P, x^* — оптимальний розв'язок екземпляра I.

Результат. Знайти оптимальний розв'язок екземпляра I' (отриманого, виходячи з I, як описано вище) проблеми Max-$E2$CSP-P, використовуючи x^*.

Мета. Знайти x, яке максимізує число виконаних обмежень екземпляра I'.

Оскільки Max-$E2$CSP-P є NP-складною, то можна показати, що такою буде і Max-$E2$CSP-P.

Теорема 3. *Якщо для проблеми Max-$E2$CSP-P існує поліноміальний ρ-наближений алгоритм, то для проблеми Ins-Max-$E2$CSP-P (реоптимізація Max-$E2$CSP-P) існує поліноміальний $\varphi(\rho)$-наближений алгоритм, де $\varphi(\rho) = 1/(2-\rho)$.*

Теорема 4. *Якщо для проблеми Max-$E2$CSP-P існує поліноміальний пороговий (оптимальний) ρ-наближений алгоритм, а для проблеми Ins-Max-$E2$CSP-P (реоптимізація Max-$E2$CSP-P) існує поліноміальний γ-наближений алгоритм, то $\gamma \leqslant \varphi(\rho)$.*

З теорем 3 та 4 випливає теорема 5.

Теорема 5. *Якщо для проблеми Max-$E2$CSP-P існує поліноміальний пороговий (оптимальний) ρ-наближений алгоритм, то для проблеми Ins-Max-$E2$CSP-P (реоптимізація Max-$E2$CSP-P) існує поліноміальний пороговий (оптимальний) $\varphi(\rho)$-наближений алгоритм, де $\varphi(\rho) = 1/(2-\rho)$.*

Теорема 6. *Припустимо, що справедлива унікальна ігрова гіпотеза (UGC). Тоді для проблеми Ins-Max-$E2$CSP-P (реоптимізація Max Cut) існує поліноміальний пороговий (оптимальний) $\varphi(\alpha_{\mathrm{GW}})$-наближений алгоритм, де $\varphi(\alpha_{GW}) = 1/(2-\alpha_{GW})$.*

Теорема 7. *Припустимо, що справедлива унікальна ігрова гіпотеза (UGC). Тоді для проблеми Ins-Max-$E2$ CSP-OR (реоптимізація Max 2-Sat) існує поліноміальний пороговий (оптимальний) $\varphi(\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}})$-наближений алгоритм, де $\varphi(\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}}) = 1/(2-\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}})$.*

Згідно з теоремою 6, поріг відношення апроксимації для реоптимізації Max Cut(при добавленні довільного ребра в граф) дорівнює $\varphi(\alpha_{\mathrm{GW}}) \approx 0{,}891716$. Згідно з теоремою 7, поріг відношення апроксимації для реоптимізації Max 2-Sat (при добавленні довільної диз'юнкції) дорівнює $\varphi(\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}}) \approx 0{,}943544$.

Таким чином, в роботі показано, що при виконанні унікальної ігрової гіпотези (UGC) для реоптимізації Max Cut (при добавленні довільного ребра в граф) і для реоптимізації Max 2-Sat (при добавленні довільної диз'юнкції) існують поліноміальні порогові (оптимальні) наближені алгоритми. Результати цієї роботи істотно залежать від істиності UGC. Поряд з проблемами взаємовідношення класів складності проблем з включення (наприклад, $P \neq NP$?) це одна з основних відкритих проблем сучасної теоретичної інформатики. Навіть якщо UGC хибна, може виявитися, що $Gap = \mathrm{ULC}_{\eta,\gamma,L}$ складна в сенсі нерозв'язності за поліноміальний час і така (слабка) складність може бути застосована до всіх проблем, де складність демонструвалася, виходячи з UGC.

