УДК 512.54

Я. В. Лавренюк

Про мінімальну систему твірних у групі автоморфізмів бінарного кореневого дерева

(Представлено академіком НАН України М. О. Перестюком)

Доведено існування мінімальної системи твірних у групі всіх автоморфізмів бінарного кореневого дерева.

1. B. Csákány та F. Gécseg [1] в 1965 р. поставили питання — чи мають мінімальні системи твірних напівгрупа всіх автоматних перетворень, напівгрупа скінченно-автоматних перетворень, група всіх бієктивних автоматних перетворень та група бієктивних скінченно-автоматних перетворень над довільним алфавітом, який містить хоча б дві літери?

Невдовзі для напівгруп була отримана негативна відповідь. Це довели незалежно С. Альошин [2] в 1970 р. та P. Dömösi [3] в 1972 р. Питання для груп залишається відкритим і сьогодні. Згадана проблема формулювалася також у роботах P. Dömösi, зокрема, в [4, Problem 2.1].

З робіт, пов'язаних з даною проблемою, відзначимо роботу А. Олійника [5], в якій доводиться, що скінченно становий вінцевий добуток напівгруп перетворень не є скінченно породженим і в певних випадках навіть не має мінімальної системи твірних.

Також відзначимо ряд робіт про системи твірних у проективних границях вінцевих добутків груп, в яких вивчалися різні аспекти скінченної породженості таких груп (як проскінченних груп) [6–9].

Зауважимо, що група всіх бієктивних автоматних перетворень над скінченним алфавітом ізоморфна групі всіх автоморфізмів однорідного кореневого дерева відповідної валентності.

У роботі доведено існування мінімальної системи твірних у групі всіх автоморфізмів бінарного кореневого дерева. Тобто дано позитивну відповідь на проблему існування мінімальної системи твірних групи всіх бієктивних автоматних перетворень над алфавітом із двох літер.

2. Нехай $X = \{a, b\}$ — алфавіт. Нагадаємо визначення *дерева слів* T_X над алфавітом X. Множина вершин $V(T_X)$ дерева слів T_X є множиною найможливіших послідовностей вигляду

$$i_0 i_1 \cdots i_{n-1}, \qquad i_k \in X, \qquad n \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

разом з порожньою послідовністю Λ, яка відповідає випадку $n = 0$. Вершини $u, v \in V(T_X)$ з'єднуються ребром у дереві T_X в тому і лише в тому випадку, коли одна з них є безпосереднім продовженням іншої, тобто одна з них має вигляд $i_0 \cdots i_{n-1} i_n$, а інша $i_0 \cdots i_{n-1}$, $i_k \in X$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Множина всіх слів довжини n називається *рівнем номер* n дерева T_X.

Кожне бінарне кореневе дерево ізоморфне дереву слів над алфавітом з двох елементів.

Нехай $v = i_1 \cdots i_n \in V(T_X)$. Ми позначатимемо $T_X(v)$ повне піддерево дерева T_X, множина вершин якого є такою:

$$V(T_X(v)) = \{j_1 \cdots j_k \mid k \geqslant n, j_1 = i_1, \ldots, j_n = i_n\}.$$

Бієкція

$$f\colon V(T_X) \to V(T_X)$$

називається *автоморфізмом* дерева слів T_X, якщо $\Lambda^f = \Lambda$ і f зберігає відношення інцидентності вершин. Множина всіх автоморфізмів дерева слів T_X утворює групу, яку ми позначатимемо $\mathrm{Aut}\, T_X$.

Група всіх автоморфізмів, які фіксують всі вершини рівня номер n, позначається $\mathrm{Stab}(n)$ і називається *стабілізатором рівня номер* n.

Якщо $v \in V(T)$, то множина всіх автоморфізмів $g \in \mathrm{Aut}\, T_X$, які фіксують кожну вершину зовні піддерева $T_X(v)$, називається *вершинною групою* (або *жорстким стабілізатором* вершини) і позначається $\mathsf{rist}\, v$.

Поняття "жорсткий стабілізатор" та "вершинна група" належать Р. І. Григорчуку [10].

