ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

7 • 2012

МЕХАНІКА

УДК 539.375

А. А. Каминский, Л. А. Кипнис, Г. А. Хазин

О страгивании межфазных трещин в угловой точке границы раздела сред при полном гладком контакте берегов

(Представлено академиком НАН Украины Я. М. Григоренко)

Рассмотрена задача о страгивании межфазных трещин в кусочно-однородном изотропном упругом теле в угловой точке границы раздела сред в случае полного гладкого контакта берегов. Точное решение соответствующей краевой задачи построено методом Винера–Хопфа.

Для горного дела существенный интерес представляют решения задач теории упругости о предельном равновесии тел, находящихся в условиях сжатия и содержащих трещины с контактирующими берегами. Такие трещины могут зарождаться вблизи различных остроконечных концентраторов напряжений в горных массивах сложной структуры. Если эти трещины неустойчивы, то после достижения состояния предельного равновесия режим их развития будет динамическим, что может привести к разрушению массива.

Ниже дается решение задачи о предельном равновесии кусочно-однородного изотропного упругого тела с межфазными трещинами в угловой точке границы раздела сред в случае полного гладкого контакта берегов.

В условиях плоской деформации в рамках статической симметричной задачи рассмотрим кусочно-однородное тело с границей раздела сред в форме сторон угла, которое составлено из изотропных упругих частей с модулями Юнга E_1, E_2 ($E_1 > E_2$) и коэффициентами Пуассона ν_1, ν_2 (рис. 1).

В силу общих положений о поведении напряжений вблизи угловых точек упругих тел [1] угловая точка границы раздела сред O представляет собой остроконечный концентратор напряжений со степенной особенностью. При этом справедливы следующие формулы:

$$\tau_{r\theta}(r,0) = Cg_1 r^{\lambda} + o(r^{\lambda}), \qquad \sigma_{\theta}(r,0) = Cg_2 r^{\lambda} + o(r^{\lambda}) \qquad (r \to 0).$$

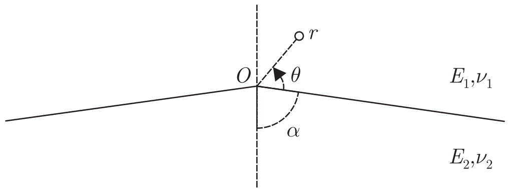

Рис. 1

Здесь

$$g_1 = \lambda g_{11} \sin \lambda\alpha + g_{12} \sin(\lambda + 2)\alpha,$$

$$g_{11} = (1 - e)\lambda^2 \sin^2 2\alpha \cos(\lambda + 2)\alpha - (1 - \varkappa_1 - 2e)\lambda \sin 2\alpha \cos(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \times$$
$$\times \sin[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] + [2 - (1 - \varkappa_2)e]\lambda \sin 2\alpha \cos \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\alpha \cos(\lambda + 2)\alpha -$$
$$- 2[1 - \varkappa_1 - (1 - \varkappa_2)e] \cos \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\alpha \cos(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \sin[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] +$$
$$+ (1 + \varkappa_1)\lambda \sin 2\alpha \sin(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \cos[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] +$$
$$+ (1 + \varkappa_1)(1 - \varkappa_2) \cos \lambda\alpha \sin^2(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \cos[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] -$$
$$- (1 + \varkappa_2)\lambda \sin 2\alpha \cos \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\alpha \cos(\lambda + 2)\alpha +$$
$$+ (1 - \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \cos \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\alpha \cos(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \sin[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha],$$

