

Академик НАН Украины **В. П. Шевченко, Е. В. Алтухов,
М. В. Фоменко**

Деформация трехслойных пластин со скользящей заделкой торцов и несовершенным контактом слоев

В трехмерной постановке рассмотрена задача упругого равновесия трехслойной изотропной пластины симметричного строения. На лицевых плоскостях пластины выполняются условия плоского торца, а на границе раздела слоев имеет место скользящий контакт. Получены однородные решения уравнений равновесия в перемещениях в виде суммы бигармонического, вихревого и потенциального состояний. Выполнены аналитические и численные исследования трансцендентных уравнений для нахождения собственных значений. Исследован характер проявления краевого эффекта.

Анализ теорий поперечно-неоднородных упругих пластин и методов решения конкретных задач отражен в работах [1–5]. В них отмечается актуальность развития аналитических методов исследования напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций на основе уравнений пространственной теории упругости. Для трехслойных пластин важную роль сыграли однородные решения [5–9], предложенные А. И. Лурье [10]. В работе [7] рассмотрен случай идеального контакта слоев пластины.

В данной работе получены и исследованы однородные решения уравнений упругого равновесия трехслойной пластины при скользящей заделке торцов и неидеальном контакте слоев.

Постановка задачи. Рассмотрим трехслойную пластину симметричного строения относительно ее срединной плоскости со слоями из изотропных материалов и находящимися друг с другом в условиях скользящего контакта. На лицевых гранях пластины имеют место смешанные граничные условия типа плоского торца. На боковой поверхности действуют внешние усилия.

Построение однородных решений задачи об упругом равновесии рассматриваемой пластины сводится к интегрированию известных уравнений [4] для каждого слоя

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} \partial_3^2 u_{mj} + D^2 u_{mj} + \nu_{m0} \partial_j \theta_m &= 0 \quad (j = 1, 2), \\ \frac{1}{\lambda^2} \partial_3^2 u_{m3} + D^2 u_{m3} + \frac{1}{\lambda} \nu_{m0} \partial_3 \theta_m &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с учетом граничных условий

$$\begin{aligned} \sigma_{1j3}(x_1, x_2, \pm 1) &= 0, \quad u_{13}(x_1, x_2, \pm 1) = 0, \\ u_{13}(x_1, x_2, \pm \lambda_2) &= u_{23}(x_1, x_2, \pm \lambda_2), \quad \sigma_{133}(x_1, x_2, \pm \lambda_2) = \sigma_{233}(x_1, x_2, \pm \lambda_2), \\ \sigma_{1j3}(x_1, x_2, \pm \lambda_2) &= 0, \quad \sigma_{2j3}(x_1, x_2, \pm \lambda_2) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \theta_m = \partial_1 u_{m1} + \partial_2 u_{m2} + \lambda^{-1} \partial_3 u_{m3}, \quad \nu_{m0} = \frac{1}{1 - 2\nu_m}.$$

Другие обозначения здесь и ниже соответствуют принятым в работе [7].

Построение однородных решений. Однородные решения задачи (1), (2) для симметричной (обозначаемой значком “+” вверху) и кососимметричной (обозначаемой значком “-”) деформаций можно представить в виде суммы вихревого, потенциального и бигармонического состояний:

$$u_{mi}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) = u_{miV}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) + u_{miP}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) + u_{miB}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) \quad (i = \overline{1, 3}; m = 1, 2).$$

Перемещения вихревого состояния имеют вид

$$u_{m1V}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{mk}^{\pm}(x_3) \partial_2 B_k^{\pm}(x_1, x_2),$$

$$u_{m2V}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) = - \sum_{k=1}^{\infty} p_{mk}^{\pm}(x_3) \partial_1 B_k^{\pm}(x_1, x_2), \quad u_{m3V}^{\pm} = 0.$$

