УДК 517.925

І. І. Клевчук, С. А. Пернай, І. М. Черевко

Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Досліджено умови обмеженості та методику побудови області стійкості лінійних диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями.

Дослідження стійкості розв'язків диференціально-різницевих рівнянь є важливою задачею [1–3]. У зв'язку з численними прикладними застосуваннями значна увага приділяється одержанню областей стійкості лінійних диференціальних рівнянь із запізненням [4–6].

Розглянемо лінійне диференціально-різницеве рівняння із запізненням

$$x'(t) + \sum_{k=1}^{n} b_k x(t - \tau_k) = 0, \tag{1}$$

де $b_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n = \tau$.

Відомо [2, 4], що необхідною і достатньою умовою стійкості розв'язків рівняння (1) є розміщення нулів його характеристичного рівняння

$$P(\lambda) = \lambda + \sum_{k=1}^{n} b_k e^{-\lambda\tau_k} = 0 \tag{2}$$

в лівій півплощині $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Для лінійних диференціальних рівнянь без запізнення характеристичне рівняння є многочленом. У цьому випадку відомо ряд критеріїв, що дозволяють описати розміщення коренів характеристичного рівняння: критерій Рауса–Гурвіца, частотні критерії Михайлова і Найквіста, метод D-розбиття простору параметрів рівняння.

Аналіз розміщення коренів рівняня (2) є досить складною задачею, однак при дослідженні стійкості часто необхідно знати не фактичне розміщення коренів квазіполіномів, а тільки чи всі корені мають від'ємні дійсні частини.

Теорема 1 [7]. *Нехай* $\{b_k, \tau_k\} \subset (0, \infty)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \tau_k < \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

то всі корені квазіполінома рівняння (2) *мають від'ємні дійсні частини.*

Наведена теорема визначає достатні умови стійкості рівняння (1), однак вона не дозволяє ефективно побудувати коефіцієнтні області стійкості, оскільки нульовий розв'язок рівняння (1) може бути стійким при як завгодно великому значенні $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \tau_k$ [7].

Нехай у рівнянні (1) запізнення τ_k — додатні раціональні числа. Якщо зробити лінійну заміну незалежної змінної, можна одержати інше лінійне рівняння, якому відповідає характеристичне рівняння вигляду

$$\lambda = a_1 e^{-\lambda} + a_2 e^{-2\lambda} + \cdots + a_n e^{-n\lambda}. \tag{4}$$

Отже, без втрати загальності, можна вважати в цьому випадку, що запізнення у рівнянні (1) — цілі додатні попарно різні числа.

Означення [8]. Областю стійкості рівняння (4) називається множина точок $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, для яких всі корені рівняння (4) задовольняють умову $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

Нехай L — проста неперервна крива, на якій вказано напрямок руху. Через $\triangle \operatorname{Arg}_{z\in L} f(z)$ позначимо зміну аргументу функції $f(z)$ при русі вздовж кривої L.

Лема 1. *Нехай функції $f(z)$ та $g(z)$ аналітичні в комплексній площині і для точок z із деякої простої неперервної кривої L виконується нерівність $|g(z)| < |f(z)|$. Тоді*

$$\triangle \operatorname{Arg}_{z\in L}(f(z) + g(z)) \geqslant \triangle \operatorname{Arg}_{z\in L} f(z) - \pi. \tag{5}$$

Доведення. Справджується рівність

$$\triangle \operatorname{Arg}_{z\in L}(f(z) + g(z)) =$$
$$= \triangle \operatorname{Arg}_{z\in L}\left[f(z)\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)\right] = \triangle \operatorname{Arg}_{z\in L} f(z) + \triangle \operatorname{Arg}_{z\in L}\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right).$$

Оскільки $|g(z)/f(z)| < 1$, то функція $1 + g(z)/f(z)$ відображає криву L у внутрішність одиничного круга з центром у точці $z = 1$. Тому образ кривої L при відображенні $1 + g(z)/f(z)$ може змінити аргумент не більше, ніж на π. Із нерівності $\triangle \operatorname{Arg}_{z\in L}(1 + f(z)/g(z)) \geqslant -\pi$ випливає нерівність (5). Лема 1 доведена.

Позначимо $Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z$.

Лема 2. *Нехай для всіх $\alpha \in [0; 1]$ існує z таке, що $|z| = e^{-\alpha}$ і виконується нерівність $|Q(z)| \leqslant \pi + 1$. Тоді знайдеться стала $K > 0$ така, що $|a_j| \leqslant K$ для всіх $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Доведення. Розкладемо поліном $Q(z)$ на множники $Q(z) = a_n z(z - z_1)\cdots(z - z_{n-1})$. Тоді вірна нерівність

$$|a_n|\,|z|\,|(|z| - |z_1|)\cdots(|z| - |z_{n-1}|)| \leqslant |Q(z)|. \tag{6}$$

Розглянемо поліном $Q_1(x) = |a_n|x(x - |z_1|)\cdots(x - |z_{n-1}|)$. Згідно з умовою леми, із (6) випливає, що для всіх $x \in [e^{-1}; 1]$ виконується оцінка $|Q_1(x)| \leqslant \pi + 1$.