1. *Arora S., Lund C., Motwani R. et al.* Proof verification and intractability of approximation problems // J. of the ACM. – 1998. – **45**, No 3. – P. 501–555.
2. *Hastad J.* Some optimal inapproximability results // Ibid. – 2001. – **48**, No 4. – P. 798–859.
3. *Goemans M. X., Williamson D. P.* Improved approximation algorithms for Maximum Cut and satisfiability problems using semidefinite programming // Ibid. – 1995. – **42**. – P. 1115–1145.
4. *Feige U.* A threshold of $\ln n$ for approximating set cover // Ibid. – 1998. – **45**, No 4. – P. 634–652.
5. *Trevisan L., Sorkin D. B., Sudan M.* Gadgets, approximation, and linear programming // SIAM J. on Computing. – 2000. – **29**, No 6. – P. 2074. – 2097.
6. *Khot S.* On the power of unique 2-prover 1-round games // Sympos. Theory of Comput. – 2002. – P. 767–775.
7. *Khot S., Kindler G., Mossel E., O'Donnell R.* Optimal inapproximability results for Max-Cut and other 2-variable CSPs? // Sympos. Found. of Comput. Sci. – 2004. – P. 146–154.
8. *Austrin P.* Balanced Max 2-Sat might not be the hardest // Sympos. Theory of Comput. – 2007. – P. 189–197.
9. *Lewin M., Livnat D., Zwick U.* Improved rounding techniques for the MAX 2-SAT and MAX DI-CUT problems // Lecture Notes in Computer Science. – 2002. – **2337**. – P. 67–82.
10. *Bockenhauer H. J., Hromkovic J., Momke T., Widmayer P.* On the hardness of reoptimization // Proc. of the 34 th Intern. Conf. on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science (SOF-SEM 2008); Lect. Notes Comput. Sci. – Springer: Berlin, 2008. – **4910**. – P. 50–65.
11. *Ausiello G., Bonifaci V., Escoffier B.* Complexity and approximation in reoptimization // Computability in Context: Computation and Logic in the Real World / Ed. S. B. Cooper and A. Sorbi). – London: Imperial College Press, 2011. – P. 101–130.
12. *Михайлюк В. А.* Реоптимизация задачи о покрытии множествами // Кибернетика и систем. анализ. – 2010. – **46**, № 6. – С. 27–31.
13. *Hast G.* Beating a random assignment: Doctoral Thesis. – Stockholm: Royal Institute of Technology, 2005. – 102 p.
14. *Alizadeh F.* Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization // SIAM J. on Optimization. – 1995. – **5**. – P. 13–51.
15. *Austrin P.* Towards sharp inapproximability for any 2-CSP // Sympos. Found. of Comput. Sci. – 2007. – P. 307–317.

Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 12.10.2011

Академик НАН Украины **И. В. Сергиенко, В. А. Михайлюк**

Реоптимизация обобщенных проблем об обобщенной выполнимости с предикатами размерности 2

Допустим, что выполняется уникальная игровая гипотеза (UGC). Тогда для реоптимизации Max Cut (при вставке произвольного ребра) существует полиномиальный пороговый (оптимальный) $\varphi(\alpha_{\mathrm{GW}})$-приближенный алгоритм, где $\varphi(\alpha_{\mathrm{GW}}) = 1/(2 - \alpha_{GW}) \approx 0{,}891716$, при этом $\alpha_{\mathrm{GW}} \approx 0{,}878567$ (константа Гоеманса–Уильямсона). Для реоптимизации Max 2-Sat (при вставке произвольной дизъюнкции) существует полиномиальный пороговый (оптимальный) $\varphi(\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}})$-приближенный алгоритм, где $\varphi(\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}}) \approx 0{,}943544$, при этом $\alpha^{-}_{LLZ} \approx 0{,}940166$ (константа Левина–Ливната–Звика).

Academician of the NAS of Ukraine **I. V. Sergienko, V. A. Mikhailyuk**

Reoptimization of constraint satisfaction problems with predicates of arity 2

Assume that the Unique Game Conjecture (UGC) is held. Then, for the reoptimization of Max Cut (if a new edge is inserted), a polynomial threshold (optimal) $\varphi(\alpha_{\mathrm{GW}})$ *— approximation algorithm exists, where* $\varphi(\alpha_{\mathrm{GW}}) = 1/(2-\alpha_{\mathrm{GW}}) \approx 0.891716$ *and* $\alpha_{\mathrm{GW}} \approx 0.878567$ *(the Goemans–Williamson constant). For the reoptimization of Max 2-Sat (if a new disjunction is inserted), a polynomial threshold (optimal)* $\varphi(\alpha^{|-|}_{\mathrm{LLZ}})$ *— approximation algorithm exists, where* $\varphi(\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}}) \approx 0.943544$ *and* $\alpha^{-}_{\mathrm{LLZ}} \approx 0.940166$ *(the Levin–Livnat–Zwick constant).*