Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

8 • 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 517.948



**В. А. Золотарев**

# Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с нелокальным потенциалом

*(Представлено академиком НАН Украины В. А. Марченко)*

*Осуществлен спектральный анализ самосопряженного интегро-дифференциального оператора, который является одномерным возмущением оператора второй производной на конечном интервале. Описан спектр этого оператора и решена обратная спектральная задача, которая позволяет по двум спектрам найти соответствующее возмущение.*

В данной работе изучаются прямая и обратная задачи для оператора $-d/dx^2 + K$, где $K$ — произвольный самосопряженный одномерный оператор.

**1. Характеристическая функция.** Обозначим через $L_0$ действующий в пространстве $L^2_{(0,\pi)}$ самосопряженный оператор

$$L_0 y(x) = -y''(x), \tag{1}$$

область определения которого состоит из дважды дифференцируемых функций, удовлетворяющих краевым условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. Рассмотрим самосопряженный интегро-дифференциальный оператор [1]

$$Ly(x) = L_0 y(x) + \alpha\langle y, v\rangle v = -y''(x) + \alpha \int\limits_0^\pi \overline{v(t)} v(x) y(t)\, dt. \tag{2}$$

Область определения оператора $L$ совпадает с областью определения оператора $L_0$, а $\alpha = \pm 1$ и $v(x)$ — комплекснозначная функция из $L^2_{(0,\pi)}$. Решение $u(x,z)$ уравнения $Lu = zu$, удовлетворяющее краевому условию $u(0,z) = 0$, имеет вид

$$u(x,z) = a(\lambda)\frac{\sin\lambda x}{\lambda} + \alpha b(\lambda) \int\limits_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} v(t)\, dt, \tag{3}$$

где $z = \lambda^2$, $a(\lambda)$ — произвольная функция от $\lambda$, а

$$b(\lambda) = \int_0^\pi u(x,\lambda)\overline{v(x)}\,dx. \tag{4}$$

Умножив (3) на $\overline{v(x)}$ и проинтегрировав от 0 до $\pi$, получим

$$a(\lambda)\frac{\overline{\widetilde{v}(\overline{\lambda})} - \overline{\widetilde{v}(-\overline{\lambda})}}{2i\lambda} - b(\lambda)\left(1 - \alpha\int_0^\pi\int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}v(t)dt\overline{v(x)}\,dx\right) = 0, \tag{5}$$

где через

$$\widetilde{v}(\lambda) = \int_0^\pi e^{-i\lambda x}v(x)\,dx \tag{6}$$

обозначено преобразование Фурье функции $v(x)$. Так как

$$\int_0^\pi\int_0^x \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}v(t)dt\overline{v(x)}\,dx = \frac{\overline{\phi(\overline{\lambda})} - \overline{\phi(-\overline{\lambda})}}{2i\lambda},$$

где

$$\phi(\lambda) = \int_0^\pi e^{-i\lambda x}v(x)\int_0^x e^{i\lambda t}\overline{v(t)}\,dtdx, \tag{7}$$

то равенство (5) можно переписать так:

$$a(\lambda)\frac{\overline{\widetilde{v}(\overline{\lambda})} - \overline{\widetilde{v}(\overline{\lambda})}}{2i\lambda} - \frac{b(\lambda)}{2i\lambda}(2i\lambda - \alpha\overline{\phi(\overline{\lambda})} + \alpha\overline{\phi(-\overline{\lambda})}) = 0. \tag{8}$$

Из краевого условия $u(\pi, z) = 0$ следует

$$a(\lambda)\frac{\sin\pi\lambda}{\lambda} + \alpha b(\lambda)\int_0^\pi \frac{\sin\lambda(\pi-t)}{\lambda}v(t)\,dt = 0. \tag{9}$$

Система линейных уравнений (8), (9) относительно $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$ имеет нетривиальное решение, если ее определитель

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin\pi\lambda}{2i\lambda^2}(2i\lambda - \alpha\overline{\phi(\overline{\lambda})} + \alpha\overline{\phi(-\overline{\lambda})}) + \alpha\frac{\overline{\widetilde{v}(\overline{\lambda})} - \overline{\widetilde{v}(-\overline{\lambda})}}{2i\lambda}\int_0^\pi \frac{\sin\lambda(\pi-t)}{\lambda}v(t)\,dt \tag{10}$$