Здесь

$$p_{1k}^{\pm}(x_3) = \cos \delta_k^{\pm}(x_3 - \lambda_2), \quad p_{2k}^{\pm}(x_3) = 0, \quad \text{когда} \quad \delta_k^{\pm} \lambda_1 = \pi k;$$

$$p_{1k}^{+}(x_3) = 0, \quad p_{2k}^{+}(x_3) = \cos \delta_k^{+} x_3 \quad \text{при} \quad \delta_k^{+} \lambda_2 = \pi k;$$

$$p_{1k}^{-}(x_3) = 0, \quad p_{2k}^{-}(x_3) = \frac{1}{\delta_k^{-}} \sin \delta_k^{-} x_3 \quad \text{в случае} \quad \delta_k^{-} \lambda_2 = \frac{2k-1}{2} \pi;$$

$$D^2 B_k^{\pm}(x_1, x_2) - \left(\frac{\delta_k^{\pm}}{\lambda} \right)^2 B_k^{\pm}(x_1, x_2) = 0.$$

Компоненты вектора перемещений потенциального состояния определяются соотношениями

$$u_{mjP}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} n_{mp}^{\pm}(x_3) \partial_j C_p^{\pm}(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2),$$

$$u_{m3P}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} q_{mp}^{\pm}(x_3) C_p^{\pm}(x_1, x_2).$$

Здесь

$$D^2 C^{\pm}(x_1, x_2) - \left(\frac{\gamma^{\pm}}{\lambda} \right)^2 C^{\pm}(x_1, x_2) = 0;$$

$$n_1^{\pm}(x_3) = H_1^{\pm} \cos \gamma^{\pm}(x_3 - \lambda_2) + H_2^{\pm} \sin \gamma^{\pm}(x_3 - \lambda_2) + H_3^{\pm}(x_3 - \lambda_2) \cos \gamma^{\pm}(x_3 - \lambda_2) + H_4^{\pm}(x_3 - \lambda_2) \sin \gamma^{\pm}(x_3 - \lambda_2);$$

$$q_1^{\pm}(x_3) = Q_1^{\pm} \sin \gamma^{\pm}(x_3 - \lambda_2) + Q_2^{\pm} \cos \gamma^{\pm}(x_3 - \lambda_2) + Q_3^{\pm}((x_3 - \lambda_2) \sin \gamma^{\pm}(x_3 - \lambda_2) + k_{13}^{\pm} \cos \gamma^{\pm}(x_3 - \lambda_2)) + Q_4^{\pm}((x_3 - \lambda_2) \cos \gamma^{\pm}(x_3 - \lambda_2) - k_{13}^{\pm} \sin \gamma^{\pm}(x_3 - \lambda_2));$$

$$n_2^{+}(x_3) = H_5^{+} \cos \gamma^{+} x_3 + H_6^{+} x_3 \sin \gamma^{+} x_3;$$

$$q_2^{+}(x_3) = Q_5^{+} \sin \gamma^{+} x_3 + Q_6^{+}(x_3 \cos \gamma^{+} x_3 - k_{23}^{+} \sin \gamma^{+} x_3);$$