$$g_{12} = (1 - \varkappa_1 - 2e)\lambda(1 - \varkappa_2 + \lambda) \sin 2\alpha \cos \lambda\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \sin[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] -$$
$$- (1 - e)(1 - \varkappa_2 + \lambda)\lambda^2 \sin^2 2\alpha \cos \lambda\alpha -$$
$$- [2 - (1 - \varkappa_2)e]\lambda(1 - \varkappa_2 + \lambda) \sin 2\alpha \cos^2 \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\alpha +$$
$$+ 2[1 - \varkappa_1 - (1 - \varkappa_2)e](1 - \varkappa_2 + \lambda) \cos^2 \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \sin[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] -$$
$$-(1 + \varkappa_1)\lambda^2 \sin 2\alpha \sin \lambda\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \cos[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] -$$
$$- (1 + \varkappa_1)(1 - \varkappa_2)\lambda \sin \lambda\alpha \cos \lambda\alpha \sin(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \cos[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha] +$$
$$+(1 + \varkappa_2)\lambda^2 \sin 2\alpha \sin \lambda\alpha \cos \lambda\alpha \cos(\lambda + 2)\alpha -$$
$$- (1 - \varkappa_1)(1 + \varkappa_2)\lambda \sin \lambda\alpha \cos \lambda\alpha \cos(\lambda + 2)\alpha \cos \lambda(\pi - \alpha) \sin[\lambda(\pi - \alpha) - 2\alpha],$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} e_0, \qquad e_0 = \frac{E_1}{E_2}, \qquad \varkappa_{1,2} = 3 - 4\nu.$$

Для g_2 имеет место подобное выражение.

Показатель степени сингулярности напряжений λ представляет собой единственный на интервале $]-1;0]$ корень уравнения

$$\Delta(-x - 1) = 0, \Delta(z) = \delta_0(z) + \delta_1(z)e + \delta_2(z)e^2,$$

$$\delta_0(z) = (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha],$$

$$\delta_1(z) = (1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \sin^2 z\pi - (\sin 2z\alpha + z \sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2z(\pi - \alpha) + z \sin 2\alpha] -$$
$$- [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha),$$

$$\delta_2(z) = [\sin 2z(\pi - \alpha) - z \sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2z\alpha - z \sin 2\alpha).$$

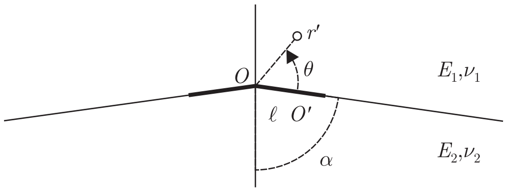

Рис. 2

Постоянная C должна определяться из решения каждой конкретной задачи теории упругости, изображенной на рис. 1. Будем считать эту постоянную отрицательной возрастающей по модулю функцией внешней нагрузки, что соответствует широкому классу задач, в которых тело находится в условиях сжатия.

Как показывают результаты расчетов, $\lambda > -1/2$; $g_1(\alpha) < 0$ при $\alpha \neq 0, \pi/2, \pi$; $g_1(0) = g_1(\pi/2) = g_1(\pi) = 0$; $g_1 = 0$, если $E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2$; $g_2(\alpha) < 0$ при $\alpha \in]0;\alpha_1] \bigcup]\pi/2;\alpha_2]$, $g_2(\alpha) > 0$ при $\alpha \in]\alpha_1;\pi/2] \bigcup]\alpha_2;\pi]$, $g_2(0) = g_2(\alpha_1) = g_2(\pi/2) = g_2(\alpha_2) = g_2(\pi) = 0$; $g_2 = 0$, если $E_1 = E_2$, $\nu_1 = \nu_2$. Если e_0 увеличивается, то α_1, α_2 уменьшаются.

В табл. 1 приведены некоторые значения показателя степени сингулярности напряжений λ при $\nu_1\nu_2 = 0{,}3$. Значениям e_0, равным 2; 3; 5; 10, соответствуют значения α_1, равные 38,2°; 34,4°; 29,3°; 21,7°, и значения α_2, равные 134,2°; 133,4°; 133,1°; 131,3° ($\nu_1 = \nu_2 = 0{,}3$).