Застосовуючи теорему Чебишова, одержимо, що існує $x \in [e^{-1}; 1]$ таке, що $|Q_1(x)| \geqslant 2|a_n|((1 - e^{-1})/4)^n$. Звідси випливає, що $|a_n| \leqslant ((\pi + 1)/2)(4e/(e - 1))^n$.

Одержимо оцінку для a_{n-1}. Оскільки

$$|a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z| \leqslant |a_n z^n + \cdots + a_1 z| + |a_n z^n| \leqslant \pi + 1 + \frac{\pi + 1}{2}\left(\frac{4e}{e - 1}\right)^n,$$

то

$$|a_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2}\left[\pi + 1 + \frac{\pi + 1}{2}\left(\frac{4e}{e - 1}\right)^n\right]\left(\frac{4e}{e - 1}\right)^{n-1}.$$

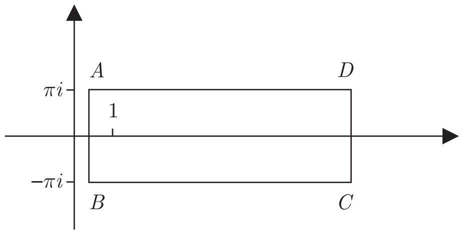

Рис. 1

Аналогічно можна одержати оцінки для всіх коефіцієнтів. Лема 2 доведена.

Теорема 2. *Область стійкості рівняння* (4) *обмежена.*

Доведення. Позначимо $P(\lambda) = \lambda - Q(e^{-\lambda})$. Тоді рівняння (4) перепишеться у вигляді $P(\lambda) = 0$. Застосуємо принцип аргументу до прямокутника на рис. 1.

Згідно з принципом аргументу, число нулів квазіполінома $P(\lambda)$ у прямокутнику дорівнює зміні аргументу функції $P(\lambda)$ при русі λ вздовж контура $ABCD$.

Сторона AB прямокутника перетинає дійсну вісь у точці $x = \alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Число α ми виберемо пізніше. Сторону CD виберемо досить далеко від уявної осі. Тоді її образ при відображенні $P(\lambda)$ буде міститися в правій півплощині. На відрізку BC маємо

$$\lambda = -\pi i + x, \qquad x \geqslant \alpha \geqslant 0, \qquad P(\lambda) = -\pi i + x - Q(-e^{-x}).$$

Уявна частина функції $P(\lambda)$ залишається сталою, а дійсна частина прямує до $+\infty$ при $x \to +\infty$. На відрізку AD

$$\lambda = \pi i + x, \qquad x \geqslant \alpha \geqslant 0, \qquad P(\lambda) = \pi i + x - Q(-e^{-x}).$$

Тут знову уявна частина функції $P(\lambda)$ буде сталою. В результаті сумарна зміна аргументу функції при русі вздовж відрізків BC, CD і DA буде додатною. Залишилось оцінити зміну аргументу образу відрізка AB. Як ми побачимо, при досить великому $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |a_j|$ визначальним на відрізку AB для приросту аргументу функції $P(\lambda)$ буде вплив функції $Q(e^{-\lambda})$.

Приріст аргументу функції $Q(e^{-\lambda})$ при русі по відрізку AB дорівнює приросту аргументу функції $Q(z)$, коли z робить обхід кола $|z| = e^{-\alpha}$ проти годинникової стрілки. Згідно з принципом аргументу,

$$\triangle \mathrm{Arg}_{|z|=e^{-\alpha}} Q(z) = 2\pi N,$$

де N — число нулів функції $Q(z)$ в крузі $|z| < e^{-\alpha}$. Але в цьому крузі завжди є нуль $z = 0$, тому $N \geqslant 1$, значить

$$\triangle \mathrm{Arg}_{\pi \geqslant y \geqslant -\pi} Q(e^{-(\alpha+iy)}) \geqslant 2\pi.$$

Якщо виконуються умови леми 2, то коефіцієнти полінома $Q(z)$ обмежені. У протилежному випадку, при досить великому $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |a_j|$ знайдеться таке α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, що

$$|Q(e^{-(\alpha+iy)})| \geqslant \pi + 1 \geqslant |\alpha + iy|, \qquad \pi \geqslant y \geqslant -\pi.$$

Використовуючи лему 1, оцінимо зміну аргументу функції $P(\lambda)$ при русі вздовж відрізка AB

$$\triangle \mathrm{Arg}_{\pi \geqslant y \geqslant -\pi} (\alpha + iy - Q(e^{-(\alpha+iy)})) \geqslant 2\pi - \pi = \pi.$$

Таким чином, при досить великому $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j|$ зміна аргументу функції $P(\lambda)$ при русі вздовж контура $ABCD$ буде додатною. Отже, згідно з принципом аргументу, функція $P(\lambda)$ матиме нуль в прямокутнику $ABCD$, а тоді $(a_1,\ldots,a_n)$ не належить області стійкості рівняння (4).

