УДК 517.956

В. В. Городецький, А. О. Широковських

Нелокальна багатоточкова за часом задача для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. Л. Горбачуком)

Встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь з операторами Бесселя дробового диференціювання та їх узагальненнями з граничною функцією з простору узагальнених функцій типу ультрарозподілів.

Нелокальні крайові задачі для диференціально-операторних рівнянь та рівнянь з частинними похідними виникають при побудові загальної теорії крайових задач, описуванні всіх коректних задач для конкретного оператора, математичному моделюванні різноманітних природничих процесів. Нелокальні крайові задачі в різних аспектах досліджували багато математиків, використовуючи при цьому різні методи та підходи (О. О. Дезін, В. К. Романко, С. Г. Крейн, В. М. Борок, Б. Й. Пташник, М. І. Матійчук, В. І. Чесалін та ін.). Одержано важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, досліджено питання залежності характеру розв'язності задач від поведінки символів операцій, сформульовано умови регулярності та нерегулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У цій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь з псевдодиференціальними операторами, побудованими за символами, які допускають аналітичне продовження в певну область комплексної площини (клас таких операторів містить і оператори Бесселя дробового диференціювання; нелокальні багатоточкові за часом задачі для еволюційних рівнянь з такими операторами на сьогодні не вивчені). Встановлено структуру та властивості фундаментального розв'язку, коректну розв'язність задачі у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу ультрарозподілів, знайдено зображення розв'язку у вигляді згортки фундаментально розв'язку з граничною функцією, доведено властивість локалізації розвитку багатоточкової задачі.

1. Властивості фундаментального розв'язку багатоточкової задачі. Нехай $\omega \in \in (1,+\infty)\setminus\{2,4,6,\ldots\}$, $\mu \in (-\infty, 0]$ — фіксовані параметри. Символом P_ω^μ позначимо сукупність функцій $a\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$, які задовольняють такі умови:

1) функція a нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$, при цьому

$$\exists\, B = B(a) > 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, c_\varepsilon > 0 \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ |D_x^m a(x)| \leqslant c_\varepsilon B^m m^m e^{\varepsilon |x|^\omega},$$

$$\exists\, b_0 > 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ a(x) \geqslant b_0 |x|^\omega;$$

2) функція $a \in P_\omega^\mu$ допускає аналітичне продовження в область $G_\mu := \{z = x + iy \in \in \mathbb{C}\colon |y| \leqslant K(1+|x|)^\mu, x \in \mathbb{R}, K > 0\}$ комплексної площини; функція $e^{-a(z)}$, $z \in G_\mu$, задовольняє нерівність

$$|e^{-a(x+iy)}| \leqslant \widetilde{L_0} \exp\{\widetilde{-\alpha_0} |x|^\omega\}, \qquad z = x + iy \in G_\mu,$$

з деякими сталими $\widetilde{L_0}$, $\widetilde{\alpha_0} > 0$, залежними лише від функції a. З теореми типу Фрагмена–Ліндельофа [1, с. 264] випливає, що похідні функції e^{-a} на дійсній осі задовольняють нерівності

$$|D_x^m e^{-a(x)}| \leqslant L_0 A_0^m m^{m(1-\mu/\omega)} \exp\{-\alpha_0|x|^\omega\}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \qquad x \in \mathbb{R},$$

з деякими сталими L_0, A_0, $\alpha_0 > 0$. Звідси дістаємо, що e^{-a} є елементом простору $S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega}$, який належить просторам типу S (просторів S_α^β, $\alpha > 0$, $\beta > 0$), введених І. М. Гельфандом та Г. Є. Шиловим в [1]. Простори типу S складаються з нескінченно диференційовних функцій, заданих на $\mathbb{R}$, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності та зростання похідних. Ці умови задаються за допомогою нерівностей $|x^k \varphi^{(m)}(x)| \leqslant c_{km}$, $x \in \mathbb{R}$, $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\{c_{km}\}$ — деяка подвійна послідовність додатних чисел. Якщо на елементи послідовності $\{c_{km}\}$ не накладаються жодні обмеження (тобто c_{km} можуть змінюватися довільно разом з функцією φ), то маємо, очевидно, простір $S \equiv S(\mathbb{R})$ Шварца швидко спадних на нескінченності функцій. Якщо ж числа c_{km} задовольняють певні умови, то відповідні конкретні простори містяться в S і називаються просторами типу S. Зокрема, для довільних фіксованих α, $\beta > 0$