Используя приведенную информацию о функции g_2 и считая всюду в дальнейшем $\alpha \in]\alpha_1;\pi/2[\bigcup]\alpha_2;\pi[$, заключаем, что $\sigma_\theta(r,0) \to -\infty$ при $r \to 0$. Поэтому на границе раздела сред вблизи угловой точки нормальные напряжения являются сжимающими. Тогда вследствие высокой концентрации напряжений в угловой точке возможно зарождение исходящих из нее межфазных трещин с полностью контактирующими берегами, длина которых в значительной степени меньше размеров тела. Чем больше отличаются друг от друга материалы, тем шире область значений угла α, при которых следует ожидать образование таких трещин. Предполагается, что трение между берегами трещин отсутствует.

Ставится задача определения условия страгивания зародившихся трещин и исследования их равновесия на устойчивость.

С учетом малости трещин приходим к плоской статической симметричной задаче теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости с границей раздела сред в форме сторон угла, содержащей разрезы конечной длины, исходящие из угловой точки и расположенные на этой границе (рис. 2). На бесконечности реализуется асимптотика, представляющая собой решение аналогичной задачи без разрезов (задача К), порождаемое единственным на интервале $]-1;0[$ корнем ее характеристического уравнения. Произвольная постоянная C, входящая в указанное решение, считается заданной. Она характеризует интенсивность внешнего поля и должна определяться из решения внешней задачи.

Таблица 1

e_0	α, °									
	15	30	45	60	75	105	120	135	150	165
2	−0,036	−0,075	−0,112	−0,112	−0,086	−0,025	−0,054	−0,089	−0,117	−0,104
3	−0,068	−0,132	−0,180	−0,184	−0,127	−0,037	−0,081	−0,130	−0,173	−0,168
5	−0,122	−0,232	−0,258	−0,248	−0,167	−0,049	−0,104	−0,168	−0,228	−0,241
10	−0,215	−0,310	−0,332	−0,308	−0,203	−0,059	−0,124	−0,202	−0,278	−0,318

Граничные условия рассматриваемой задачи (рис. 2) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\theta = \pi - \alpha, \qquad \tau_{r\theta} = 0, \qquad u_\theta = 0; \theta = -\alpha, \tau_{r\theta} = 0, \qquad u_\theta = 0;\\
&\theta = 0, \qquad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \qquad \langle u_\theta \rangle = 0;
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\theta = 0, \qquad r < l, \tau_{r\theta} = 0; \qquad \theta = 0, \qquad r > l, \qquad \langle u_r \rangle = 0; \tag{2}$$

$$\theta = 0, \qquad r \to \infty, \qquad \tau_{r\theta} = Cg_1 r^\lambda + o(1/r). \tag{3}$$

Здесь $-\alpha \leqslant \theta \leqslant \pi - \alpha$; $\langle a \rangle$ — скачок a.

Решение сформулированной задачи теории упругости представляет собой сумму решений следующих двух задач. Первая отличается от нее тем, что вместо первого условия (2) имеем

$$\theta = 0, \qquad r < l, \qquad \tau_{r\theta} = -Cg_1 r^\lambda, \tag{4}$$

а на бесконечности напряжения затухают как $o(1/r)$ (в (3) отсутствует первое слагаемое). Вторая задача — задача К. Поскольку решение второй задачи известно, достаточно построить решение первой.

Для построения точного решения первой задачи используется метод Винера–Хопфа в сочетании с аппаратом интегрального преобразования Меллина [2–4].

Применяя преобразование Меллина к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука, условиям (1) и учитывая второе условие (2) и условие (4), приходим к следующему функциональному уравнению Винера–Хопфа:

$$\begin{aligned}
&\Phi^+(p) + \frac{\tau}{p + \lambda + 1} = A \operatorname{ctg} p\pi G(p) \Phi^-(p)\\
&A = \frac{(1 + \varkappa_1)[1 + \varkappa_1 + (1 + \varkappa_2)e]}{2[\varkappa_1 + (1 + \varkappa_1\varkappa_2)e + \varkappa_2 e^2]}, \qquad G(p) = \frac{G_1(p)}{G_2(p)},\\
&G_1(p) = [\varkappa_1 + (1 + \varkappa_1\varkappa_2)e + \varkappa_2 e^2][a_0(p) + a_1(p)e] \sin p\pi,\\
&G_2(p) = [1 + \varkappa_1 + (1 + \varkappa_2)e][b_0(p) + b_1(p)e + b_2(p)e^2] \cos p\pi,\\
&a_0(p) = (1 + \varkappa_1)[\cos 2p(\pi - \alpha) - \cos 2\alpha](\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha),\\
&a_1(p) = (1 + \varkappa_2)(\cos 2p\alpha - \cos 2\alpha)[\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha],\\
&b_0(p) = (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha],\\
&b_1(p) = (1 + \varkappa_1)(1 + \varkappa_2) \sin^2 p\pi - (\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha)[\varkappa_1 \sin 2p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha] -\\
&\qquad - [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha),\\
&b_2(p) = [\sin 2p(\pi - \alpha) - p \sin 2\alpha](\varkappa_2 \sin 2p\alpha - p \sin 2\alpha), \qquad \tau = -Cg_1 l^\lambda,\\
&\Phi^+(p) = \int\limits_1^\infty \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \Phi^-(p) = \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)} \int\limits_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \bigg|_{\substack{r=\rho l\\ \theta=0}} \rho^p d\rho.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2}$ — достаточно малые положительные числа.

Подобные уравнения решены, например, в [2, 3].

Решение уравнения (5) имеет вид

$$
\begin{gathered}
\Phi^{+}=\frac{\tau K^{+}(p)G^{+}(p)}{p+\lambda+1}\left[\frac{1}{K^{+}(-\lambda-1)G^{+}(-\lambda-1)}-\frac{1}{K^{+}(p)G^{+}(p)}\right] \qquad (\operatorname{Re} p<0),\\
\Phi^{-}(p)=\frac{\tau p G^{-}(p)}{AK^{+}(-\lambda-1)G^{+}(-\lambda-1)(p+\lambda+1)K^{-}(p)} \qquad (\operatorname{Re} p>0),\\
\exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\ln G(z)}{z-p}dz\right]=\begin{cases} G^{+}(p), & \operatorname{Re} p<0,\\ G^{-}(p), & \operatorname{Re} p>0,\end{cases}\\
K^{\pm}(p)=\frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma(1/2\mp p)}
\end{gathered} \tag{6}
$$

($\Gamma(z)$ — гамма-функция).

Определим коэффициент интенсивности напряжений K_{II} в конце O' трещины. Вблизи точки O' в силу общих положений о поведении напряжений в окрестностях угловых точек упругих тел реализуется асимптотика, представляющая собой решение однородной статической задачи теории упругости для кусочно-однородной изотропной плоскости, содержащей на прямолинейной границе раздела сред полубесконечную линию разрыва касательного смещения, порождаемое корнем $-1/2$ ее характеристического уравнения. В частности, имеют место асимптотики

$$
\begin{aligned}
&\theta=0, \qquad r\to l+0, \qquad \tau_{r\theta}\sim\frac{\varkappa_1+e+1+\varkappa_2 e}{2(1+\varkappa_2 e)}\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(r-l)}},\\
&\theta=0, \qquad r\to l-0, \qquad \left\langle\frac{\partial u_r}{\partial r}\right\rangle\sim-\frac{4(1-\nu_1^2)}{E_1}\frac{\varkappa_1+e}{1+\varkappa_1}\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(l-r)}}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Исходя из (7), по теореме абелева типа получаем

$$
p\to\infty, \qquad \Phi^{+}(p)\sim\frac{\varkappa_1+e+1+\varkappa_2 e}{2(1+\varkappa_2 e)}\frac{K_{II}}{\sqrt{-2pl}}; \qquad \Phi^{-}(p)\sim-\frac{\varkappa_1+e}{1+\varkappa_1}\frac{K_{II}}{\sqrt{2pl}}. \tag{8}
$$