равен нулю. Интегрируя по частям выражение $\phi(\lambda)$ (7), имеем

$$\phi(\lambda) + \overline{\phi(\overline{\lambda})} = \widetilde{v}(\lambda)\overline{\widetilde{v}(\overline{\lambda})}. \tag{11}$$

С учетом (11) получим представление для $\Delta(\lambda)$ (10)

$$\Delta(\lambda) = -\frac{e^{i\lambda\pi}}{4\lambda^2}[2i\lambda + \alpha(\phi(\lambda) + \overline{\phi(-\overline{\lambda})} - \widetilde{v}(\lambda)\overline{\widetilde{v}(-\overline{\lambda})})] +$$

$$+ \frac{e^{-i\lambda\pi}}{4\lambda^2}[2i\lambda + \alpha(\widetilde{v}(-\lambda)\overline{\widetilde{v}(\overline{\lambda})} - \phi(-\lambda) - \overline{\phi(\overline{\lambda})})]. \tag{12}$$

Если $\lambda$ является нулем функции $\Delta(\lambda)$ (12), то $z = \lambda^2$ есть собственное число оператора $L$ (2). Поэтому функцию $\Delta(\lambda)$ будем называть *характеристической функцией оператора* $L$ (2).

**2. Резольвента оператора** $L$. Резольвента $R(z) = (L - zI)^{-1}$ оператора $L$ (2) выражается через резольвенту $R_0(z) = (L_0 - zI)^{-1}$ оператора $L_0$ (1) формулой

$$R(z)f = R_0(z)f - \alpha\frac{\langle R_0(z)f, v\rangle}{1 + \alpha\langle R_0(z)v, v\rangle}R_0(z)v. \tag{13}$$

Резольвента $R_0(\lambda^2)$ имеет вид [2]

$$(R_0(\lambda^2)f)(x) = \frac{1}{\lambda\sin\pi\lambda}\left\{\sin\lambda(\pi - x)\int\limits_0^x \sin\lambda t f(t)\,dt + \sin\lambda x\int\limits_x^\pi \sin\lambda(\pi - t)f(t)\,dt\right\}. \tag{14}$$

Используя (13) и опуская выкладки, можно доказать формулу

$$\Delta(\lambda) = \frac{\sin\pi\lambda}{\lambda}(1 + \alpha\langle R_0(\lambda^2)v, v\rangle). \tag{15}$$

Из соотношения (15) следует, что $\Delta(\lambda)$ (12) является целой функцией экспоненциального типа, который равен $\pi$. Для этого следует заметить, что $(\sin\pi\lambda)/\lambda$ имеет экспоненциальный тип $\pi$, выражение $|((\sin\pi\lambda)/\lambda)\langle R_0(\lambda^2)v, v\rangle|$ ограничено на $\mathbb{R}$, а на любой окружности $C_R = \{\lambda\colon |\lambda| = R\}$ оценивается сверху $ae^{\pi R}$ (где $a$ — константа).

Спектр оператора $L_0$ (1) дискретен, $\sigma_0 = \{n^2\colon n \in \mathbb{N}\}$, а его ортонормированные собственные функции равны $u_n(x) = \sqrt{2/\pi}\sin nx$. Отсюда вытекает

$$1 + \alpha\langle R_0(z)v, v\rangle = 1 + \alpha\sum_k \frac{|v_k|^2}{k^2 - z}, \tag{16}$$

где $v_k = \langle v, u_k\rangle$ — синус-коэффициенты Фурье функции $v(x)$. С учетом (15), (16) получим утверждение.

**Лемма 1.** *Для характеристической функции* $\Delta(\lambda)$ (12) *справедливо представление*

$$\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}\left(1 + \alpha\sum_k \frac{|v_k|^2}{k^2 - \lambda^2}\right) = \Delta(\lambda), \tag{17}$$

*где* $v_k$ *— синус-коэффициенты Фурье функции* $v(x)$.