Звідси випливає обмеженість області стійкості. Теорема 2 доведена.

Наслідок. *Область стійкості рівняння* (1), *де* τ_k — *додатні, раціональні числа, є обмеженою.*

Лема 3. *Якщо вектор* $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ *належить області стійкості рівняння* (4), *то* $a_1+a_2+\cdots+a_n<0$.

Доведення. Нехай $a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant 0$. Тоді квазіполіном $P(\lambda)=\lambda-a_1e^{-\lambda}-\cdots-a_ne^{-n\lambda}$ задовольняє умови

$$P(0)\leqslant 0,\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}P(\lambda)=+\infty.$$

Значить, існує число λ_0, $0\leqslant\lambda_0<\infty$, таке, що $P(\lambda_0)=0$. Рівняння (4) має невід'ємний дійсний корінь. Отже, вектор $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ не належить області стійкості. Лема 3 доведена.

Розглянемо методику дослідження стійкості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь із запізненням, що базується на їх апроксимації послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь [6, 9]. Поставимо у відповідність рівнянню (1) послідовність апроксимуючих систем звичайних диференціальних рівнянь [9]

$$z_0'(t)+\sum_{k=1}^{n}b_kz_{l_k}(t)=0,\qquad z_k'(t)+\mu(z_k(t)-z_{k-1}(t))=0, \tag{7}$$

$$k\in\{1,2,\ldots,m\},\qquad \mu=\frac{m}{\tau},\qquad l_k=\left[\frac{m\tau_k}{\tau}\right],\qquad m\in\mathbb{N}.$$

Для характеристичного рівняння апроксимуючої системи, враховуючи її структуру, можна одержати співвідношення

$$\Psi_m(\lambda)=\lambda\left(1+\frac{\lambda\tau}{m}\right)^{m}+\sum_{k=1}^{n}b_k\left(1+\frac{\lambda\tau}{m}\right)^{m-l_k}=0. \tag{8}$$

Дослідимо зв'язок між квазіполіномом $P(\lambda)$ і характеристичним многочленом (8).

Лема 4. *Для фіксованих* $\lambda\in\mathbb{C}$ *послідовність функцій*

$$H_m(\lambda)=\Psi_m(\lambda)\left(1+\frac{\lambda\tau}{m}\right)^{-m},\qquad m\in\mathbb{N}, \tag{9}$$

збігається при $m\to\infty$ *до квазіполінома* $P(\lambda)$.

Доведення. Розглянемо деяке $\lambda\in\mathbb{C}$. Оскільки $\lambda\neq -m/\tau$ (за можливим винятком одного значення m), то функція $H_m(\lambda)$ визначена для всіх $m\in\mathbb{N}$ за можливим винятком одного $m\in\mathbb{N}$. Враховуючи вигляд функції

$$H_m(\lambda)=\lambda+\sum_{k=1}^{n}b_k\left(1+\frac{\lambda\tau}{m}\right)^{-l_k}, \tag{10}$$

на підставі відомої границі

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{\lambda\tau}{m}\right)^{-\tau_k m/\tau}=e^{-\lambda\tau_k}$$

та означення числа l_k одержуємо рівність

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lambda+\sum_{k=1}^{n}b_k\left(1+\frac{\lambda\tau}{m}\right)^{-l_k}\right)=\lambda+\sum_{k=1}^{n}b_k e^{-\lambda\tau_k}.$$

Отже, переходячи в рівності (10) до границі при $m\to\infty$, для фіксованого $\lambda\in\mathbb{C}$ одержимо

$$\lim_{m\to\infty}H_m(\lambda)=\lambda+\sum_{k=1}^{n}b_k e^{-\lambda\tau_k}.$$

Лема 4 доведена.

Зауваження. Функція $H_m(\lambda)$, визначена співвідношенням (9), апроксимує при $m\to\infty$ квазіполіном $P(\lambda)$. Цю властивість можна використати для наближеного знаходження неасимптотичних коренів квазіполінома $P(\lambda)$. Оскільки нулі функцій $\Psi_m(\lambda)$ і $H_m(\lambda)$, згідно з рівністю (9), збігаються, то корені характеристичного многочлена (8) можна брати за наближені значення неасимптотичних коренів квазіполінома $P(\lambda)$.