С помощью (6) находим асимптотику

$$
p\to\infty, \qquad \Phi^{-}(p)\sim\frac{\tau}{AK^{+}(-\lambda-1)G^{+}(-\lambda-1)\sqrt{p}}. \tag{9}
$$

Согласно (8), (9) получаем формулу для коэффициента интенсивности напряжений в конце O' трещины

$$
K_{II}=\frac{2\sqrt{2}(1+\varkappa_2 e)g_1\Gamma(\lambda+3/2)}{[1+\varkappa_1+(1+\varkappa_2)e]\Gamma(\lambda+2)G^{+}(-\lambda-1)}Cl^{\lambda+1/2}. \tag{10}
$$

Руководствуясь силовым критерием разрушения [5] и приравнивая правую часть (10) к критическому значению коэффициента интенсивности напряжений K_{IIc}, представляющему собой заданную постоянную материала, приходим к следующему уравнению, служащему для определения разрушающей нагрузки:

$$
C=\frac{[1+\varkappa_1+(1+\varkappa_2)e]\Gamma(\lambda+2)G^{+}(-\lambda-1)}{2\sqrt{2}(1+\varkappa_2 e)g_1\Gamma(\lambda+3/2)}\frac{K_{IIc}}{l^{\lambda+1/2}}. \tag{11}
$$

Таким образом, страгивание трещин произойдет тогда, когда параметр нагружения C, возрастая по модулю с ростом внешней нагрузки, достигнет своего предельного значения, определяемого формулой (11).

Поскольку $\lambda > -1/2$, из (10) находим

$$\frac{\partial K_{II}}{\partial l} = \frac{2\sqrt{2}(1+\varkappa_2 e)(\lambda+1/2)g_1\Gamma(\lambda+3/2)}{[1+\varkappa_1+(1+\varkappa_2)e]\Gamma(\lambda+2)G^+(-\lambda-1)} Cl^{\lambda-1/2} > 0. \tag{12}$$

Используя (12) и критерий устойчивости равновесия трещин [5], можно сформулировать следующий вывод. Если из угловой точки границы раздела изотропных упругих сред исходят межфазные трещины, длина которых в значительной степени меньше размеров тела, находящегося в условиях сжатия, то в случае полного гладкого контакта берегов их равновесие неустойчиво. После достижения состояния предельного равновесия режим развития трещин будет динамическим.

1. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
2. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Хазин Г. А.* О критерии начала роста двух сдвиговых трещин в упругом теле в условиях плоской деформации // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 4. – С. 83–90.
3. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Хазин Г. А.* Об устойчивости равновесия трещины Коттрелла // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 2. – С. 13–23.
4. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
5. *Механика* разрушения и прочность материалов: Справ. пособие. В 4 т. Т. 1. Основы механики разрушения материалов / Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З. – Киев: Наук. думка, 1988. – 488 с.

Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев
Уманский государственный педагогический
университет им. Павла Тычины

Поступило в редакцию 01.12.2011

А. О. Камінський, Л. А. Кіпніс, Г. А. Хазін

Про зрушення міжфазних тріщин у кутовій точці межі поділу середовищ при повному гладкому контакті берегів

Розглянуто задачу про зрушення міжфазних тріщин у кусково-однорідному ізотропному пружному тілі в кутовій точці межі поділу середовищ у випадку повного гладкого контакту берегів. Точний розв'язок відповідної крайової задачі побудовано методом Вінера–Хопфа.

A. A. Kaminsky, L. A. Kipnis, G. A. Khazin

On the start of interfacial cracks at a corner point of the interface under a full smooth contact of faces

The problem of the start of the interfacial cracks in a piece-homogeneous isotropic elastic body at a corner point of the interface is considered in the case of a full smooth contact of faces. An exact solution of the corresponding boundary-value problem is constructed by the Wiener–Hopf method.