**3. Обратная задача.** Обозначим через $\Lambda = \{\lambda_k\}$ множество нулей функции $\Delta(\lambda)$ (12). Используя разложение в бесконечное произведение [3] целой функции экспоненциального типа $\Delta(\lambda)$ и $\sin\lambda\pi$, запишем формулу (17) в виде

$$1 + \alpha\sum_k \frac{|v_k|^2}{k^2 - \lambda^2} = -\frac{C}{4\pi}\frac{\prod\limits_{\lambda_k\in\Lambda}\left(1 - \dfrac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right)}{\prod\limits_{k\in\mathbb{N}}\left(1 - \dfrac{\lambda^2}{k^2}\right)}, \tag{18}$$

где $C$ — константа. а произведение в числителе берется с учетом кратности корней $\lambda_k$. Подставив в (18) $\lambda^2 = iy$ и устремив $y$ к бесконечности, найдем $C = -4\pi \prod\limits_k (\lambda_k/k)^2$. После вычисления вычета в обеих частях равенства (18) в точке $\lambda = n$ и с учетом найденного значения $C$ имеем

$$\alpha |v_n|^2 = (\lambda_n^2 - n^2) \prod_{k \neq n} \frac{\lambda_k^2 - n^2}{k^2 - n^2}. \tag{19}$$

Отсюда следует

**Теорема 1.** *По спектру $\sigma(L) = \{\lambda_n^2\}$ оператора $L$ (2) (с учетом кратностей $\lambda_n^2$) однозначно восстанавливаются число $\alpha$ ($= \pm 1$) и квадраты модулей $|v_n|^2$ синус-коэффициентов Фурье $v_n$ функции $v(x)$.*

Пусть

$$v_\varphi(x) = \sum_k |v_k| e^{i\varphi_k} u_k(x), \tag{20}$$

где $\varphi_k$ — произвольные числа из $[0, 2\pi]$ ($k \in \mathbb{N}$). Из теоремы 1 следует, что оператор $L_\varphi$ вида (2), у которого $\alpha$ такое же, как у $L$ (2), а $v_\varphi(x)$ равна (20), имеет спектр, совпадающий со спектром $L$: $\sigma(L_\varphi) = \sigma(L)$. Укажем способ однозначного нахождения $v(x)$. Рассмотрим операторы $L_\pm$ вида (2), у которых $\alpha_\pm = \alpha$ и

$$v_\pm(x) = v(x) \pm h(x), \tag{21}$$

где $h(x)$ вещественна и принадлежит $L^2_{(0,\pi)}$. Из теоремы 1 вытекает, что по спектрам $\sigma(L_-)$ и $\sigma(L_+)$ мы можем найти

$$\begin{aligned} |v_+(n)|^2 &= |v_n|^2 + 2 \operatorname{Re} v_n h_n + |h_n|^2, \\ |v_-(n)|^2 &= |v_n|^2 - 2 \operatorname{Re} v_n h_n + |h_n|^2, \end{aligned} \tag{22}$$

где $v_\pm(n)$ и $h_n$ — синус-коэффициенты Фурье-функций $v_\pm(x)$ (21) и $h(x)$. В случае вещественности $v(x)$ из системы уравнений (22) мы однозначно находим числа $v_n$, в предположении, что коэффициенты Фурье $h_n$ заданной функции $h(x)$ отличны от нуля. В частности, если $h(x) = x$, то $h_n = \dfrac{\pi}{n}(-1)^{n+1}$ и из (22) получим $4\pi v_n = n(-1)^{n+1}(|v_+(n)|^2 - |v_-(n)|)^2$.

**Теорема 2.** *Пусть заданы два оператора $L_+$ и $L_-$ вида (2), у которых $\alpha_\pm = \alpha$ ($= \pm 1$), функция $v(x)$ вещественна, а $v_\pm(x)$ заданы формулами (21), где $h(x)$ — известная вещественная функция из $L^2_{(0,\pi)}$ с ненулевыми синус-коэффициентами Фурье. Тогда по спектрам $\sigma(L_+)$, $\sigma(L_-)$ (с учетом их кратностей) операторов $L_+$, $L_-$ функция $v(x)$ определяется единственным образом.*

В случае комплекснозначности $v(x)$ наряду с $L_+$ и $L_-$ следует также рассмотреть оператор $L_i$ вида (2), у которого $\alpha_i = \alpha$, а

$$v_i(x) = v(x) + ih(x), \tag{23}$$

где $h(x)$ вещественна и совпадает с $h(x)$ в (21). Тогда по спектру $\sigma(L_i)$ в силу теоремы 1 найдем

$$|v_i(n)|^2 = |v_n|^2 + 2 \operatorname{Im} v_n \cdot h_n + |h_n|^2. \tag{24}$$

Из (22), (24) вытекает, что по спектрам $\sigma(L_+)$, $\sigma(L_-)$, $\sigma(L_i)$ операторов $L_+$, $L_-$, $L_i$ вида (2), где $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha_i = \alpha$ $(= \pm 1)$, а $v_\pm(x)$ и $v_i(x)$ заданы формулами (21), (23), однозначно находится функция $v(x)$, при условии, что $h(x)$ — известная вещественная функция из $L^2_{(0,\pi)}$ с ненулевыми синус-коэффициентами Фурье.