$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \mid \exists\, c > 0\ \exists\, A > 0\ \exists\, B > 0\ \forall \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+ \forall\, x \in \mathbb{R}\colon |x^k \varphi^{(m)}(x)| \leqslant \\ \leqslant cA^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}\}.$$

Простір S_α^β можна охарактеризувати ще так [1]. S_α^β складається з тих і лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(m)}(x)| \leqslant c_1 B_1^m m^{m\beta} \exp\{-c_2|x|^{1/\alpha}\}, \qquad m \in \mathbb{Z}_+, \qquad x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c_1, B_1, c_2, залежними від функції φ.

Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geqslant 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих і лише тих функцій φ, які допускають аналітичне продовження в комплексну площину і задовольняють нерівність $|\varphi(x + iy)| \leqslant c_3 \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}$, $c_3 > 0$, $a > 0$, $b > 0$.

Топологічна структура в просторах S_α^β визначається так. Символом $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta$, які задовольняють умову

$$\forall\, \overline{A} > A \qquad \forall\, \overline{B} > B\colon\ |x^k \varphi^{(m)}(x)| \leqslant c\overline{A}^k \overline{B}^m k^{k\alpha} m^{m\beta}, \qquad \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно нормований простір, якщо норми в ній ввести за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,m} \frac{|x^k \varphi^{(m)}(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^m k^{k\alpha} m^{m\beta}}, \qquad \{\delta, \rho\} \subset \left\{1, \frac{1}{2}, \ldots\right\}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha,A_1}^{\beta,B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha,A_2}^{\beta,B_2}$ і $S_\alpha^\beta = \bigcup\limits_{A,B>0} S_{\alpha,A}^{\beta,B}$. Отже, в S_α^β можна ввести топологію індуктивної границі просторів $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ [1].

У просторах S_α^β визначена і є неперервною операція зсуву аргументу $T_x\colon \varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x)$. Ця операція є також диференційовною (навіть нескінченно диференційовною [1]) у тому розумінні, що граничне співвідношення $(\varphi(x + h) - \varphi(x))/h \to \varphi'(x)$, $h \to 0$, справджується для кожної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ у сенсі збіжності за топологією простору S_α^β. У S_α^β визначена і неперервна операція диференціювання. Простори типу S є досконалими [1] (тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні), вони тісно пов'язуються між собою перетворенням Фур'є, а саме правильними є формули $F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha$, де $F[S_\alpha^\beta] := \Big\{\psi\colon \psi(\sigma) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{i\sigma x}dx, \varphi \in S_\alpha^\beta\Big\}$.

Символом $(S_\alpha^\beta)'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на S_α^β зі слабкою збіжністю. Оскільки при $\beta > 1$ в $S_\alpha^\beta(\alpha > 0)$ є й фінітні функції [1], то має сенс таке означення: узагальнена функція $f \in (S_\alpha^\beta)'$ $(\alpha > 0,\ \beta > 1)$ дорівнює нулеві на інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$, якщо $\langle f, \varphi\rangle = 0$ для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$, носій якої міститься в (a, b) (тут $\langle f, \varphi\rangle$ позначає значення функціонала f на основній функції φ). Оскільки в основному просторі S_α^β визначена операція зсуву аргументу T_x, то згортку узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ з основною функцією φ задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f, T_{-x}\check{\varphi}(\cdot)\rangle \equiv \langle f, \varphi(x - \cdot)\rangle, \qquad \check{\varphi}(\xi) := \varphi(-\xi).$$

Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргументу в просторі S_α^β випливає, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Оскільки $F^{-1}[S_\beta^\alpha] = S_\alpha^\beta$, то перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ означимо за допомогою співвідношення $\langle F[f], \varphi\rangle = \langle f, F^{-1}[\varphi]\rangle$, $\varphi \in S_\beta^\alpha$.

Нехай $f \in (S_\alpha^\beta)'$. Якщо $f * \varphi \in S_\alpha^\beta$, $\forall\, \varphi \in S_\alpha^\beta$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору S_α^β випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору S_α^β, то функціонал f називається згортувачем у просторі S_α^β. Якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$ — згортувач у просторі S_α^β, то для довільної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ правильною є формула $F[f * \varphi] = F[f] \cdot F[\varphi]$.