$$\begin{aligned}
n_2^-(x_3) &= H_5^- \sin \gamma^- x_3 + H_6^- x_3 \cos \gamma^- x_3; \\
q_2^-(x_3) &= Q_5^- \cos \gamma^- x_3 + Q_6^- (x_3 \sin \gamma^- x_3 + k_{23}^- \cos \gamma^- x_3); \\
k_{m3}^\pm &= \frac{3 - 4\nu_m}{\gamma^\pm}; \quad Q_i^\pm = \frac{1}{\lambda} a_i^\pm H_i^\pm \quad (i = \overline{1, 6}); \\
a_1^\pm &= a_3^\pm = -\gamma^\pm, \quad a_2^\pm = a_4^\pm = \gamma^\pm, \quad a_5^\pm = \mp \gamma^\pm, \quad a_6^\pm = \pm \gamma^\pm; \\
H_1^\pm &= (1 - \nu_2)((1 - 2\nu_1) \sin 2\gamma^\pm \lambda_1 - 2\gamma^\pm \lambda_1)(1 \mp \cos 2\gamma^\pm \lambda_2); \\
H_2^\pm &= 2(1 - 2\nu_1)(1 - \nu_2) \sin^2 \gamma^\pm \lambda_1 (1 \mp \cos 2\gamma^\pm \lambda_2); \\
H_3^\pm &= 2(1 - \nu_2) \gamma^\pm \sin^2 \gamma^\pm \lambda_1 (1 \mp \cos 2\gamma^\pm \lambda_2); \\
H_4^\pm &= -(1 - \nu_2) \gamma^\pm \sin 2\gamma^\pm \lambda_1 (1 \mp \cos 2\gamma^\pm \lambda_2); \\
H_5^\pm &= \mp 4(1 - \nu_1) \sin^2 \gamma^\pm \lambda_1 \left((1 - 2\nu_2) \frac{\sin}{\cos} \gamma^\pm \lambda_2 \mp \gamma^\pm \lambda_2 \frac{\cos}{\sin} \gamma^\pm \lambda_2 \right); \\
H_6^\pm &= 4(1 - \nu_1) \gamma^\pm \sin^2 \gamma^\pm \lambda_1 \frac{\sin}{\cos} \gamma^\pm \lambda_2.
\end{aligned}$$

Отметим, что собственные значения γ^\pm удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned}
F^\pm(\gamma) &= 2(1 - \nu_1) \sin^2 \gamma^\pm \lambda_1 \sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm \\
&\pm G(1 - \nu_2)(\sin 2\gamma^\pm \lambda_1 + 2\gamma^\pm \lambda_1)(1 \mp \cos 2\gamma^\pm \lambda_2) = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Все корни уравнений (3) являются действительными или комплексными, расположенными симметрично в четырех квадрантах плоскости. Рассмотрим некоторые частные случаи трансцендентных уравнений (3).

Если $G = 0$ (внешние слои — абсолютно мягкие), то корни уравнений (3) асимптотически приближаются к множеству корней уравнений

$$\sin^2 \gamma^\pm \lambda_1 (\sin 2\gamma^\pm \lambda_2 \pm 2\gamma^\pm \lambda_2) = 0.$$

Когда $G = \infty$ (внутренний слой — абсолютно мягкий), то множество собственных значений γ^\pm трансформируется к совокупности корней уравнений

$$(\sin 2\gamma^\pm \lambda_1 + 2\gamma^\pm \lambda_1)(1 \mp \cos 2\gamma^\pm \lambda_2) = 0.$$

В случае $\lambda_1 = 0$ дисперсионные уравнения (3) сводятся к следующим:

$$\sin^2 \gamma^+ = 0, \quad \cos^2 \gamma^- = 0.$$

При $\lambda_2 = 0$ из уравнений (3) следует

$$\sin^2 \gamma^+ = 0, \quad \sin 2\gamma^- + 2\gamma^- = 0.$$

Для $G = 1$, $\nu_1 = \nu_2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ уравнения (3) принимают вид

$$(\sin \gamma^+ + \gamma^+) \sin^2 \frac{\gamma^+}{2} = 0, \quad \sin 2\gamma^- + 2\gamma^- = 0.$$

