ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2012

ФІЗИКА

УДК 538.9:539.215

О. І. Герасимов, Н. Вандеваллє

Щодо точних розв'язків задачі про перенесення імпульсу у неоднорідному гранульованому ланцюжку

(Представлено академіком НАН України А. Г. Загороднім)

Знайдено нові точні розв'язки функціонально-диференціального рівняння, яке описує перенос механічного збурення в одновимірному вертикальному гранульованому ланцюжку із нелінійними контактами. Лінеаризоване у наближенні слабкої неоднорідності рівняння руху імпульсу відноситься до класу функціонально-диференціальних і, як показано в роботі, у всіх внутрішніх точках системи із лінійними взаємодіями має точний розв'язок у вигляді циліндричних функцій Бесселя першого роду. Показано, що у суцільних границях рівняння задовольняє солітоноподібний розв'язок. Знайдені класи точних розв'язків доповнюють відомі результати про динаміку збурень у гранульованих ланцюжках та можуть бути корисними для задач параметризації експериментальних даних з вивчення динаміки переносу механічних збуджень у низьковимірних гранульованих системах.

Поширення хвиль у нелінійних системах вивчається протягом тривалого часу і результати досліджень детально висвітлені у численних літературних джерелах (див., наприклад, [1, 2]). Останнім часом інтерес до дослідження руху хвиль у дискретних мікромеханічних системах зростає у зв'язку з новими результатами, отриманими в експериментах з гранульованими ланцюжками. В серії робіт рух імпульсу у таких системах вивчався експериментально, чисельно і теоретично [3–10]. Так, наприклад, у [5] методом чисельного моделювання показано, що динаміка хвильового руху імпульсу, який рухається вздовж гранульованого ланцюжка з нелінійними контактами у зовнішньому гравітаційному полі описується розв'язками типу дисперсійних хвиль (нормальні моди).

Існування розв'язків несолітонного типу, істотно доповнює відомі нелінійні хвильові механізми передачі енергії [5, 11]. В нашій роботі у наближенні слабкої неоднорідності знайдено нові (порівняно з раніше відомими) класи точних розв'язків рівняння руху механічного імпульсу у вертикальному гранульованому ланцюжку, які, зокрема, визначаються в термінах функцій Бесселя першого роду, а також, у суцільній границі, функціями солітоноподібного типу. Знайдені типи розв'язків відкривають перспективи відповідних нових експериментів з оптимізації передачі енергії (імпульсу) в дискретних слабонелінійних, низьковимірних гранульованих системах.

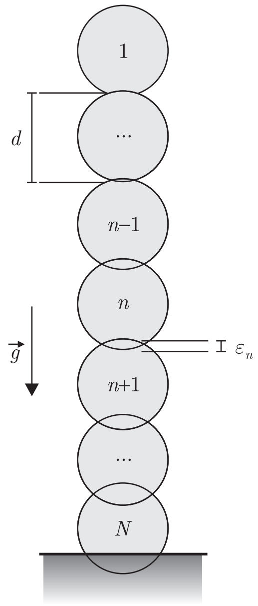

Рис. 1. Вертикальний гранульований ланцюжок у гравітаційному полі

Функціонально-диференціальне рівняння руху і його розв'язок. Розглянемо рівняння руху для функції зміщення n-ї частинки z_n, яке відповідає поширенню імпульсу у вертикальному гранульованому ланцюжку, схематично зображеному на рис. 1,

$$\frac{d^2 z_n}{dt^2} = \gamma\{[d-(z_n - z_{n-1})]^{\delta} - [d-(z_{n+1}-z_n)]^{\delta}\} + g, \tag{1}$$

де $\gamma = C/m$; m — маса окремої частинки-гранули; d — діаметр недеформованої частинки; $C = E\sqrt{d}/(3(1-\nu^2))$ — силова константа; E — модуль Юнга; ν — константа Пуассона [12]. Параметр нелінійності контакту δ може набувати різних значень. Наприклад, у разі міжчастинкових контактів герцевського типу він дорівнює $\delta = 3/2$.

Нехтуючи роллю, яку відіграють дисипативні ефекти (вони можуть бути значними при збільшенні інтенсивності збурень), зауважимо, що нелінійна взаємна деформація контактуючих частинок для ланцюжка, розташованого горизонтально, може вважатися однаковою для будь-якої пари сусідніх частинок. Навпаки, у разі вертикально розташованого ланцюжка (завдяки впливу гравітаційного поля) вона має залежати від положення (номера) контакту.