З умови 1 випливає, що функція $a \in P_\omega^\mu$ — мультиплікатор у просторі $S_{1/\omega}^1$. Оскільки $1 - \mu/\omega \geqslant 1$ $(\mu \leqslant 0)$, то функція $a \in P_\omega^\mu$ є мультиплікатором і в просторі $S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega}$. Зокрема, $a_\omega(x) = (1+x^2)^{\omega/2}$, $x \in \mathbb{R}$, належить класу P_ω^0 і є мультиплікатором у просторі $S_{1/\omega}^1$ (а також у просторі $S_{1/\omega}^{1-\mu/\omega}$, $\mu < 0$), $e^{-a_\omega} \in S_{1/\omega}^1$.

Візьмемо функцію a з класу P_ω^μ. Із властивостей цієї функції випливає, що в просторі $S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega}$ визначений, є лінійним і неперервним оператор A, побудований за функцією a як за символом за правилом $\forall\, \varphi \in S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega}\colon A\varphi = F^{-1}[a \cdot F[\varphi]]$.

Якщо $a = a_\omega$, то, як відомо [2, с. 395], оператор $A \equiv A_\omega$ являє собою конструктивну реалізацію оператора $(I - D_x^2)^{\omega/2}$, $\omega = 2, 4, 6, \ldots$: $(I - D_x^2)^{\omega/2}\varphi = A_\omega\varphi$, який (див. [2]) називається оператором Бесселя дробового диференціювання.

Для еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + Au(t, x) = 0, \qquad (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{1}$$

де A — оператор, побудований раніше, розглянемо нелокальну багатоточкову (m-точкову) за часом задачу: знайти розв'язок $u \in C^1((0, T], S_{1-\mu/\omega}^{1/\omega})$ рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu u(t, \cdot)\mid_{t=0} - \mu_1 u(t, \cdot)\mid_{t=t_1} - \cdots - \mu_m u(t, \cdot)\mid_{t=t_m} = \varphi, \tag{2}$$

де $\varphi \in S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0, T]$ — фіксовані числа, $\mu > \max\Bigl\{\sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k, \mu_0 2^m\Bigr\}$, $\mu_0 = \max\{\mu_1, \ldots, \mu_m\}$, $0 < t_1 < \cdots < t_m \leqslant T$. Скориставшись методом перетворення Фур'є, знайдемо, що розв'язок задачі (1), (2) має вигляд

$$u(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \Gamma(t, x - \xi)\varphi(\xi)\, d\xi = \Gamma(t, x) * \varphi(x), \qquad (t, x) \in \Omega,$$

де

$$\Gamma(t, x) = F^{-1}[Q(t, \sigma)](x), \qquad Q(t, \sigma) = \exp\{-ta(\sigma)\}\left(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \exp\{-t_k a(\sigma)\}\right)^{-1}.$$

Основні властивості функції Γ сформулюємо в нижченаведених твердженнях.

Лема 1. *Для функції Γ та її похідних справджуються нерівності*

$$\begin{aligned} &|D^s_x \Gamma(t, x)| \leqslant c_0 B^s s^{s/\omega} t^{-(s+1)/\omega} \exp\{-a_0 t^{-\mu/(\omega-\mu)} |x|^{1/(1-\mu/\omega)}\}, \qquad \mu \leqslant 0, \\ &(t, x) \in \Omega, \qquad s \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \tag{3}$$

сталі a_0, c_0, $B > 0$ не залежать від t.

Лема 2. *Функція $\Gamma(t, \cdot)$, $t \in (0, T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, диференційовна за t (під абстрактною функцією тут розуміємо відображення $\Omega \ni \nu \to f_\mu \in X$, де Ω — деяка множина чисел, X — лінійний топологічний простір або об'єднання таких просторів [1]).*

Лема 3. *У просторі $(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega})'$ справджується граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} \Gamma(t, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \Gamma(t, \cdot) = \delta$$

(δ — дельта-функція Дірака).

З оцінок (3) випливає, що $\Gamma(t, \cdot)$ є елементом простору $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$ при кожному $t > 0$. Отже, має зміст згортка $\Gamma(t, \cdot) * \varphi$, де φ — узагальнена функція з простору $(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega})'$. Символом $(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}, *)'$ позначимо клас узагальнених функцій з $(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega})'$, які є згортувачами в просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$. З леми 3 випливає таке твердження.