Перемещения бигармонического состояния имеют вид

$$\begin{aligned}
 u_{11B}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1(\Phi^{\pm} + \Phi_C^{\pm} + a_2^{\pm}(x_3 - 1)^2 D^2 \Phi^{\pm}), \\
 u_{12B}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2(\Phi^{\pm} - \Phi_C^{\pm} + a_2^{\pm}(x_3 - 1)^2 D^2 \Phi^{\pm}), \quad u_{13B}^{\pm}(x_1, x_2, x_3) = a_1^{\pm}(x_3 - 1) D^2 \Phi^{\pm}, \\
 u_{21B}^+(x_1, x_2, x_3) &= \partial_1(e_0^+ \Phi^+ + \Phi_C^+ + e_2^+ x_3^2 D^2 \Phi^+), \quad u_{21B}^-(x_1, x_2, x_3) = \partial_1(e_1^- x_3 D^2 \Phi^-), \\
 u_{22B}^+(x_1, x_2, x_3) &= \partial_2(e_0^+ \Phi^+ - \Phi_C^+ + e_2^+ x_3^2 D^2 \Phi^+), \quad u_{22B}^-(x_1, x_2, x_3) = \partial_2(e_1^- x_3 D^2 \Phi^-), \\
 u_{23B}^+(x_1, x_2, x_3) &= e_1^+ x_3 D^2 \Phi^+, \quad u_{23B}^-(x_1, x_2, x_3) = e_0^- D^2 \Phi^-.
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 D^2 D^2 \Phi^{\pm}(x_1, x_2) &= 0; \quad e_0^+ = \frac{(\lambda_1 \nu_1 \nu_2 + \lambda_2) G + \lambda_1 (1 - \nu_1) (1 + \nu_2)}{\Delta}; \\
 e_1^+ &= -\lambda \lambda_1 \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad e_2^+ = \frac{\lambda^2 \lambda_1}{2} \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad a_1^+ = \lambda \lambda_2 \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad a_2^+ = -\frac{\lambda^2 \lambda_2}{2} \frac{\Delta_1}{\Delta}; \\
 \Delta_1 &= \nu_1 (1 - \nu_2) G - \nu_2 (1 - \nu_1), \quad \Delta = \lambda_2 (1 + \nu_1) (1 - \nu_2) G + \lambda_2 \nu_1 \nu_2 + \lambda_1; \\
 e_0^- &= -\lambda \lambda_1 \frac{\nu_1}{1 + \nu_1}, \quad e_1^- = \lambda^2 \lambda_1 \frac{\nu_1}{1 + \nu_1}, \quad a_1^- = \lambda \frac{\nu_1}{1 + \nu_1}, \quad a_2^- = -\frac{\lambda^2}{2} \frac{\nu_1}{1 + \nu_1}.
 \end{aligned}$$

Гармонические функции $\Phi_C^{\pm}(x_1, x_2)$ связаны с бигармоническими $\Phi^{\pm}(x_1, x_2)$ соотношением

$$\partial_2^2 \Phi_C^{\pm} = -\partial_1^2 \Phi_C^{\pm} = a_0^{\pm} D^2 \Phi^{\pm},$$

в котором

$$a_0^+ = \frac{\lambda_2 (1 - \nu_2) G + \lambda_1 (1 - \nu_1)}{\Delta}, \quad a_0^- = \frac{1}{1 + \nu_1}.$$

Анализ результатов исследований трансцендентных уравнений. Для численного нахождения комплексных корней характеристических уравнений (3) был использован принцип аргумента в сочетании с итерационным методом Ньютона и контурным численным интегрированием.

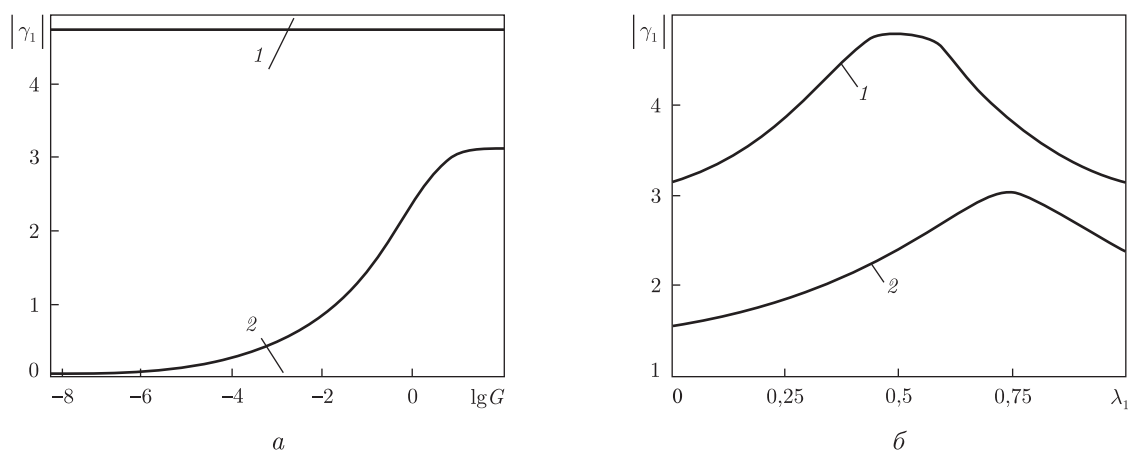
В табл. 1 при различных относительных жесткостях G и для $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, $\lambda_1 = 0,1$ приведены значения первых пяти корней γ_p^{\pm} уравнений (3) из первого квадранта комплексной плоскости. Ячейки таблицы содержат два значения: в числителе — собственные значения при симметричной деформации, а в знаменателе — при кососимметричной.