Введемо нову змінну φ_n за таким правилом:

$$\varphi_n = z_n - \left[nd - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\right], \tag{2}$$

де ε_k — геометричний фактор, який залежить від параметрів, що характеризують перекриття пари сусідніх частинок.

Якщо вибрати умову рівноваги у найпростішому вигляді

$$gk = \gamma\varepsilon_k^{\delta}. \tag{3}$$

то, враховуючи (3), (4), а також використовуючи припущення слабкої неоднорідності у вигляді

$$|\varphi_{k+1} - \varphi_k| < \varepsilon_k, \tag{4}$$

керуюче рівняння (1) можна наближено подати у формі

$$\frac{d^2\varphi_n}{d\tau^2} = \kappa_{n+1}(\varphi_{n+1} - \varphi_n) - \kappa_n(\varphi_n - \varphi_{n-1}), \tag{5}$$

де $\tau = t\sqrt{\kappa_n}(\gamma/g)^{1/2\delta}$, $\kappa_n = n^{1-1/\delta}$ може бути інтерпретована як перенормована силова стала, яка внаслідок гравітаційної прекомпресії ланцюжка залежить від номера контакту (частинки).

Зауважимо, що зроблене припущення про слабку неоднорідність системи (4) зводить природно неоднорідне (внаслідок присутності гравітації) рівняння руху до однорідної форми, яка є притаманною горизонтальній задачі, але із силовими сталими, що залежать від номера частинки (контакту).

Перепишемо рівняння (5) у такій формі:

$$\frac{d^2\varphi_n}{dT^2} = \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}\varphi_{n+1} - \left[1 + \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}\right]\varphi_n + \varphi_{n-1}, \tag{6}$$

де $T = t$. Звернемо увагу на те, що в рівнянні (6) коефіцієнти при φ_n і φ_{n+1} вже для $n \geqslant 3$ менш ніж на 10 відсотків відрізняються від двійки і одиниці, відповідно. Зважаючи на цю обставину і спрощуючи (6) з вищезгаданою мірою точності, отримуємо

$$\frac{d^2\varphi_n}{dT^2} = \varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}. \tag{7}$$

Функціонально-диференціальне рівняння (7), яке у випадку однорідного ланцюжка має точний розв'язок у вигляді [14]

$$\varphi_n(\tau) = CJ_{2n}(2\tau), \tag{8}$$

який є справедливим для будь-якої внутрішньої точки, крім граничних, що обмежують систему. Тут C — є стала значення якої визначається граничними умовами, $J_{2n}(2T)$ — функція Бесселя першого роду з цілими індексами.

Повертаючись до початкових змінних, розв'язок (8) можна переписати так:

$$\varphi_n(t) = CJ_{2n}\left(2\sqrt{g\delta}\left(\frac{\gamma}{g}\right)^{1/2\delta} t\right). \tag{9}$$

Рівняння (9) дозволяє вивчати вплив параметрів системи на динаміку імпульсів (в межах зроблених припущень) і відіграє роль матеріального співвідношення.

Користуючись отриманими розв'язками, неважко також знайти розв'язок рівняння (7) неоднорідного ланцюжка, а також встановити рівняння для визначення швидкості.

В асимптотичних границях розв'язок (8) поводиться у відповідності з такими апроксимаціями [14]:

$$\varphi_n(T) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2n)!}(T)^{2n}, & 0 < \sqrt{2}T < \sqrt{n + \dfrac{1}{2}}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi T}} \cos\left(2T - \pi n - \dfrac{\pi}{4}\right), & 2T \gg 4n^2 - \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\pi n}} \left(\dfrac{eT}{2n}\right)^{2n}, & n \gg \dfrac{T}{\sqrt{2}}. \end{cases} \tag{10}$$

Розв'язок стаціонарної форми рівняння (7)

$$\varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1} = 0 \tag{11}$$

належить до класу періодичних функцій

$$\varphi_n = A \sin \pi n. \tag{12}$$

Відповідний потенціал задачі $U_n(\varphi_n)$, як функція φ_n, має бути введено за допомогою співвідношення:

$$-\frac{\partial U_n}{\partial \varphi_n} = \varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}. \tag{13}$$

Отримані результати можуть бути корисними для інтерпретації фізичних експериментів з вивчення переносу енергії механічних збуджень в одновимірній гранульованій системі з параметрами, наближеними до умов розглянутої задачі.