Говоритимемо, що елемент g є нетривіальною підстановкою у вершині v, якщо $g \in \mathsf{rist}\, v$ і для довільного скінченного слова w над алфавітом X виконуються рівності $g(vaw) = vbw$ та $g(vbw) = vaw$.

Для кожного натурального i визначимо дію групи $C_2^{(i)}$ порядку 2 на дереві T_X таким чином. Нетривіальний елемент g з $C_2^{(i)}$ визначається як нетривіальна підстановка у вершині $\underbrace{aa\cdots a}_{i}b$.

Нехай

$$C = \prod_{i\geqslant 1} C_2^{(i)}.$$

Тоді C є підгрупою жорсткого стабілізатора $\mathsf{rist}\, a$.

Група C має мінімальну систему твірних (базис Гамеля) як лінійний простір над полем з двох елементів.

Нехай також

$$R = (\mathsf{rist}\, b)'.$$

Зауважимо, що так визначена група R ізоморфна комутанту всієї групи $\mathrm{Aut}\, T_X$.

Визначимо ще два елементи з $\mathrm{Aut}\, T_X$: σ — нетривіальнапідстановка у кореневій вершині Λ та $\sigma_0 = (\sigma, 1)$ — нетривіальна підстановка у вершині a.

Нехай I — множина індексів, $1 \in I$, $B = \{c_i \mid i \in I\}$ — мінімальна система твірних C, причому c_1 — це нетривіальна підстановка у вершині ab, а решта твірних належать стабілізатору третього рівня.

Зафіксуємо бієкцію $\phi\colon I \to R$ і визначимо множину елементів з $\mathrm{Aut}\, T_X$:

$$H = \{c_i\phi(i)\colon i \in I\}.$$

Теорема 1. *Множина*

$$H \bigcup \{\sigma, \sigma_0\}$$

є мінімальною системою твірних групи $\mathrm{Aut}\, T_X$.

1. *Чакани К., Гечек Ф.* О группе автоматных преобразований // Кибернетика. – 1965. – № 5. – С. 14–17.

2. *Алешин С.* Об отсутствии базиса в определенных классах инициальных автоматов // Пробл. кибернетики. – 1970. – **22**. – С. 67–74.
3. *Dömösi P.* On the semigroup of automaton mappings with finite alphabet // Acta cybernetica. – 1972. – **1**. – P. 251–254.
4. *Dömösi P.* Some of my favourite unsolved problems // Unsolved problems on mathematics for the 21st century. – Amsterdam: IOS Press; Tokyo: Ohmsha, 2001. – P. 159–168.
5. *Oliynyk A.* Finite state wreath powers of transformation semigroups // Semigroup Forum. – 2011. – **82**. – P. 423–436.
6. *Bhattacharjee M.* The probability of generating certain profinite groups by two elements // Isr. J. Math. – 1994. – **86**, No 1–3. – P. 311–329.
7. *Quick M.* Probabilistic generation of wreath products of non-Abelian finite simple groups // Commun. Algebra. – 2004. – **32**, No 12. – P. 4753–4768.
8. *Bondarenko I. V.* Finite generation of iterated wreath products // Arch. Math. – 2010. – **95**, No 4. – P. 301–308.
9. *Lucchini A.* Profinite groups with nonabelian crowns of bounded rank and their probabilistic zeta function // Isr. J. Math. – 2011. – **181**. – P. 53–64.
10. *Grigorchuk R. I.* Just infinite branch groups // New Horizons in pro-p Groups / Ed. by A. Shalev, M. P. F. du Sautoy, D. Segal. – Basel: Birkhäuser, 2000. – P. 121–179.

Київський національний університет
ім. Тараса Шевченка

Надійшло до редакції 01.07.2011

Я. В. Лавренюк

О минимальной системе образующих в группе автоморфизмов бинарного корневого дерева

Доказано существование минимальной системы образующих в группе всех автоморфизмов бинарного корневого дерева.

Ya. V. Lavrenyuk

On the minimal system of generatrices in the full automorphism group of a binary rooted tree

The existence of a basis in the full automorphism group of a binary rooted tree is proved.