На рис. 1 приведены графики изменения модуля первого собственного значения γ_1^{\pm} уравнений (3) в зависимости от относительной жесткости G при $\lambda_1 = 0,5$ (рис. 1, а) и относительной толщины внешних слоев λ_1 при $G = 1$ (рис. 1, б). Значения коэффициентов Пуассона ν_1 , ν_2 принимались равными 0,3. Кривые 1 соответствуют симметричной задаче, кривые 2 — кососимметричной.

Уравнения (3) не имеют мнимых корней, поэтому потенциальное состояние представляет собой решение типа погранслоя, и характер проникания его внутрь области определяется первым по модулю корнем γ_1^{\pm} . При этом на интервале $G \in (0; \infty)$ величины γ_1^{\pm} являются комплексными. Для различных жесткостей слоев величина γ_1^+ является первым корнем

Таблиця 1

p	$G = 1,2$		$G = 2$		$G = 10$	
	$\text{Re } \gamma_p^\pm$	$\text{Im } \gamma_p^\pm$	$\text{Re } \gamma_p^\pm$	$\text{Im } \gamma_p^\pm$	$\text{Re } \gamma_p^\pm$	$\text{Im } \gamma_p^\pm$
1	3,2986550	0,6511617	3,3656792	0,5308196	3,4625671	0,2549146
	1,6387903	0,3375179	1,6782295	0,2722138	1,7310300	0,1282909
2	6,6870923	1,1564473	6,7780742	0,9739256	6,9291189	0,4966435
	4,9836930	0,9251128	5,0660329	0,7660662	5,1951009	0,3782366
3	10,126354	1,5124667	10,228531	1,3105504	10,403985	0,7117064
	8,4023289	1,3500764	8,4993655	1,1547254	8,6651721	0,6084501
4	13,602394	1,7632317	13,713506	1,5539416	13,894330	0,8815033
	11,859013	1,6489835	11,965885	1,4433662	12,146579	0,8038923
5	17,141195	1,9274459	17,256314	1,6992836	17,411069	0,9714106
	15,360803	1,8566744	15,475231	1,6409098	15,648802	0,9395790

Рис. 1. Зависимость модуля первого собственного значения γ_1^\pm от параметров G , λ_1

уравнения $\sin \gamma + \gamma = 0$, и модуль ее значения $|\gamma_1^+| \approx 4,78$, а значение $|\gamma_1^-| < \pi$. При $G \rightarrow \infty$ величина γ_1^- стремится к π , а при $G \rightarrow 0$ — к нулю. Следовательно, в трехслойной пластине с более жестким наполнителем потенциальное решение проникает внутрь области сильнее, чем в пластине со слабым средним слоем. Чем жестче наполнитель, тем характер проникания сильнее.