Рух імпульсу збурення у континуальній границі. У випадку ланцюжків достатньої довжини проходження імпульсу крізь систему може бути досить адекватно описано у континуальному наближенні. Повернемося до рівняння (5). Приймаючи $n \to h$; $\kappa_n \to \kappa(h^{1-1/\delta})$; $\kappa_{n+1} \to \kappa((h + \delta h)^{1-1/\delta})$; $\varphi_n \to \varphi(h)$; $\varphi_{n+1} \to \varphi(h + \delta h)$, після нескладних маніпуляцій отримуємо континуальну форму керуючого рівняння

$$\frac{d^2\varphi}{d\widetilde{t}^2} = \frac{\partial}{\partial h} \kappa(h) \frac{\partial \varphi}{\partial h}, \tag{14}$$

де h — глибина системи (аналог номера частинки); $\widetilde{t} = aT$ — безвимірний час. Як відомо, лінійне рівняння (14) має розв'язок у вигляді дисперсійної хвилі, який детально проаналізовано в [5]. Звернемо також увагу на те, що функції

$$\varphi(\widetilde{t}) = A\widetilde{t} + B, \qquad \varphi(h) = -\delta B + e^{A/\delta}|h|^{1/\delta} \tag{15}$$

є точними розв'язками рівняння (14), які залежать лише від $\widetilde{t}$ або лише від h (тут A та B — відповідні сталі). Вкажемо тепер, що рівняння (14) (крім вище визначених) має ще один точний розв'язок, який дається співвідношенням [15]

$$\varphi(h, \widetilde{t}) = c_1 + c_2 \left[k(\widetilde{t} + c_3)^2 - k \left(\frac{2}{\eta}\right)^2 h^\eta \right]^{-\xi/2\eta}, \tag{16}$$

де c_1, c_2 та c_3 — константи; $\xi = 1 - 1/\delta$ та $\eta = 1 + 1/\delta$, $k = \pm 1$. Для випадку системи з герцевськими контактами маємо $\xi = 1/3$ та $\eta = 5/3$. Розв'язок (16) можна інтерпретувати як специфічну солітоноподібну хвилю. Внаслідок того, що швидкість $v = d\varphi/d\widetilde{t}$, співвідношення для швидкості за допомогою (16) може бути знайдено тривіально. Також може бути визначений відповідний потенціал, який задовольняє співвідношення $-\partial U/\partial\varphi = \partial/\partial h[\kappa(h)\partial\varphi/\partial h]$. Аналіз одержаних результатів, у застосуванні до визначення кінетичної ($E_k = \dot{\varphi}^2/2$) або повної ($E = E_k + U$) енергії системи, показує, що вони обидві не задовольняють закон рівнорозподілу. Як наслідок не відбувається внутрішньої термалізації системи.

На практиці існує інерційний зсув фаз, який розділяє за фазою швидкість сигналу та швидкість гранул. Внаслідок того, що система не є термалізованою, можна очікувати, що під час поширення імпульсу вздовж системи одна або декілька частинок можуть втрачати контакти з рештою системи та переходити до стану балістичного руху у проміжках між послідовними зіткненнями з сусідніми гранулами. За спеціальних умов нерівномірний розподіл енергії може призвести до розподілу системи на підсистеми, в яких гранули, зокрема, можуть перебувати у стані балістичного руху у полі тяжіння. Саме такі стани спостерігалися в експериментах із гранульованими ланцюжками [7].

Асимптотично вищезгаданий сценарій термалізації у моделі з нерівномірним розподілом енергії може призвести до формування станів з мінімальним значенням повної енергії. Дослідження таких квазістаціонарних станів та поведінка системи в їх околі є важливим напрямком як теоретичних, так і експериментальних досліджень.

Таким чином, в роботі знайдено клас точних розв'язків лінеарізованого рівняння руху для механічного імпульсу у вертикальному гранульованому ланцюжку. Керуюче рівняння, яке після лінеаризації набуває однорідної форми з перенормованими силовими сталими, що, у свою чергу, залежать від номера контакту, відноситься до класу функціонально-диференціальних і інтегрується точно. Відповідний розв'язок знайдено в класі циліндричних функцій Бесселя першого роду. Він є справедливим у будь-якій внутрішній точці системи. Довільним граничним умовам відповідає відповідна лінійна комбінація отриманих розв'язків.

У розглянутій моделі спостерігається скейлінг. У континуальній границі розглянутої задачі також знайдено новий точний розв'язок у вигляді солітоноподібної хвилі. Отримані результати істотно доповнюють клас відомих точних розв'язків у вигляді дисперсійних хвиль та солітонів. Після їх експериментальної перевірки вони можуть сприяти розробці адекватних моделей для параметризації процесів переносу енергії (імпульсу) в низьковимірних, слабонеоднорідних, мікромеханічних системах, прикладом яких, зокрема, виступають гранульовані ланцюжки.