**4. Спектр оператора $L$.** Использовав формулу (11) и представление (12) для $\Delta(\lambda)$, получим

$$\Delta(n) = \frac{(-1)^{n+1}\alpha}{n^2}|v_n|^2. \tag{25}$$

Из (17) следует, что нули $\lambda_k$ функции $\Delta(\lambda)$ принадлежат: либо нулям $(\sin\pi\lambda)/\lambda$; либо нулям функции $1 + \alpha\langle R_0(\lambda^2)v, v\rangle$; либо являются нулями $(\sin\pi\lambda)/\lambda$ и $1 + \alpha\langle R_0(\lambda^2)v, v\rangle$ одновременно. С учетом (25) имеем, что $\lambda_n = n \in \mathbb{N}$ в том и только в том случае, если $v_n = 0$. Обозначим через $N_1$ подмножество из $\mathbb{N}$,

$$N_1 = \{n \in \mathbb{N}\colon v_n = 0\}. \tag{26}$$

Пусть $N_2 = \mathbb{N} \setminus N_1 = \{n \in \mathbb{N}\colon v_n \neq 0\}$. Из (16) следует, что нули $\mu_k$ функции $1+\alpha\langle R_0(z)v, v\rangle$ вещественные, простые и перемежаются с числами $n^2$, где $n^2 \in N_2$. Определим множества

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = \{\lambda_k^2\colon \lambda_k^2 = n^2, n \in N_1; n \neq \mu_k \forall\, k\},\\
&\sigma_2 = \{\lambda_k^2 = \mu_k\colon \exists\, n \in N_1, \mu_k = n\},\\
&\sigma_3 = \{\lambda_k^2 = \mu_k\colon \mu_k \neq n, \forall\, n \in N_1\},
\end{aligned} \tag{27}$$

тогда спектр оператора $L$ (2) представляет собой объединение непересекающихся множеств,

$$\sigma(L) = \sigma_1 \bigcup \sigma_2 \bigcup \sigma_3. \tag{28}$$

Спектр, отвечающий $\sigma_1$ и $\sigma_3$, простой, а соответствующие функции оператора $L$ равны

$$\begin{aligned}
&u(x,\lambda_n) = \sin\lambda_n x \qquad (\lambda_n \in \sigma_1),\\
&\widehat{u}(x,\lambda_n) = \sum_{k\in N_2} \frac{v_k}{k^2 - \lambda_n^2}\sin kx \qquad (\lambda_n \in \sigma_3).
\end{aligned} \tag{29}$$

Компоненте $\sigma_2$ (27) отвечает двукратный спектр, при этом собственные функции $u(x,\lambda_n)$ и $\widehat{u}(x,\lambda_n)$ имеют вид (29), где $\lambda_n \in \sigma_2$.


1. *Хейне В., Коэн М., Уэйр Д.* Теория псевдопотенциала. – Москва: Мир, 1973. – 557 с.
2. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. – Москва: Наука, 1984. – 240 с.
3. *Levin B. Ya.* Lectures on entire functions // Transl. Math. Monogr. Vol. 150. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. – 248 p.



*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков*
*Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*



*Поступило в редакцию 21.12.2011*

**В. О. Золотарьов**

## Обернена задача для оператора Штурма–Ліувілля з нелокальним потенціалом

*Здійснено спектральний аналіз самоспряженого інтегро-диференціального оператора, який є одновимірним збуренням оператора другої похідної на скінченному інтервалі. Описано спектр цього оператора та розв'язано обернену спектральну задачу, що дозволяє по двох спектрах знайти відповідне збурення.*

**V. A. Zolotarev**

## An inverse problem for the Sturm–Liouville operator with non-local potential

*Spectral analysis of a self-adjoint integro-differential operator, which is a one-dimensional perturbation of the second derivative operator on a finite interval, is realized. Spectrum of this operator is described, and the inverse spectral problem is solved allowing us to find the corresponding perturbation from two spectra.*