Изменение $|\gamma_1^\pm|$ в зависимости от λ_1 носит более сложный характер (см. рис. 1, б). Величины γ_1^\pm на всем интервале изменения $\lambda_1 \in (0; 1)$ также остаются комплексными. В случае симметричной деформации (кривая 1) промежуток $(0; 1)$ изменения параметра λ_1 условно разбивается на два интервала $(0; 0,5)$, $(0,5; 1)$ в зависимости от характера поведения модуля первого собственного значения. В окрестности точки $\lambda_1 = 0,5$ величина $|\gamma_1^+|$ достигает наибольшего значения, приблизительно равного 4,78, и потенциальное решение проникает внутрь области слабее. В точках $\lambda_1 = 0$ или $\lambda_1 = 1$ величина $\gamma_1^+ = \pi$, и характер проникания потенциального решения внутрь области наиболее сильный. В случае кососимметричной деформации (кривая 2) величина γ_1^- на интервале $\lambda_1 \in (0; 1)$ изменяется от $\pi/2$ (при $\lambda_1 = 0$) до $\approx 3,02$ (при $\lambda_1 \approx 0,76$), а в точке $\lambda_1 = 1$ значение $|\gamma_1^-| \approx 2,39$.

1. *Attenbach H.* Theories for laminated and sandwich plates. A review // *Mech. of Composite Mater.* – 1998. – **34**, No 3. – P. 243–252.

2. *Carrera E.* Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells // *Appl. Mech. Rev.* – 2003. – **56**, No 3. – P. 287–308.
3. *Пискунов В. Г., Рассказов А. О.* Развитие теории слоистых пластин и оболочек // *Прикл. механика.* – 2002. – **38**, № 2. – С. 22–56.
4. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. – Киев.: Наук. думка, 1978. – 240 с.
5. *Устинов Ю. А.* Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов-на-Дону: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
6. *Алтухов Е. В., Кулиш И. Е.* Равновесие трехслойной пластины с жесткими торцами // *Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничі науки.* – 2001. – № 1. – С. 314–321.
7. *Алтухов Е. В., Фоменко М. В.* Деформация трехслойных пластин в случае смешанных граничных условий на торцах // *Теорет. и прикл. механика.* – 2011. – № 2(48). – С. 29–39.
8. *Алтухов Е. В., Фоменко М. В.* Упругое равновесие трехслойной пластины с покрытыми диафрагмой плоскими гранями // *Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки.* – 2011. – № 1. – С. 19–26.
9. *Ворович И. И., Кадомцев И. Г.* Качественное исследование напряженно-деформированного состояния трехслойной плиты // *Прикл. математика и механика.* – 1970. – **34**, № 5. – С. 870–876.
10. *Лурье А. И.* К теории толстых плит // *Там же.* – 1942. – **6**, № 2–3. – С. 151–168.

Донецкий национальный университет

Поступило в редакцию 27.12.2011

Академік НАН України **В. П. Шевченко, Є. В. Алтухов, М. В. Фоменко**

Деформація тришарових пластин з ковзним закріпленням торців і недосконалим контактом шарів

У тривимірній постановці розглянуто задачу пружної рівноваги тришарової ізотропної пластини симетричної будови. На лицьових площинах пластини виконуються умови плоского торця, а на межі поділу шарів має місце ковзний контакт. Одержано однорідні розв'язки рівнянь рівноваги в переміщеннях у вигляді суми бігармонічного, вихрового і потенціального станів. Здійснено аналітичні та чисельні дослідження трансцендентних рівнянь для знаходження власних значень. Досліджено характер прояву крайового ефекту.

Academician of the NAS of Ukraine **V. P. Shevchenko, E. V. Altukhov, M. V. Fomenko**

Deformation of three-layer plates with the sliding clamping of ends and the incomplete contact of layers

In the three-dimensional statement, the problem of elastic equilibrium of a three-layer isotropic plate of symmetric structure is considered. The conditions of flat end hold at the plate faces, and the sliding contact is satisfied on the interface of layers. The homogeneous solutions of the system of equations of equilibrium in displacements are obtained as a sum of biharmonic, vortex, and potential states. The analytical and computational researches of the transcendental equations for the eigenvalues are carried out. The nature of a manifestation of the edge effect is studied.