Автори щиро вдячні акад. НАН України А. Г. Загородньому за інтерес до роботи та стимулюючі обговорення отриманих результатів, Фонду фундаментальних досліджень Бельгії та науковому дивізіону НАТО — за підтримку, а також університету м. Льєж, де виконувалася робота, — за гостинність.

1. *Bhatnagar P. L.* Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems. – The Clarendon Press; Oxford University Press: New York, 1979. – 142 p.
2. *Jackson E. A.* Perspectives of nonlinear dynamics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. – 632 p.
3. *Nesterenko V. F.* Dynamics of heterogeneous materials. – New York: Springer, 2001. – 510 p.
4. *Coste C., Falcon E., Fauve S.* Solitary waves in a chain of beads under Hertz contact // Phys. Rev. E. – 1997. – **56**. – P. 6104–6117.
5. *Sen S., Hong J., Bang J. et al.* Solitary waves in the granular chain // Phys. Rep. – 2008. – **462**. – P. 21–66.
6. *Somfai E., Roux J.-N., Snoeijer J. H. et al.* Elastic wave propagation in confined granular systems // Phys. Rev. E. – 2005. – **72**. – 021301, 18 p.

7. *Герасимов О. I., Вандевалле Н., Співак А. Я. та ін.* Стаціонарні стани у 1D системі непружних частинок // Укр. фіз. журн. – 2008. – **53**, № 11. – С. 1129–1137.
8. *Hinch E. J., Saint-Jean S.* The fragmentation of a line of balls by an impact // Proc. Roy. Soc. London A. – 1999. – **455**. – P. 3201–3220.
9. *Job S., Santibanez F., Tapia F., Melo F.* Wave localization in strongly nonlinear Hertzian chains with mass defect // Phys. Rev. E. – 2009. – **80**. – 025602, 4 p.
10. *Harbola U., Rosas A., Romero A. et al.* Pulse propagation in decorated granular chains: an analytical approach // Ibid. – 2009. – **80**. – 051302, 9 p.
11. *Lima Dias Pinto I., Rosas A., Romero A. H., Lindenberg K.* Pulse propagation in a chain of o-rings with and without precompression // Ibid. – 2010. – **82**. – 031308, 6 p.
12. *Landau L. D.* Theory of elasticity. 3rd ed. – Heinemann: Butterworth, 1986. – 200 p.
13. *Pinney E.* Ordinary difference-differential equations. – Berkley; Los Angeles: Univ. of California Press, 1958. – 262 p.
14. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. – New York: Dover, 1966. – 1046 p.
15. *Polyanin A. D., Zaitsev V. F.* Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. 2nd ed. – Boca Raton: Chapman & Hall, CRC Press, 2003. – 787 p.

Одеський державний екологічний університет
Університет м. Льеж, Бельгія

Надійшло до редакції 23.12.2011

О. И. Герасимов, Н. Вандевалле

К задаче о распространении импульса в неоднородной гранулированной цепочке

В работе, в приближении слабой неоднородности, найдены точные решения дифференциально-разностного уравнения в задаче о передаче импульса в вертикальной гранулированной цепочке с нелинейными контактами, которое выражается с помощью функций Бесселя первого рода. В континуальном приближении для управляющих уравнений также найдено новое точное решение в виде функции солитоноподобного типа. Найденные классы точных решений существенно дополняют известные решения типа дисперсионых мод, а также солитонного типа (последние — в случае нелианеризованных уравнений движений). Полученные результаты свидетельствуют о том, что передача импульса в слабонеоднородных гранулированных цепочках, не может быть описана с помощью универсального волнового подхода.

O. I. Gerasymov, N. Vandewalle

On the exact solutions of the problem of impulsive propagation in an inhomogeneous granular chain

A rigorous solution of the functional differential equation describing the signal propagation through a vertical granular chain with nonlinear contacts has been found in the approximation of a weak inhomogeneouty in the form of a Bessel function of the first order. The solution is valid at all points inside of the system except for boundaries. The appropriate boundary conditions are satisfied by the linear combinations of Bessel functions. The relevant scaling behavior is outlined. In the continuum limit of the governing transport equation, a new rigorous solution in the form of soliton-like modes has been also found. The obtained classes of analytical solutions are a significant supplement either to the dispersive wave modes or to the soliton solution (in case of a nonlinearized form of the transport equation), which has been reported for such a system earlier. The relevant experiments directed to the experimental study of the discovered dynamics are discussed.