Конструктивні алгоритми дослідження стійкості лінійних стаціонарних систем із запізненням на основі аналізу властивостей нульового розв'язку апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь наведено в [9].

Теорема 3 [9]. *Якщо нульовий розв'язок рівняння* (1) *експоненціально стійкий (нестійкий), то існує* $m_0>0$ *таке, що при* $m\geqslant m_0$ *нульовий розв'язок системи* (7) *експоненціально стійкий (нестійкий). Якщо для всіх* $m\geqslant m_0$ *нульовий розв'язок системи* (7) *експоненціально стійкий (нестійкий), то й нульовий розв'язок рівняння* (1) *експоненціально стійкий (нестійкий).*

Із теореми 3 випливає, що при досить великих m стійкість нульового розв'язку рівняння (1) еквівалентна стійкості нульового розв'язку апроксимуючої системи (7). Цю властивість можна використати для побудови обчислювального алгоритму знаходження області стійкості рівняння (1).

Як приклад розглянемо лінійне диференціальне рівняння із двома запізненнями

$$x'(t)=a_1(t-m)+a_2(t-n), \tag{11}$$

де $\{a_1,a_2\}\subset\mathbb{R}$, m, n — натуральні взаємно прості числа. Із теореми 2 і леми 3 одержимо, що область стійкості рівняння (11) на площині параметрів a_1, a_2 міститься в обмеженому многокутнику

$$||a_1|-|a_2||<\pi,\qquad ||a_1|e^{-m}-|a_2|e^{-n}|<\sqrt{\pi^2+1},\qquad a_1+a_2<0.$$

Покриваємо цю область сіткою вузлів (a_{0i},a_{1j}), $i\in\{0,1,\dots,p\}$, $j\in\{0,1,\dots,k\}$, $\{n,k\}\subset\mathbb{N}$. Для кожного вузла (a_{0i},a_{1j}) маємо лінійне рівняння із запізненням вигляду (11). Досліджуємо його на стійкість згідно з теоремою 3, використовуючи відповідну (7) апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь. Для дослідження стійкості стаціонарних лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь використовується процедура

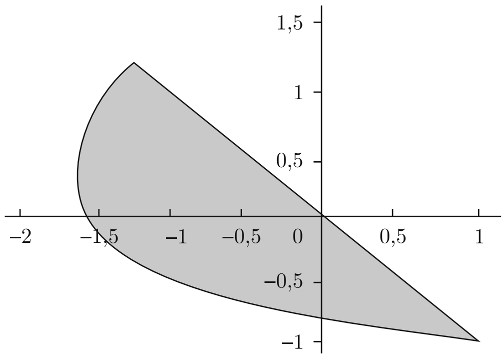

Рис. 2

polyroots пакета Mathcad, яка дозволяє обчислити корені відповідних цим системам характеристичних многочленів.

Провівши такі дослідження у кожному вузлі сітки, можна побудувати область стійкості рівняння (11).

Результати числових експериментів для $m = 1$, $n = 2$ зображено на рис. 2, де область стійкості — це заштрихована частина площини.

1. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – Москва: Наука, 1981. – 448 с.
2. *Резван В.* Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. – Москва: Наука, 1983. – 360 с.
3. *Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В.* Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1997. – 236 с.
4. *Слюсарчук В. Ю.* Абсолютна стійкість динамічних систем із післядією. – Рівне: УДУВГП, 2003. – 288 с.
5. *Баркин А. И.* Устойчивость линейных систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 3. – С. 3–7.
6. *Матвій О. В., Пернай С. А., Черевко І. М.* Про стійкість лінійних систем із запізненням // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 421. Математика. – Чернівці: Рута, 2008. – С. 66–70.
7. *Вагина М. Ю., Кипнис М. М.* Устойчивость нулевого решения дифференциального уравнения с запаздываниями // Мат. заметки. – 2003. – **74**, вып. 5. – С. 786–789.
8. *Клевчук І. І.* Зведення крайових задач до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 160. Математика. – Чернівці: Рута, 2003. – С. 80–83.
9. *Черевко І. М., Матвій О. В.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 2. – С. 208–216.

Чернівецький національний університет
ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 09.06.2011

И. И. Клевчук, С. А. Пернай, И. М. Черевко

Построение областей стойкости линейных дифференциально-разностных уравнений

Исследованы условия ограничения и методика построения области устойчивости линейных дифференциальных уравнений с множеством опозданий.

I. I. Klevchuk, S. A. Pernay, I. M. Cherevko

The construction of the stability domains of linear differential-difference equations

We investigate the boundedness conditions and the methods of construction of a stability domain of linear differential equations with several delays.