Наслідок 1. *Нехай $\omega(t, x) = f * \Gamma(t, x)$, $f \in (S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}, *)'$, $(t, x) \in \Omega$. Тоді в просторі $(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega})'$ правильним є граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t \to +0} \omega(t, \cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \omega(t, \cdot) = f.$$

Зауважимо також, що Γ є розв'язком рівняння (1). Надалі функцію Γ називатимемо *фундаментальним розв'язком* m-точкової задачі для рівняння (1) (позначення: ФРБЗ).

2. Коректна розв'язність m-точкової задачі. Властивість локалізації. З наслідку 1 випливає, що для рівняння (1) m-точкову (за t) задачу можна ставити так: знайти розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u(t,\cdot) = f, \qquad f \in (S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega})', \tag{4}$$

де границі розглядаються в просторі $(S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega})'$. Має місце таке твердження.

Теорема 1. *Задача* (1), (4) *коректно розв'язна. Розв'язок зображається у вигляді згортки:* $u(t,x) = f * \Gamma(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *де* Γ *— фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі для рівняння* (1).

Оскільки узагальнена функція f — згортувач у просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, а функція $\Gamma(t,\cdot)$ — ФРБЗ для рівняння (1), є неперервною абстрактною функцією параметра $t \in (0,T]$ із значеннями в просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$, то граничні співвідношення $u(t,\cdot) = f * \Gamma(t,\cdot) \underset{t\to t_k}{\longrightarrow} f * \Gamma(t_k,\cdot) = u(t_k,\cdot)$, $t_k \in (0,T]$, $k \in \{1,\ldots,m\}$, справджуються в просторі $S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega}$. Звідси, зокрема, дістаємо, що $u(t,\cdot) \to u(t_k,\cdot)$ при $t \to t_k$, $k \in \{1,\ldots,m\}$, рівномірно на довільному відрізку $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Вказану збіжність в (4) погіршує перший доданок, оскільки для функції $\Gamma(t,\cdot)$ точка $t = 0$ є особливою. Однак якщо граничну функцію f брати з класу $(S^{\beta}_{1-\mu/\omega})' \subset (S^{1/\omega}_{1-\mu/\omega})'$, де $\beta > 1$, то можна отримати локальне покращення збіжності згортки $f * \Gamma(t,\cdot)$ при $t \to +0$. Це пояснюється тим, що клас $S^{\beta}_{1-\mu/\omega}$ при $\beta > 1$ містить фінітні функції і в цьому випадку коректним є поняття збіжності узагальненої функції f з гладкою функцією на деякій відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}$.

Символом M_s позначатимемо клас функцій, які є мультиплікаторами в просторі $S^{\beta}_{1-\mu/\omega}$, $\beta \geqslant 1 + (1-\mu)/\omega$.

Теорема 2 (властивість локалізації). *Нехай* $f \in (S^{\beta}_{1-\mu/\omega})'$, *де* $\beta \geqslant 1 + (1-\mu)/\omega$, $u(t,x)$ *— розв'язок задачі* (1), (4) *з граничною функцією* f. *Якщо узагальнена функція* f *збігається на інтервалі* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *з функцією* $g \in M_s$, *то на довільному проміжку* $[c,d] \subset (a,b)$ *граничне співвідношення*

$$\mu \lim_{t\to+0} u(t,x) - \mu_1 \lim_{t\to t_1} u(t,x) - \cdots - \mu_m \lim_{t\to t_m} u(t,x) = g(x)$$

справджується рівномірно відносно x.

Зауважимо, що отримані результати мають місце і у випадку n незалежних змінних.

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – Москва: Физматгиз, 1958. – 307 с.
2. *Самко Г. С., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 06.10.2011

В. В. Городецкий, А. А. Широковских

Нелокальная многоточечная по времени задача для одного класса эволюционных псевдодифференциальных уравнений

Установлена корректная разрешимость нелокальной многоточечной по времени задачи для эволюционных уравнений с операторами Бесселя дробного дифференцирования и их обобщениями с граничной функцией из пространства обобщенных функций типа ультрараспределений.

V. V. Gorodetskii, A. O. Shyrokovskyh

A nonlocal problem multipoint in the time for one class of evolution pseudodifferential equations

The correct solvability of a nonlocal problem multipoint in the time for evolution equations with Bessel operators of fractional differentiation and their generalizations with an ultimate function of the space of distributions of the ultra-sharing type is established.